



Numéro national de thèse : **2018LYSEN053**

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**

opérée par

**l'École Normale Supérieure de Lyon**

**École Doctorale en Informatique et Mathématiques de Lyon N° 512**

**Discipline : Mathématiques**

Soutenue publiquement le 24 septembre 2018, par :

**Alexandre Bordas**

---

# Homogénéisation stochastique quantitative

---

Devant le jury composé de

M. Scott ARMSTRONG	New York University	Co-encadrant
M. Pierre CARDALIAGUET	Université Paris-Dauphine	Rapporteur
M. Jean-Dominique DEUSCHEL	Technisches Universität Berlin	Rapporteur
Mme Nina GANTERT	Technisches Universität München	Examinatrice
Mme Alice GUIONNET	E.N.S. de Lyon	Examinatrice
M. Grégory MIERMONT	E.N.S. de Lyon	Examinateur
M. Jean-Christophe MOURRAT	E.N.S. de Paris	Directeur

## Résumé

Cette thèse porte sur l'homogénéisation quantitative d'équations aux dérivées partielles paraboliques, et de problèmes elliptiques discrets.

Dans l'introduction, nous voyons comment de tels problèmes, même lorsque les coefficients sont déterministes, résultent d'un modèle aléatoire. Nous introduisons alors l'homogénéisation : que se passe-t-il lorsque les coefficients eux-mêmes sont aléatoires, est-il possible de considérer qu'un environnement présentant des inhomogénéités sur de très petites échelles se comporte d'une manière proche d'un environnement fictif qui serait homogène ? Nous donnons ensuite une interprétation de cette question en terme de marche aléatoire en conductances aléatoires, puis donnons une idée des outils utilisés dans les preuves des deux chapitres suivants.

Dans le chapitre 2, nous démontrons un résultat d'homogénéisation quantitative pour une équation parabolique — l'équation de la chaleur par exemple — dans un environnement admettant des coefficients aléatoires et dépendant du temps. La méthode utilisée consiste à considérer les solutions d'un tel problème comme optimiseurs de fonctionnelles qui seront définies au préalable, puis d'utiliser la propriété cruciale de sous-additivité de ces quantités, afin d'en déduire une convergence puis un résultat de concentration, qui permettra d'en déduire une vitesse de convergence des solutions vers la solution du problème homogénéisé.

Dans le chapitre 3, nous adaptons ces méthodes pour un problème elliptique sur le graphe  $\mathbb{Z}^d$

**Mots-clés:** Homogénéisation stochastique, équations aux dérivées partielles paraboliques, équations aux dérivées partielles elliptiques, méthodes variationnelles, énergies sous-additives

## Abstract

This thesis deals with quantitative stochastic homogenization of parabolic partial differential equations, and discrete elliptic problems.

In the introduction, we see how such problems can come from random models, even when the coefficients are deterministic. Then, we introduce homogenization : what happens if the coefficients themselves are random ? Could we consider that an environment with microscopical random heterogeneities behaves, at big scale, as a fictitious deterministic homogeneous environment ? Then, we give a random walk in random environment interpretation and the sketch of the proofs in the two following chapters.

In chapter 2, we prove a quantitative homogenization result for parabolic PDEs, such as heat equation, in environment admitting time and space dependent coefficients. The method of the proof consists in considering solutions of such problems as minimizers of variational problems. The first step is to express solutions as minimizers, and then to use the capital property of subadditivity of the corresponding quantities, in order to deduce convergence and concentration result. From that, we deduce a rate of convergence of the actual solutions to the homogenized solution.

In chapter 3, we adapt these methods to a discrete elliptic problem on the lattice  $\mathbb{Z}^d$ .

**Keywords:** Stochastic homogenization, parabolic PDE, elliptic PDE, variational methods, sub-additive quantities, functional inequalities



## Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier Jean-Christophe, sans qui je n'aurais jamais écrit ce manuscrit. D'abord en tant qu'enseignant puis en tant que directeur, j'ai toujours admiré sa façon de trouver une signification à une formule là où je n'étais capable de percevoir qu'une suite de symboles, d'identifier instantanément l'erreur dans une suite d'arguments et enfin d'expliquer patiemment des choses compliquées pour les rendre plus simples. Merci à Scott pour avoir suivi et guidé mon travail.

Mes remerciements vont également à Pierre Cardaliaguet et Jean-Dominique Deuschel, pour avoir consacré du temps à lire cette thèse et émis des remarques pertinentes à son sujet. Je remercie également Nina Gantert, Alice Guionnet et Grégory Miermont d'avoir accepté d'être membres du jury.

J'ai particulièrement apprécié de faire ma thèse à l'UMPA, dans des conditions idéales. Son secrétariat, remarquablement efficace, mérite bien qu'on remercie Magalie et Virginia. Je tiens aussi à remercier ceux avec qui j'aurai partagé un TD : Mickaël K., Emmanuel, Florian, Jonathan, Loïc et Marie; ceux qui auront toujours des choses à m'apprendre : Florian Thauvin (il se reconnaîtra) et Mickaël (présent durant absolument toutes les étapes). Merci également à Romain et Samuel pour leurs passes, Alexandre (et ses défis non-tenus), Arthur, Benoît, Léo, Thomas, Valentin et Valentine pour les discussions – mathématiques ou non – que nous aurons eues.

J'aimerais également remercier quelques enseignants sans lesquels je n'aurais pas suivi cette trajectoire : Carole, Franz, Émeric, Jürgen, ceux déjà cités et bien d'autres encore.

Merci également aux kayakistes, avec lesquels nous avons franchi bien plus que des portes.

Je remercie évidemment Martine et Christian, sans qui je n'existerais pas, ainsi qu'Antoine et Sophie, qui m'ont mené la vie dure !



# Table des matières

## 1 Présentation des résultats

1.1	Particules se déplaçant de manière aléatoire . . . . .	1
1.1.1	Modélisation de particules se déplaçant sur un réseau discret . . . . .	1
1.2	Homogénéisation . . . . .	8
1.2.1	Homogénéisation d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1. . . . .	9
1.2.2	Homogénéisation de problèmes elliptiques. . . . .	11
1.2.3	Homogénéisation pour l'équation parabolique . . . . .	15
1.3	Marches aléatoires en conductances aléatoires . . . . .	18
1.3.1	Description du modèle et questions principales . . . . .	18
1.3.2	La méthode des correcteurs . . . . .	21
1.3.3	Une motivation à l'étude des coefficients dépendant du temps . . . . .	23
1.4	Idées de la preuve . . . . .	26
1.4.1	Restriction aux ensembles cubiques avec condition au bord affine. . . . .	26
1.4.2	Caractérisation des solutions comme minimiseurs . . . . .	27
1.4.3	Définition des quantités étudiées . . . . .	30
1.4.4	Idées communes et différences dans la preuve du problème elliptique discret . . . . .	34

## 2 Parabolic equations 37

2.1	Introduction . . . . .	37
2.1.1	Motivation and informal summary of results . . . . .	37
2.1.2	Assumptions . . . . .	39
2.1.3	Notation . . . . .	39
2.1.4	Statement of the main results . . . . .	43
2.1.5	Outline of the chapter . . . . .	46
2.2	Variational structure and subadditive quantities . . . . .	46
2.2.1	Variational formulation of parabolic equations . . . . .	46
2.2.2	Subadditive quantities and basic properties . . . . .	48
2.3	Functional inequalities . . . . .	53
2.4	Convergence of subadditive quantities . . . . .	67

2.4.1	The coarsened mapping . . . . .	69
2.4.2	Control of the expectation of $J$ . . . . .	70
2.4.3	Control of the fluctuations of $J$ . . . . .	77
2.5	Quantitative homogenization of the Cauchy-Dirichlet problem . . . . .	81
2.5.1	Convergence of $J$ maximizers . . . . .	81
2.5.2	Construction of finite-volume correctors . . . . .	84
2.5.3	The proof of Theorem 2.1 . . . . .	85
2.6	Regularity theory . . . . .	91
2.7	Appendix A : Variational structure of uniformly parabolic equations . . . . .	93
2.8	Appendix B : Meyers-type estimates . . . . .	99
<b>3</b>	<b>Discrete elliptic equations</b>	<b>107</b>
3.1	Introduction . . . . .	107
3.1.1	Notations . . . . .	107
3.1.2	Statement of the main result . . . . .	110
3.1.3	Subadditive quantities . . . . .	110
3.1.4	The dual quantity $\nu^*$ . . . . .	112
3.1.5	The master quantity $J$ . . . . .	113
3.2	Functional inequalities . . . . .	116
3.3	Flatness of maximizers . . . . .	119
3.3.1	Control of the expectation of $J$ . . . . .	120
3.3.2	Control of the fluctuations of $J$ . . . . .	126
3.4	Quantitative homogenization for the Dirichlet Problem . . . . .	128
3.4.1	Convergence of $J$ maximizers . . . . .	128
3.4.2	Conclusion . . . . .	131
	<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>

# Chapitre 1

## Présentation des résultats

- Dans ce chapitre, nous commencerons par justifier comment l'équation de la chaleur, problème a priori purement analytique, provient d'un phénomène aléatoire, comme limite à grandes échelles d'un système de particules se déplaçant aléatoirement. Nous verrons ceci dans la section 1.1, en décrivant tout d'abord un réseau discret, puis un modèle continu.
- Dans un second temps, nous introduirons l'homogénéisation : qu'advient-il si le comportement de l'environnement sur lequel on étudie la diffusion varie de manière microscopique ? L'environnement admet-il à grande échelle le même comportement que celui d'un environnement simplifié ? Nous évoquerons deux modèles différents : des variations périodiques et des variations aléatoires. Nous donnerons des exemples simples sur des équations différentielles ordinaires, puis sur des équations aux dérivées partielles elliptiques. Enfin, on énoncera un résultat d'homogénéisation quantitative pour le problème parabolique, qui est le théorème principal obtenu au cours de ma thèse.
- L'étude de l'équation de la chaleur en milieu aléatoire se trouve donc liée – en considérant ce qui aura été énoncé dans la première section – à l'étude d'un processus aléatoire sur un environnement lui-même aléatoire. Nous introduirons le modèle des conductances aléatoires, les questions qui se posent sur le comportement de la marche aléatoire dans cet environnement, et comparerons ces questions à des résultats d'homogénéisation. Nous introduirons alors un outil : le correcteur, qui permettra de transférer les questions sur le comportement de la marche aléatoire à un problème d'homogénéisation, réduisant ainsi un aléa à deux niveau (environnement + marche dans l'environnement) à un aléa simple (le correcteur, dépendant de l'environnement). Enfin, nous justifierons l'intérêt d'étudier un modèle dans lequel les conductances varient dans le temps en introduisant la représentation de Helffer-Sjöstrand.
- La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la preuve du résultat d'homogénéisation stochastique pour des équations paraboliques avec coefficients dépendant du temps, qui est le résultat principal de ma thèse. Nous y donnerons les idées principales permettant d'aboutir à ce résultat. Dans un premier temps, nous décrirons l'idée qui consiste à représenter les solutions d'un tel problème comme minimiseurs d'un problème variationnel, qui est l'un des aspects sur lesquels la preuve de l'homogénéisation diffère le plus entre les modèles elliptiques et paraboliques. Dans le cas elliptique, déjà traité dans le passé, cette caractérisation permettait ensuite d'introduire des quantités sous-additives, permettant d'établir un résultat quantitatif d'homogénéisation, comme l'explique [4]. Après avoir



prouvé qu'il est encore possible de définir des quantités analogues dans le cas parabolique, nous résumerons les idées qui permettent de conclure.

- La suite de ce manuscrit est constituée de deux chapitres. Le premier est la preuve du résultat quantitatif d'homogénéisation pour les équations paraboliques. Le second donne un résultat d'homogénéisation pour les correcteurs du problème elliptique sur un ensemble discret, en s'inspirant des méthodes utilisées dans le premier chapitre.

## 1.1 Particules se déplaçant de manière aléatoire

Dans cette section, nous observons que l'équation de la chaleur résulte d'un modèle probabiliste, comme limite à grandes échelles d'un système de particules se déplaçant aléatoirement. Nous décrirons d'abord un modèle discret, puis un modèle continu. Dans les deux cas, nous décrirons le modèle sur l'espace entier et celui sur un domaine borné, nous verrons apparaître le problème parabolique mais aussi celui elliptique, comme solutions stationnaires de ce dernier.

### 1.1.1 Modélisation de particules se déplaçant sur un réseau discret

Considérons un ensemble de particules, disposées en un instant initial en des points d'un réseau,  $\mathbb{Z}^d$ , suivant chacune une marche aléatoire. Le réseau  $\mathbb{Z}^d$  considéré est le graphe dont l'ensemble de sommets est  $\mathbb{Z}^d$  et pour lequel une arête joint deux sommets si et seulement si ces derniers sont voisins. On notera  $x \sim y$  les telles paires de sommets, formellement,

$$x \sim y \iff \|x - y\|_1 = 1.$$

On notera  $\mathcal{E}_d = \mathcal{E}(\mathbb{Z}_d)$  l'ensemble des arêtes du graphe ainsi formé. Dans un premier temps, considérons la marche aléatoire simple à temps discret, c'est-à-dire une trajectoire le long de laquelle la particule en un point donné se déplace avec une probabilité identique (valant donc  $\frac{1}{2d}$ ) vers l'un de ses  $2d$  voisins. Ceci correspond à une situation dans laquelle les particules sautent, à intervalle de temps constant, d'un sommet à l'un de ses voisins. Notons également

$$u(t, x) = \text{le nombre de particules à l'instant } t \text{ à la position } x.$$

Cette quantité est aléatoire. Supposons que nous soit donnée à l'instant initial la quantité de particules en chaque point du réseau :  $u_0(x)$ . Alors il nous est possible de calculer pour chaque instant  $t$  la quantité moyenne de particules en un point  $x$  du réseau. En effet, admettant que chaque particule initialement disposée au sommet  $y \in \mathbb{Z}^d$  ait une probabilité  $p(t, y, x)$  de se situer à l'emplacement  $x$  à l'instant  $t$ , on obtient, en effectuant un bilan sur l'intégralité des particules, le résultat suivant :

$$\mathbb{E}_{u_0} [u(t, x)] = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} u_0(y) p(t, y, x), \quad (1.1.1)$$

où  $t \in \mathbb{N}$  désigne le  $t^{\text{ème}}$  instant et  $x \in \mathbb{Z}^d$  est un sommet du réseau. Par ailleurs, on peut remarquer en utilisant la symétrie du réseau  $\mathbb{Z}^d$ , ainsi que le fait que chaque arête se comporte d'une manière identique, que les probabilités  $p(t, x, y)$  et  $p(t, y, x)$  sont égales. L'égalité précédente devient donc

$$\mathbb{E}_{u_0} [u(t, x)] = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} u_0(y) p(t, x, y),$$

qui peut se réécrire, en remarquant que  $p(t, x, \cdot)$  désigne la densité de la variable aléatoire  $X_t$ , marche aléatoire simple issue de  $x$  sous la loi  $\mathbf{P}_x$ , sous la forme

$$\mathbb{E}_{u_0} [u(t, x)] = \mathbb{E}_x [u_0(X_t)].$$

En notant  $v(t, x)$  cette espérance, on peut établir que  $v$  satisfait une égalité fonctionnelle. En effet, on peut calculer la variation entre deux instants  $t$  et  $t + 1$  de la quantité  $\mathbb{E}[u(t, x)]$  en exprimant que la position de la particule après  $t + 1$  étapes partant de  $x$  n'est rien d'autre que la

configuration après  $t$  étapes partant cette fois-ci du premier sommet visité,  $X_1$ , qui est l'un des  $2d$  voisins de  $x$  avec probabilité identique. En utilisant la propriété de Markov :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[u(t+1, x)] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_1}(u_0(t, x))] \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{P}_x[X_1 = z] \mathbb{E}_z[u_0(X_t)].\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

Dans ce cas, la quantité  $\mathbf{P}_x[X_1 = z]$  est identique pour tout  $z$  voisin de  $x$  et nulle pour tout autre point. Formellement,

$$\mathbf{P}_x[X_1 = z] = \frac{1}{2d} \delta_{x \sim z}.$$

On peut donc conclure que

$$\mathbb{E}[u(t+1, x)] = \frac{1}{2d} \sum_{z \sim x} \mathbb{E}[u(t, z)],\tag{1.1.3}$$

ce qui, après soustraction de la quantité  $\mathbb{E}[u(t, x)]$  aux deux membres de l'égalité donne l'équation fonctionnelle suivante :

$$v(t+1, x) - v(t, x) = \Delta v(t, x),$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien qui à une fonction  $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  associe la fonction  $\Delta f = x \mapsto \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x))$  et  $v$  est la fonction  $v : (t, x) \mapsto \mathbb{E}[u(t, x)]$ . On peut interpréter l'incrément  $v(t+1, x) - v(t, x)$  comme une dérivée par rapport au temps de la quantité  $v(\cdot, x)$ .

**Remarque 1** (Conductances variables). On peut constater que si l'on ne considère non plus la marche aléatoire simple, mais que la probabilité de passer d'un sommet  $x$  à un sommet  $y$  vaut  $\mathbf{a}(x, y)$  (avec  $\sum_{y \sim x} \mathbf{a}(x, y) = 1$ ), l'équation satisfaite par la fonction  $(t, x) \mapsto v(t, x)$  devient

$$v(t+1, x) - v(t, x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{a}(x, y) (v(t, y) - v(t, x)).$$

On peut remarquer que (1.1.3) n'est qu'un cas particulier de cette équation, dans lequel les probabilités de transition  $\mathbf{a}(x, y)$  valent  $\frac{1}{2d} \delta_{x \sim y}$ . On notera  $\nabla \cdot \mathbf{a} \nabla$  l'opérateur qui à  $f$  associe la fonction  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla f)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{a}(x, y) (f(y) - f(x))$ , et on remarquera que dans le cas de la marche aléatoire simple, cet opérateur est le laplacien.

**Remarque 2** (Point de vue matriciel). En fixant un instant  $t \in \mathbb{N}$ , on peut voir  $v(t, \cdot)$  comme un vecteur de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ , et noter  $A$  la matrice d'adjacence, pour laquelle  $A(x, y)$  vaut 0 s'il n'y a pas d'arête entre les sommets  $x$  et  $y$  et 1 sinon. On remarque que  $\Delta = \frac{1}{2d} A - Id_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}}$  et on observe (1.1.3) s'écrit

$$v(t+1, \cdot) = \frac{1}{2d} A v(t, \cdot),$$

ce qui, ajouté à la condition initiale  $v(0, x) = u_0(x)$  donne

$$v(t, \cdot) = \left(\frac{1}{2d} A\right)^t u_0.$$

On peut également démontrer par récurrence que les coefficients de la matrice  $A^n$  d'indices  $(x, y)$  désignent le nombre de chemins comportant  $n$  arêtes joignant le sommet  $x$  au sommet  $y$ , qui, divisé par  $2^n$  (la probabilité qu'un tel chemin soit parcouru), donne la probabilité d'aller de  $x$  à  $y$  en exactement  $n$  étapes.

**Remarque 3** (Fonction de Green). Étant donné l'absence d'interactions entre les particules, le comportement du système pour une condition initiale donnée n'est en fait qu'une superposition de chacun des systèmes où il n'y aurait qu'une seule particule. Comme (1.1.1) le stipule, la fonction  $v(t, \cdot) := x \mapsto v(t, x)$  est entièrement déterminée par la connaissance de  $p(t, \cdot, \cdot)$ . Par l'invariance par translation d'un vecteur de  $\mathbb{Z}^d$  du modèle, on obtient que la probabilité de relier  $x$  à  $y$  en  $t$  étapes est identique à celle de relier 0 à  $y - x$ . On peut donc réinterpréter (1.1.1) de la façon suivante :

$$v(t, x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} u_0(y) p(t, 0, y - x),$$

ou, en d'autres termes

$$v(t, x) = u_0 \star p(t, 0, \cdot)(x). \quad (1.1.4)$$

On remarque alors que la fonction  $x \mapsto p(t, 0, x)$  englobe toute la complexité du problème.

### Modélisation d'un domaine borné

Admettons à présent que le réseau étudié ne soit plus  $\mathbb{Z}^d$  mais seulement un domaine borné  $U \subseteq \mathbb{Z}^d$ . On admet que les particules sont présentes à l'instant  $t = 0$  en quantité  $u_0(0, x)$  à l'emplacement  $x$ , que de tout point intérieur à  $U$  (i.e. dont tous les voisins appartiennent à  $U$ ), les particules sautent, en chaque temps entier, aléatoirement en un voisin de  $x$ . Notons  $\Gamma$  le bord de  $U$ , i.e. l'ensemble des points de  $U$  admettant un voisin qui n'appartient pas à  $U$ . On admet que lorsqu'une particule atteint un point  $z$  sur le bord du domaine, celle-ci disparaît immédiatement et on note  $\tau$  le premier instant auquel cette disparition a lieu. Pour deux sommets  $x$  et  $y$  de  $U$  et un instant  $t \in \mathbb{N}$ , la probabilité qu'une particule présente en  $x$  à l'instant initial se situe en  $y$  à l'instant  $t$  sera notée  $\tilde{p}(t, x, y) := \mathbf{P}_x[\tau > t, X_t = y]$ , qui dépend de manière implicite de l'ensemble  $U$ . On suppose de plus qu'en chaque instant est créée une quantité  $u_0(t, z)$  de particules en tout point  $z \in \Gamma$  du bord du domaine. Ces particules admettent le même comportement que les autres, elles disparaissent au premier instant où elles atteignent à nouveau le bord du domaine (et non l'instant auquel elles sont créées). Intéressons nous à nouveau à la quantité moyenne de particules en un instant  $t \in \mathbb{N}$  à un emplacement  $x \in U$ . En faisant un bilan sur l'ensemble des particules présentes à l'instant initial en un point  $y \in U$  et qui se retrouvent avec probabilité  $\tilde{p}(t, y, x)$  en  $t$  au sommet  $x$ , ainsi que sur tous les instants  $s \in \{0, \dots, t\}$  des particules créées au sommet  $z \in \Gamma$  à l'instant  $s$ , qui se retrouvent avec probabilité  $\tilde{p}(t - s, z, x)$ , en utilisant la symétrie du problème, on peut intervertir les deux arguments d'espaces dans la fonction  $\tilde{p}(t, \cdot, \cdot)$  afin d'obtenir

$$\mathbb{E}_{u_0}[u(t, x)] = \sum_{y \in U} u_0(0, y) \tilde{p}(t, x, y) + \sum_{z \in \Gamma, s \in \{0, \dots, t\}} u_0(s, z) \tilde{p}(t - s, x, z), \quad (1.1.5)$$

et remarquer, en faisant le raisonnement inverse, que partant du sommet  $x$  il y a deux possibilités pour la particule au temps  $t$  :

- Soit celle-ci n'a pas encore atteint un bord du domaine et se retrouve en un point  $y$  avec probabilité  $\tilde{p}(t, x, y)$ ,
- Soit il existe un temps  $s \in \{0, \dots, t\}$  auquel la particule s'est retrouvée en l'un des points  $z$  de  $\Gamma$ , ceci avec probabilité  $\tilde{p}(s, x, z)$ .

On peut donc réécrire (1.1.5) sous la forme

$$\mathbb{E}_{u_0}[u(t, x)] = \mathbb{E}_x[u_0(t - t \wedge \tau, X_{t \wedge \tau})]. \quad (1.1.6)$$

En posant  $v(t, x) = \mathbb{E}_{u_0} [u(t, x)]$ , et en utilisant la propriété de Markov de la même façon que pour établir (1.1.2), on obtient, pour tout  $t \in \mathbb{N}$  et  $x \in U \setminus \Gamma$

$$v(t+1, x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} v(t, y).$$

La fonction  $v$  est donc l'unique solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} v(t+1, x) - v(t, x) = \Delta v(t, x) \text{ pour tout } x \in U \setminus \Gamma \\ v(0, x) = u_0(0, x) \text{ pour tout } x \in U \\ v(t, z) = u_0(t, z) \text{ pour tout } z \in \Gamma. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

**Remarque 4** (Conductances variables). Comme dans la remarque 1, on peut constater qu'admettre des conductances de la forme  $\mathbf{a}(x, y)$  symétrique mènerait au même résultat, à condition de remplacer l'opérateur laplacien par  $\nabla \cdot \mathbf{a} \nabla$ .

**Remarque 5** (Solutions stationnaires). En supposant que  $v(t, x)$  admette une limite  $\bar{v}(x)$  pour chaque  $x \in U$  lorsque  $t$  tend vers l'infini, et que  $u_0(t, z) = g(z)$  pour tout sommet  $z \in \Gamma$ , (1.1.7) impose l'égalité suivante :

$$\begin{cases} \Delta \bar{v}(x) = 0 \\ \bar{v}(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.1.8)$$

qui, pour toute condition au bord  $g \in \mathbb{R}^\Gamma$ , admet une unique solution, donnée par la formule

$$\bar{v}(x) = \mathbb{E}_x [g(X_\tau)],$$

qui pouvait être retrouvée en admettant que  $t \wedge \tau \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \tau$  et en substituant son expression dans (1.1.6).

**Remarque 6** (Point de vue matriciel). De la même manière que pour la remarque 2, on peut considérer, pour chaque temps  $t \in \mathbb{N}$  la fonction  $x \mapsto v(t, x)$  comme un vecteur de  $\mathbb{R}^U$ , que l'on note  $v(t, \cdot)$ . On a alors la relation de récurrence

$$v(t+1, \cdot) = (\Delta + Id) v(t, \cdot) + E_t,$$

où  $\Delta$  est interprétée comme la matrice telle que  $\Delta + Id = Q$ , la matrice de transition de la marche aléatoire simple sur  $U$  (pour laquelle les sites du bord n'ont pas d'effets particuliers sur les particules). Le terme  $E_t$  désigne le vecteur de  $\mathbb{R}^U$  dont toutes les coordonnées correspondantes aux sommets internes de  $U$  sont nulles, et qui pour chaque  $z \in \Gamma$ , vérifie

$$E_t(z) = u_0(t+1, z) - [Qv(t, \cdot)](z).$$

Ce point de vue nous fournit une matrice  $Q$  stochastique, i.e. dont la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1. Afin de simplifier le terme  $E_t$ , considérons un réseau sans bords. Si l'on suppose de plus que le domaine est connexe — un tore par exemple — la matrice  $Q$  est irréductible et le théorème de Perron-Frobenius permet d'affirmer qu'elle admet la valeur propre 1, pour laquelle l'espace propre associé est de dimension 1 ; il s'agit de l'espace des constantes. Les autres valeurs propres de cette matrice sont de modules strictement inférieurs à 1. En notant  $\langle f \rangle$  la valeur moyenne d'un vecteur  $f \in \mathbb{R}^U$ , on obtient alors

$$v(t, \cdot) = Q^t v(0, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \langle v(0, \cdot) \rangle.$$

Dans le cas d'un domaine borné, sans bord et connexe, on s'aperçoit que les solutions stationnaires évoquées dans la remarque 1.1.8 sont donc les fonctions constantes. Par ailleurs, la connaissance des solutions de (1.1.7) est ramenée à celle des valeurs propres de  $\frac{1}{2d}A$  et de la décomposition en vecteurs propres de la condition initiale. On peut d'ailleurs remarquer que cela reste valable pour des conductances  $\mathbf{a}(x, y)$  plus générales — décrites dans la remarque 4 — à condition de considérer la matrice de l'opérateur  $\nabla \cdot \mathbf{a}\nabla + Id_U$ , i.e. la matrice des probabilités de transition entre sommets, au lieu de la matrice du laplacien.

### Modèle d'espace discret à temps continu

À présent, nous allons modéliser des trajectoires en temps continu. On suppose que chaque arête joignant  $x$  à  $y$  est munie d'une horloge, qui sonne au bout d'un temps suivant une loi exponentielle de paramètre  $\mathbf{a}(x, y)$ . Lorsqu'une particule se situe en un sommet  $x$ , celle-ci y reste jusqu'à ce que l'une des horloges associées aux arêtes issues de  $x$  — que l'on note  $(x, y)$  — sonne, et se déplace vers le sommet  $y$  ainsi déterminé. L'intérêt de considérer des horloges suivant des lois exponentielles réside dans l'absence de mémoire de cette loi : sachant qu'une particule se situe en un sommet  $x$ , son comportement est indépendant de la trajectoire passée de la particule, ainsi que du temps depuis lequel cette dernière ne s'est pas déplacée. On supposera dans cette sous-section que les conductances  $\mathbf{a}(x, y)$  sont seulement symétriques, i.e.  $\mathbf{a}(x, y) = \mathbf{a}(y, x)$ , le cas constant ( $\mathbf{a}(x, y) = C\delta_{x\sim y}$ ) n'étant qu'un cas particulier de ce dernier. Afin d'établir les égalités précédemment obtenues dans le modèle à temps discret, nous commençons par évaluer la probabilité qu'au cours d'un intervalle de temps très court, de longueur  $\delta t \ll 1$ , une particule passe d'un sommet  $x$  à un sommet  $y$ . Au cours d'un tel intervalle, la probabilité qu'une horloge de paramètre  $\mathbf{a}(x, y)$  ait sonné est de l'ordre de  $\mathbf{a}(x, y)\delta t$ , ce dont on déduit :

$$\begin{cases} \mathbf{P}_x [X_{\delta t} = z] \sim \mathbf{a}(x, z)\delta t & \text{si } z \sim x \\ \mathbf{P}_x [X_{\delta t} = x] = 1 - \delta t \left( \sum_{z \sim x} \mathbf{a}(x, z) \right) + o(\delta t) \\ \mathbf{P}_x [X_{\delta t} = z] = o(\delta t) & \text{si } \text{dist}(x, z) \geq 2. \end{cases}$$

En d'autres termes, l'état le plus probable au bout d'un temps  $\delta t \ll 1$  est celui dans lequel la particule est restée immobile ; avec une probabilité de l'ordre de  $\delta t$  (et pondérée par  $\mathbf{a}(x, y)$ ), la particule a effectué un saut, et la probabilité que la particule ait effectué deux sauts voire plus est de l'ordre de  $(\delta t)^2$  (ceci est valable si les conductances  $\mathbf{a}(x, y)$  sont bornées). En notant  $v(t, x)$  l'espérance du nombre de particules en  $x$  à l'instant  $t$ , on peut donc conclure que

$$v(t + \delta t, x) = \left( 1 - \delta t \sum_{y \sim x} \mathbf{a}(x, y) \right) v(t, x) + \delta t \sum_{z \sim x} v(t, z) + o(\delta t),$$

ce qui, après soustraction de la quantité  $v(t, x)$  aux deux membres de l'égalité puis division par  $\delta t$  et passage à la limite, donne l'équation fonctionnelle suivante :

$$\partial_t v(t, x) = \nabla \cdot (\mathbf{a}\nabla v)(t, x),$$

où  $\nabla \cdot \mathbf{a}\nabla$  est l'opérateur qui à  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$  associe

$$\nabla \cdot (\mathbf{a}\nabla f)(x) = \sum_{y \sim x} \mathbf{a}(x, y) (f(y) - f(x))$$

et  $v$  est la fonction  $v : (t, x) \mapsto \mathbb{E}[u(t, x)]$ .

### Modèle à espace continu

Afin de modéliser la diffusion d'un très grand nombre de particules sur un réseau d'échelle microscopique, il est naturel d'admettre que le réseau considéré,  $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ , se comporte de la même manière que l'espace  $\mathbb{R}^d$ , et qu'au lieu de dénombrer les particules en  $t$  au site  $x$ , on effectue une moyenne du nombre de particules en  $t$  sur un cube d'échelle mésoscopique centré en  $x$ . L'intuition donnée par la loi des grands nombres est que cette quantité, lorsque la maille du réseau devient de plus en plus fine, coïncidera avec son espérance. Ceci justifie l'intérêt d'étudier les quantités  $v(t, x)$  car elles sont une bonne approximation de  $u(t, x)$ . Par ailleurs, si l'on suppose que chaque particule suit une trajectoire brownienne — qui est la version continue de la marche aléatoire simple considérée dans la section 1.1.1 — la formule d'Ito, après intégration, donne

$$\partial_t u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x). \quad (1.1.9)$$

Cette égalité porte le nom d'équation de la chaleur. Soumise à une condition initiale,  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ , elle admet une unique solution, qui se trouve être la fonction

$$u(t, x) = \mathbb{E}_x [f(X_t)], \quad (1.1.10)$$

où  $(X_t)_{t \geq 0}$ , sous la loi  $\mathbf{P}_x$ , désigne un mouvement brownien issu du sommet  $x$ . Pour un temps  $t$  donné, la variable  $X_t$  suit une loi gaussienne d'espérance  $x$  et de matrice de covariance  $tId$ , formellement,  $X_t \sim \mathcal{N}(x, tId)$ , qui admet pour densité la fonction

$$p(t, x, \cdot) : y \mapsto \frac{\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right)}{(2\pi t)^{d/2}}.$$

On remarque alors que (1.1.10) s'écrit

$$u(t, x) = f \star p(t, 0, \cdot)(x).$$

Le fait que la fonction  $u(t, x)$  ainsi obtenue soit bien solution de (1.1.9) avec condition initiale  $f$  s'obtient alors car

- $p(t, 0, \cdot) = \delta_0$ , la mesure de Dirac, donc  $u(0, \cdot) = f$ .
- $\partial_t p(t, 0, \cdot) = \Delta p(t, 0, \cdot)$ .

En d'autres termes, la fonction  $(t, x) \mapsto p(t, 0, x)$ , appelée « noyau de la chaleur », est une fonction de Green pour l'équation de la chaleur, une preuve est donnée dans [19, Chapitre 2.3]. Ce résultat, en lien avec (1.1.4), permet de transférer la régularité du noyau de la chaleur, qui, convolé à une condition initiale éventuellement peu régulière, donne une régularité supérieure à la solution de (1.1.9).

**Remarque 7** (Validité du modèle). Le modèle étudié nous a conduit à l'établissement de l'équation de la chaleur, énoncé par Joseph Fourier en 1811. Comme son nom l'indique, cette équation permet de modéliser la diffusion de la température au sein d'un matériau. Notons  $u(t, x)$  la température au temps  $t$  et à l'emplacement  $x$ , en l'absence de sources de chaleur. Afin d'obtenir l'équation de la chaleur, on établit dans un premier temps la loi de conservation suivante :

$$\partial_t u + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

où  $\mathbf{j}$  est le flux thermique. La loi de Fourier énonce que ce flux est égal à l'opposé du gradient de température multiplié par le coefficient de conductivité du matériau, ce qui aboutit à l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u = \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla u).$$

D'après ce qui précède, cette équation coïncide avec la modélisation d'un système de particules se déplaçant aléatoirement. Ce modèle est valide si le nombre de particules en un point est comparable à l'espérance de ce nombre, ce qui tend à être vrai lorsque celui-ci est très élevé. Le nombre d'Avogadro, qui correspond approximativement au nombre de protons ou de neutrons dans un gramme de matière, est de l'ordre de  $6.10^{23}$ . Cette modélisation est donc intéressante pour caractériser le comportement, à notre échelle, de la diffusion de particules n'interagissant pas entre elles, qui se déplacent de manière aléatoire et isotrope. L'équation (1.1.9) est donc un bon modèle concernant la diffusion de la concentration d'un élément dans un solvant : c'est la loi de Fick, énoncée en 1855.

**Remarque 8** (Domaine borné). De la même façon que dans la sous-section 1.1.1.0, on peut se restreindre à un domaine borné. Celui-ci peut n'avoir pas de bord : un tore par exemple, domaine sur lequel une décomposition spectrale du laplacien peut être donnée par les séries de Fourier, qui fournissent un outil particulièrement efficace afin de résoudre (1.1.9). Le domaine peut également contenir un bord, auquel cas il faut ajouter une condition au bord (de régularité adaptée) à la condition initiale afin d'obtenir l'unicité d'une solution.

**Remarque 9** (Solutions stationnaires). De la même manière que pour la remarque 5 dans le cas discret, on peut s'intéresser aux solutions constantes en temps de (1.1.9). Celles-ci correspondent aux solutions du problème elliptique (par opposition à (1.1.9) qui est un problème parabolique) suivant :

$$\Delta u = 0, \tag{1.1.11}$$

dont les solutions sont appelées *fonctions harmoniques*, comme par exemple les fonctions affines. Sur un domaine borné, l'ajout d'une condition au bord à (1.1.11) fournit un problème de Dirichlet admettant une unique solution.

**Remarque 10** (Généralisations du modèle).

- Il est possible d'intégrer à ce modèle un terme dit « source » : considérant qu'il y a production d'une quantité  $u^*(t, x)$  de particules (de chaleur ou de matière, en fonction du système étudié) au temps  $t$  à l'emplacement  $x$ , ce terme peut-être ajouté dans le membre de droite dans (1.1.9).
- Si les particules se déplacent toujours de la même manière, et se divisent avec un taux  $f(t, x, u(t))$  (éventuellement négatif, auquel cas les particules disparaissent), le terme  $f(t, x, u(t))u(t, x)$  s'ajoute au membre de droite de (1.1.9) : c'est ce qu'on appelle *équation de réaction-diffusion*.
- Si les caractéristiques de l'environnement dans lequel se déplacent les particules ne sont pas les mêmes en tout points de l'espace, un terme de conductivité (qui, en fonction du système étudié, correspond à une conductivité thermique, électrique, etc.) intervient, modifiant ainsi l'opérateur laplacien. Cette considération est l'objet de la section suivante.



## Diffusion dans un milieu inhomogène

Jusqu'à présent, nous nous intéressions, pour le modèle à espace continu, à des particules se déplaçant de la même manière dans tous les endroits de l'espace. Par analogie avec les remarques 1 et 4, nous pouvons admettre que le déplacement des particules est plus aisé dans certaines régions de l'espace que dans d'autres : ceci permet de modéliser, par exemple, la diffusion de la chaleur dans un matériau composé de plusieurs couches d'éléments possédant des conductivités thermique diverses. Formellement, ceci revient à considérer des particules admettant des trajectoires  $X_t$ , qui sont des processus continus, markovien, solutions de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt,$$

où  $\sigma(t, x)$  désigne, en chaque instant et point de l'espace, une matrice symétrique définie positive, relative à la conductivité de l'environnement. Celle-ci est choisie de manière à être l'unique matrice symétrique définie positive vérifiant  $\sigma^2(t, x) = \mathbf{a}(t, x)$ . Dans la suite, nous nous intéresserons à des hypothèses pour lesquelles la matrice  $\mathbf{a}(t, x)$  n'est pas régulière (constante sur des cellules de taille unitaire par exemple), ce qui ne permet pas, a priori, de garantir l'existence d'une solution à l'EDS précédente. Cela est en fait possible, comme l'énonce [21, Théorème 7.2.2], qui établit une correspondance entre forme de Dirichlet et diffusion. En supposant de plus que  $b(t, x) = \nabla \cdot \mathbf{a}(t, x)$ , c'est-à-dire, que pour tout  $1 \leq i \leq d$ , on a  $b_i(t, x) = \sum_{j=1}^d \partial_j \mathbf{a}_{i,j}(t, x)$ , conformément à l'intuition donnée dans la section 1.1.1, la formule d'Itô permet d'affirmer que la quantité de particules  $u(t, x)$  vérifie l'équation aux dérivées partielles parabolique

$$\partial_t u(t, x) = \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{a} \nabla u(t, x), \quad (1.1.12)$$

soumise à une condition initiale donnée et éventuellement une condition au bord si le système considéré en admet un.

## 1.2 Homogénéisation

Dans la section précédente nous avons vu comment l'équation de la chaleur pouvait provenir d'un système aléatoire. Nous avons également vu qu'un paramètre de cette équation était le coefficient de conductivité, que l'on a tout d'abord supposé constant. Les remarques 1 et 4 ainsi que le dernier paragraphe conduisent à la question suivante : qu'advient-il si l'on suppose à présent que celui-ci dépend de l'espace, du temps ? C'est ce que nous allons voir dans cette section.

Considérons un matériau très inhomogène : le polystyrène expansé par exemple, constitué du mélange d'un solide, bon conducteur thermique, et d'un gaz, isolant. Si l'on souhaite étudier la propagation de la chaleur au sein de ce matériau, afin de savoir si celui-ci hérite des propriétés de l'isolant qui le compose, ou plutôt du conducteur (question légitime si l'on souhaite construire un isolant thermique par ce procédé), il semble relativement naturel de considérer que celui-ci se comporte, à notre échelle, comme un matériau homogène dont la conductivité serait une moyenne entre celles du gaz et du solide qui le constituent. L'idée de cette simplification est d'admettre que l'alternance des bulles de gaz et de polystyrène s'opère à une échelle microscopique, si bien que le matériau se comporte, à notre échelle, comme s'il était homogène. L'enjeu de l'homogénéisation est de rendre licite cette approximation, en affirmant que lorsque la taille typique (ici la taille des bulles de gaz) est très petite, les solutions de (1.1.12), pour une valeur de  $\bar{\mathbf{a}}$  constante, sont

une bonne approximation des solutions obtenues en considérant la véritable conductivité  $\mathbf{a}$ . Les hypothèses qui sont faites sur la donnée des coefficients  $\mathbf{a}$  sont multiples, les deux principales étant

- $\mathbf{a}$  est *périodique*, i.e.  $\mathbf{a} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  admet une période dans chaque direction. Quitte à appliquer une transformation linéaire, on peut supposer que  $\mathbf{a}$  est invariant par translation de  $\mathbb{Z}^d$ . Dans ce cas,  $\mathbf{a}$  est déterminé par sa valeur sur un cube de taille unitaire, et (1.1.9) modélise une diffusion dans un environnement correspondant à un empilement de tels cubes. Pour reprendre l'exemple du polystyrène évoqué précédemment, ceci consiste à faire l'hypothèse que les bulles sont réparties de manière périodique.
- $\mathbf{a}$  est *aléatoire*, et vérifie une condition d'ergodicité. Une condition relativement naturelle est la suivante : la loi de  $\mathbf{a}$  est invariante par translation, et la donnée de  $\mathbf{a}$  sur un domaine  $U$  est indépendante de celle sur un domaine  $V$ , pourvu que  $U$  et  $V$  soit suffisamment éloignés l'un de l'autre. Cette dernière hypothèse peut être affaiblie, notamment en imposant que la corrélation entre les données de  $\mathbf{a}$  sur  $U$  et  $V$  décroissent avec la distance  $\text{dist}(U, V)$ .

Par ailleurs, il est commode de supposer qu'en tous points, la matrice  $\mathbf{a}$  vérifie une condition dite d'uniforme ellipticité. Dans la suite, nous donnons des exemples de problèmes d'homogénéisation. Nous commencerons par une équation différentielle ordinaire d'ordre 1, que nous étudierons d'abord avec l'hypothèse des coefficients périodiques, puis aléatoires. Nous étudierons ensuite le problème elliptique, tout d'abord en dimension 1, pour lequel une résolution explicite est possible, et nous observerons que le correcteur se comporte comme un pont brownien. Nous verrons ensuite ce problème en dimension supérieure, tout d'abord avec des coefficients aléatoires, puis nous évoquerons brièvement le cas des coefficients périodiques. Nous traiterons le cas du modèle elliptique, aléatoire et discret, que j'ai étudié à la fin de ma thèse. Enfin, dans une troisième sous-section, nous verrons l'équation parabolique, et énoncerons le résultat principal de cette thèse.

### 1.2.1 Homogénéisation d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1.

Pour commencer, donnons un exemple très simple : celui d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1. Nous traiterons cet exemple selon les deux modèles suggérés : le cas périodique et le cas aléatoire.

Dans un premier temps, supposons qu'une fonction  $\mathbf{a} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ , 1-périodique nous soit donnée. Considérons l'équation

$$\begin{cases} u'_\varepsilon(t) = \mathbf{a}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(t) \\ u_\varepsilon(0) = 1. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Cette équation admet une unique solution, qui est la fonction

$$\begin{aligned} u_\varepsilon : t &\mapsto \exp\left(\int_0^t \mathbf{a}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds\right) \\ &= \exp\left(\varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} \mathbf{a}(u) du\right), \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

où la deuxième ligne est obtenue en opérant un changement de variable linéaire dans la première. En raison de la périodicité de  $\mathbf{a}$ , l'intégrale présente dans cette formule se comporte asymptotiquement comme  $\bar{\mathbf{a}}t$ , où  $\bar{\mathbf{a}} = \int_0^1 \mathbf{a}(s) ds$ . Plus précisément,

$$\int_0^{t/\varepsilon} \mathbf{a}(u) du = \varepsilon \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor \int_0^1 \mathbf{a}(u) du + \varepsilon \int_{\lfloor x/\varepsilon \rfloor}^{x/\varepsilon} \mathbf{a}(u) du.$$

Il est alors naturel de définir

$$\bar{\mathbf{a}} := \int_0^1 \mathbf{a}(u) du,$$

on remarque alors que

$$\left| \int_0^{t/\varepsilon} \mathbf{a}(u) du - \bar{\mathbf{a}}x \right| \leq 2\varepsilon \|\mathbf{a}\|_\infty,$$

ce dont on peut conclure :

$$\frac{|u_\varepsilon(x) - u_{\text{hom}}(x)|}{e^{\bar{\mathbf{a}}x}} = 1 + O(\varepsilon),$$

où  $u_{\text{hom}}(x) = e^{\bar{\mathbf{a}}x}$  est la solution de l'équation homogénéisée

$$\begin{cases} u'_{\text{hom}}(t) = \bar{\mathbf{a}}u_{\text{hom}}(t) \\ u_{\text{hom}}(0) = 1. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

À présent, considérons toujours (1.2.1) dans laquelle on suppose la valeur de  $\mathbf{a}$  constante sur les intervalles de la forme  $[n; n+1]$ , égale à  $\mathbf{A}_n$ , où  $(\mathbf{A}_n)_{n \geq 0}$  est une suite de variables aléatoire i.i.d. et intégrables. Dans ce cas, d'après (1.2.2), on est ramené à étudier

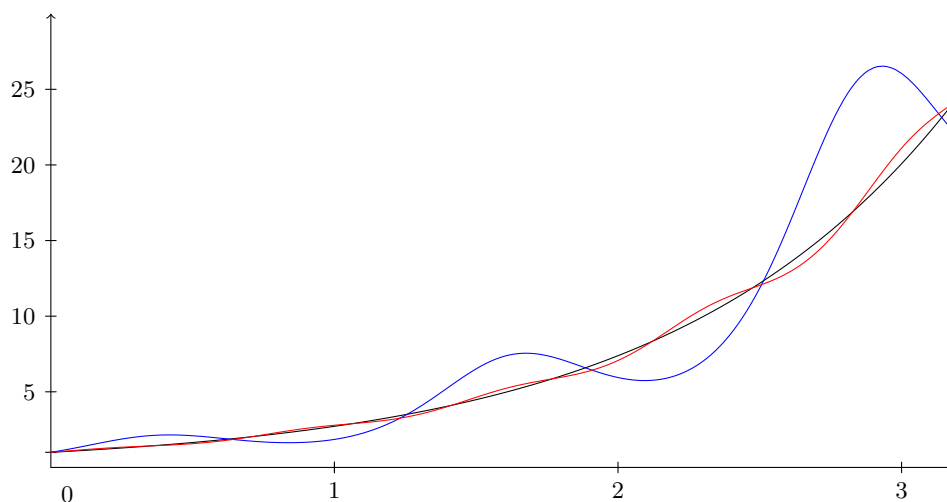
$$\varepsilon \sum_{k=1}^{\lfloor x/\varepsilon \rfloor} \mathbf{A}_{k-1} + \left( \frac{x}{\varepsilon} - \lfloor x/\varepsilon \rfloor \right) \mathbf{A}_{\lfloor x/\varepsilon \rfloor},$$

qui d'après la loi des grands nombres se comporte asymptotiquement comme  $\mathbb{E}[\mathbf{A}_1]x$ . Il est donc naturel d'introduire  $\bar{\mathbf{a}} = \mathbb{E}[\mathbf{A}_1]$ , puis de comparer à la solution obtenue en remplaçant  $\mathbf{a}(\cdot)$  par  $\bar{\mathbf{a}}$  dans (1.2.1). En effet, le théorème central limite permet d'estimer la différence réalisée entre la somme des  $\mathbf{A}_k$  et son approximation :

$$\left( \varepsilon \sum_{k=1}^{\lfloor x/\varepsilon \rfloor} \mathbf{A}_{k-1} \right) - \bar{\mathbf{a}} \sim \sqrt{\varepsilon} X,$$

où  $X$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance  $\text{Var}(\mathbf{A}_1)$ . De manière heuristique, on peut donc dire que la différence relative entre la solution du problème (1.2.1) pour la fonction  $\mathbf{a}(\cdot)$  et celle de l'équation homogénéisée — i.e. pour la constante  $\bar{\mathbf{a}}$  — est de l'ordre de  $\sqrt{\varepsilon}$ .

**Remarque 11** (Comparaison entre la solution réelle et la solution du problème homogénéisé). Ces deux équations permettent de modéliser une dynamique de population dans laquelle au temps  $t$ , chaque individu se multiplie à taux  $\mathbf{a}(t)$ . Dans le cas périodique, (1.2.1) permet ainsi de modéliser la dynamique d'une population dont le taux de reproduction admet une période. En imaginant qu'une population de bactéries se multiplie à un taux dépendant de la température et en supposant que cette dernière admet une périodicité d'un jour, on en conclut que le remplacement d'un taux  $\mathbf{a}$  dépendant du temps par sa moyenne sur une période ne modifie le résultat qu'à l'ordre  $\varepsilon$ , une fois divisé par la valeur de la fonction. Il est donc légitime, pour modéliser la dynamique de la population à l'échelle d'un mois par exemple, d'opérer cette simplification. Dans le cas où  $\mathbf{a}$  est aléatoire, le rapport entre les solutions de (1.2.1) et (1.2.3) est d'après le théorème central limite de l'ordre de  $\sqrt{\varepsilon}$ . La simplification est donc toujours valable mais moins précise.

FIGURE 1.2-1 –  $u_{\text{hom}}$  et  $u_\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 1/4$  et  $\varepsilon = 1/40$ .

**Remarque 12** (Non convergence de la dérivée). La convergence qui a été esquissée précédemment n'est a priori valable que ponctuellement : on a fixé un réel  $x$  et étudié le comportement de  $u_\varepsilon(x)$ . En réalité, dans le cas périodique, l'estimé de l'erreur sur tout intervalle borné ne dépend pas du point auquel on se place, on en déduit donc que la convergence de  $u^\varepsilon$  vers  $\bar{u}$  a lieu en norme  $L^\infty$  localement. En terme de norme de Sobolev, on ne peut pas espérer de convergence dans  $W^{1,p}$  : en effet, la première égalité de (1.2.1) et le fait que  $u_\varepsilon$  soit comparable à  $\bar{u}(x)$  sur l'intervalle  $[x, x + \varepsilon]$  nous donne :  $u'_\varepsilon = \mathbf{a}(z/\varepsilon)\bar{u}(x)$  sur une période de la fonction  $\mathbf{a}(\cdot/\varepsilon)$ , ainsi, tandis que la dérivée de la solution homogénéisée se comportera comme une constante, celle de  $u_\varepsilon$  admettra une « quasi-période »  $\varepsilon$  (phénomène observable pour  $\varepsilon \ll 1$ ). Ceci est illustré pour la fonction  $\mathbf{a}(x) = 1 + 2\cos(x)$ , qui oscille entre les valeurs  $-1$  et  $3$ , avec une moyenne  $\bar{\mathbf{a}} = 1$ . La figure 1.2-1 représente les solutions de (1.2.1) pour  $\varepsilon = 1/4$  (en bleu) et  $\varepsilon = 1/40$  (en rouge), ainsi que la solution homogénéisée (en noir).

### 1.2.2 Homogénéisation de problèmes elliptiques.

Avant de s'intéresser aux solutions de l'équation parabolique, on peut étudier ses solutions stationnaires, i.e. celles constantes en temps, que l'on peut imaginer comme l'état d'un système après l'attente d'un temps très long. Formellement, pour un domaine  $U$  de l'espace  $\mathbb{R}^d$ , donnons-nous une condition au bord  $g$  et étudions le problème :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{a} \nabla u(x) = 0 & \text{pour tout } x \in U \\ u = g & \text{sur } \partial U. \end{cases}$$

Nous sommes intéressés par le comportement à grande échelle de ces solutions. Pour cela, on peut alternativement étudier les solutions du problème sur un domaine  $RU$ , pour  $R \gg 1$  donné

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{a} \nabla u_R(x) = 0 & \text{pour tout } x \in RU \\ u_R(x) = Rg\left(\frac{x}{R}\right) & \text{pour tout } x \in \partial(RU), \end{cases}$$

puis considérer la fonction définie sur le domaine initial en opérant une contraction :  $\tilde{u}_R(x) = \frac{1}{R}u_R\left(\frac{x}{R}\right)$ , ou directement, pour  $\varepsilon \ll 1$  fixé, supposer que l'échelle à laquelle  $\mathbf{a}$  varie est de l'ordre de  $\varepsilon$ , plus formellement, on s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{a}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^\varepsilon(x) = 0 & \text{pour tout } x \in U \\ u^\varepsilon(x) = g(x) & \text{pour tout } x \in \partial U. \end{cases}$$

Pour le choix de  $\varepsilon = 1/R$ , ces deux façons de considérer le problème aboutissent aux mêmes solutions. Afin de fixer les conventions, nous choisirons la deuxième possibilité. Nous considérons dans un premier temps le problème elliptique en dimension 1, pour laquelle une résolution explicite est possible. Nous évoquerons ensuite le cas de la dimension supérieure, puis du modèle avec coefficients périodiques.

### Problème elliptique en dimension 1

Considérons à présent le problème elliptique, avec condition au bord sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On suppose  $\mathbf{a}$  de période 1, de classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ , et on s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} (\mathbf{a}(x/\varepsilon)u'_\varepsilon)' = 0 \\ u_\varepsilon(0) = 0 \\ u_\varepsilon(1) = 1. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

En remarquant que  $\mathbf{a}(x/\varepsilon)u'_\varepsilon$  est de dérivée nulle, donc constante, et en supposant que  $\mathbf{a}$  ne s'annule pas (dans la suite, on supposera qu'il existe deux constantes  $C_1 > C_0 > 0$  telles que  $C_0 \leq \mathbf{a}(t, x) \leq C_1$ , condition dite d'uniforme ellipticité) on observe que

$$u'_\varepsilon(x) = \frac{C}{\mathbf{a}(x/\varepsilon)},$$

où  $C$  est une constante que l'on peut déterminer en intégrant entre 0 et 1 et en utilisant les conditions aux bords fournies par (1.2.4) :

$$C = \frac{1}{\int_0^1 \frac{dx}{\mathbf{a}(x/\varepsilon)}}.$$

On obtient dans ce cas une formulation explicite de la solution  $u_\varepsilon$  :

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\int_0^x \mathbf{a}^{-1}(t/\varepsilon) dt}{\int_0^1 \mathbf{a}^{-1}(t/\varepsilon) dt} = \frac{\int_0^{x/\varepsilon} \mathbf{a}^{-1}(u) du}{\int_0^{1/\varepsilon} \mathbf{a}^{-1}(u) du},$$

en effectuant le changement de variable linéaire  $u = t/\varepsilon$  dans les deux intégrales. À présent, on peut exprimer ces intégrales comme des sommes de variables aléatoires  $X_k := \int_k^{k+1} \mathbf{a}^{-1}(u) du$ . D'après la condition d'uniforme ellipticité imposée,  $X_k$  est bornée, donc de carré intégrable. En admettant que ces variables aléatoires sont indépendantes (ce qui n'est éventuellement pas le cas, car  $X_k$  dépend a priori de  $X_{k-1}$  et  $X_{k+1}$ , mais ce problème peut être contourner en séparant en deux sommes, celle des termes pairs et celle des termes impairs), la loi des grands nombres et le théorème central limite permettent d'affirmer qu'il existe  $(B_t)_{t \geq 0}$  tels que

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\frac{x}{\varepsilon}m + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}}B_x + \mathcal{O}(\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon}m + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}}B_1 + \mathcal{O}(\varepsilon)},$$

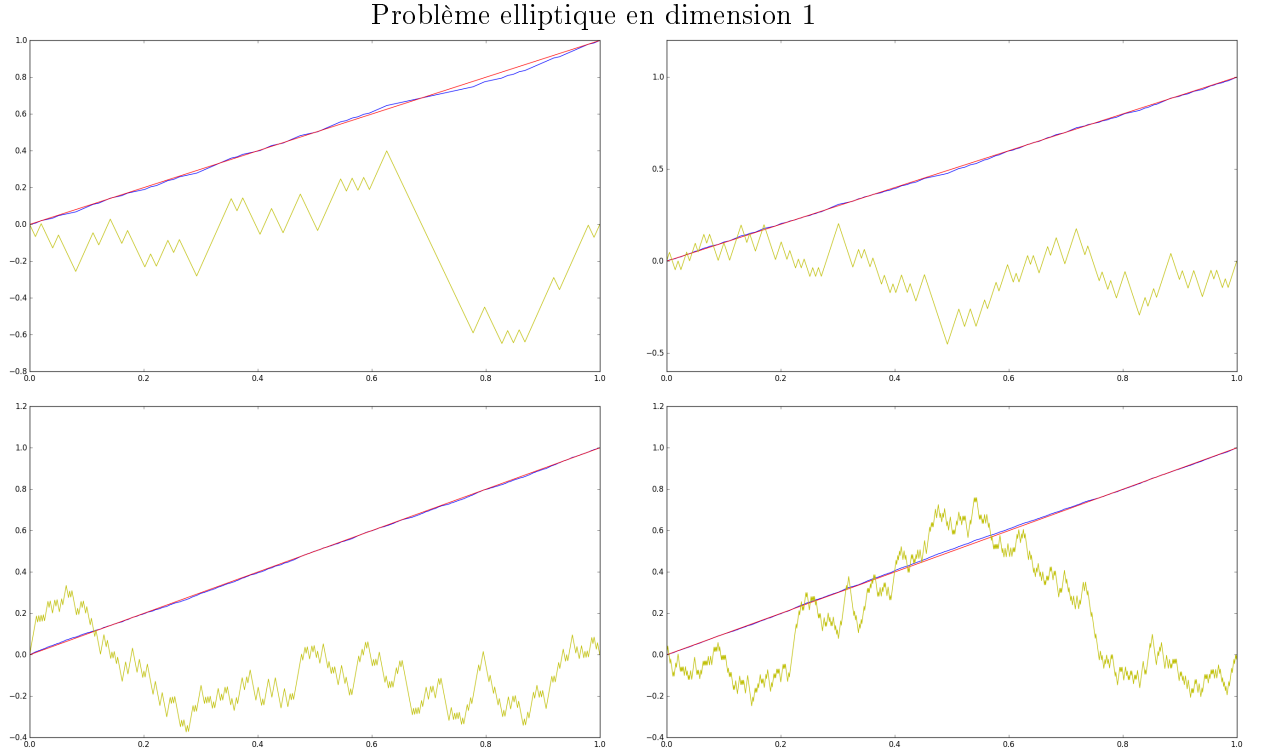


FIGURE 1.2-2 –  $u_\varepsilon$ ,  $u_{\text{hom}}$  et  $\frac{u_\varepsilon - u_{\text{hom}}}{\sqrt{\varepsilon}}$  pour  $\varepsilon^{-1} = 100, 200, 500$  et  $1000$ .

où  $m = \mathbb{E}(X_0)$  et  $\sigma^2 = \text{Var}(X_0)$ . On obtient finalement

$$u_\varepsilon(x) = x + \frac{\sigma}{m} \sqrt{\varepsilon} (B_x - xB_1) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

La solution est donc approximativement la fonction affine, solution du problème homogénéisé, à laquelle est ajouté un multiple de  $(B_x - xB_1)_{x \in [0,1]}$ , qui au point  $x$  suit la loi d'un pont brownien. Il y a en fait convergence du processus vers le pont brownien. Ceci est illustré par la figure 1.2-2. [9] démontre ce résultat, pour des hypothèses plus générales que des coefficients i.i.d.

### Problème elliptique en dimension supérieure

En dimension supérieure, il n'y a plus de formule explicite permettant d'exprimer la solution. On peut toutefois exprimer  $u^\varepsilon$  de la manière suivante :

$$u^\varepsilon(x) = \mathbb{E}_x^{\mathbf{a}^\varepsilon} [g(X_\tau)],$$

où, sous la loi  $\mathbf{P}^{\mathbf{a}^\varepsilon}$ ,  $(X_t)_{t \geq 0}$  est le processus de générateur infinitésimal  $\nabla \cdot (\mathbf{a}(\frac{\cdot}{\varepsilon}) \nabla)$  et  $\tau$  est le premier instant auquel ce processus atteint le bord du domaine  $U$ . L'enjeu de l'homogénéisation est de comparer la fonction  $u^\varepsilon$  à  $\bar{u}$ , solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla \bar{u}(x) = 0 \text{ pour tout } x \in U \\ \bar{u}(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \partial U, \end{cases}$$

qui vérifie l'égalité

$$\bar{u}(x) = \mathbb{E}_x^{\bar{\mathbf{a}}} [g(X_\tau)],$$

en supposant que sous la loi  $\mathbf{P}^{\bar{\mathbf{a}}}$ ,  $X$  admette le générateur infinitésimal  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla$ . Un résultat de convergence, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, de la quantité  $u^\varepsilon(x)$  vers  $\bar{u}(x)$  peut ainsi être considéré comme une convergence en loi de  $X_\tau^{x, \mathbf{a}^\varepsilon}$  vers  $X_\tau^{x, \bar{\mathbf{a}}}$ . L'homogénéisation qualitative consiste à prouver la convergence presque sûre de  $\|u^\varepsilon - \bar{u}\|$  vers 0. Un tel résultat peut être obtenu à partir de théorèmes ergodiques, qui ne fournissent pas de vitesse de convergence.

De la même manière que la loi des grands nombres, un résultat qualitatif fournit donc une convergence de la solution pour les coefficients contractés à l'échelle  $\varepsilon$  vers la solution homogénéisée, mais ne permet pas d'obtenir d'information sur la fluctuation autour de cette limite. Comme l'illustre le cas de la dimension 1, pour lequel la fluctuation est de l'ordre de  $\sqrt{\varepsilon}$ , on peut s'attendre à ce qu'en dimension supérieure, il existe  $\alpha > 0$  et une fonction (voire distribution) aléatoire  $\Psi$  tels que

$$\frac{u^\varepsilon - \bar{u}}{\varepsilon^\alpha} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{loi}} \Psi.$$

En dimension 1, l'exposant à choisir, afin que la fonction limite ne soit ni 0 ni  $+\infty$  est  $\alpha = 1/2$  et la fonction  $\Psi$  est le pont brownien. En dimension supérieure, [4, Théorème 5.24], énonce un résultat de ce type : en considérant le gradient plutôt que les fonctions  $u^\varepsilon$  et  $\bar{u}$ , le choix de  $\alpha = d/2$  conduit à une convergence d'un objet appelé « gradient du champ libre gaussien ». Le champ libre gaussien peut être vu comme un analogue multidimensionnel du pont brownien, et, comme ce dernier, apparaît dans des contextes très variés. Dans l'optique de démontrer un tel résultat, la première étape consiste à déterminer la vitesse de convergence de  $u^\varepsilon$  vers  $\bar{u}$ , en l'occurrence,  $\varepsilon^{d/2}$ .

### Problème elliptique en dimension $d$ , cas périodique

Supposons  $\mathbf{a}$  périodique, de période unitaire dans chacune des directions, i.e.  $\mathbf{a}(x+z) = \mathbf{a}(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et tout  $z \in \mathbb{Z}^d$ . Considérons le problème sur le cube  $[-N, N]^d$  suivant

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{a}(\nabla u)) = 0 & \text{sur } [-N, N]^d \\ u(x) = p \cdot x & \text{sur } \partial[-N, N]^d. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Dans la suite, on notera  $\ell_p := x \mapsto p \cdot x$  la fonction affine qui intervient dans l'équation précédente. On définit le tore  $\mathbb{T} := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ . Étant donné que  $\mathbf{a}$  est périodique, nous pouvons sans ambiguïté la considérer comme une fonction de  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ . En notant  $\phi$  l'unique solution de moyenne nulle du problème sur le tore

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{a}(p + \nabla \phi)) = 0 \\ \phi \in H^1(\mathbb{T}), \end{cases}$$

puis en définissant la fonction  $v : x \mapsto p \cdot x + \phi \circ \pi(x)$ , où  $\pi$  est l'application qui à un élément de  $\mathbb{R}^d$  associe ses parties entières, on observe que la différence  $w := u - v$  est solution de

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla w) = 0 & \text{pour tout } x \in [-N, N]^d \\ w = \phi \circ \pi(x) & \text{sur } \partial[-N, N]^d. \end{cases}$$

La différence est donc  $\mathbf{a}$ -harmonique, le principe du maximum permet d'affirmer que son maximum est atteint sur le bord du domaine, et n'excède donc pas une constante (donnée par  $\|\phi\|_{L^\infty}$ ). On conclut alors que

$$\|u - \ell_p\| \leq C,$$

ce qui fournit une borne indépendante de la taille du domaine considéré. Pour de grandes valeurs de  $N$ , les solutions de (1.2.5) avec condition au bord  $p \cdot x$  sont donc la fonction affine  $p \cdot x$  à laquelle est additionné un terme correctif qui n'excède pas une constante.

### 1.2.3 Homogénéisation pour l'équation parabolique

Dans cette sous-section, nous énonçons le résultat principal de cette thèse, qui est démontré dans le chapitre 2. Nous considérons l'équation

$$\partial_t u(t, x) = \nabla \cdot \mathbf{a}(t, x) \nabla u(t, x).$$

On suppose que le champ  $\mathbf{a}$  vérifie les conditions suivantes :

- *Uniforme ellipticité.* On suppose qu'il existe  $\Lambda > 1$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d$ , et tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$  on a

$$\Lambda^{-1} |\xi|^2 \leq \xi \cdot \mathbf{a}(t, x) \xi \leq \Lambda |\xi|^2.$$

- *Stationnaire.* On suppose que la loi de  $\mathbf{a}$  est invariante par translation à coordonnées entières : en notant  $\tau_{t_0, x_0} \mathbf{a} := (t, x) \mapsto \mathbf{a}(t_0 + t, x_0 + x)$ , les lois de  $\tau_z \mathbf{a}$  et  $\mathbf{a}$  sont identiques, pour tout  $z \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$ .
- *Indépendance à longue distance.* Pour deux domaines  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ , dès lors que  $\text{dist}(U, V) \geq 1$ , en notant respectivement  $\mathcal{F}_U$  et  $\mathcal{F}_V$  les tribus contenant l'information révélée par l'observation du champ  $\mathbf{a}$  dans les domaines respectifs, on a

$$\mathcal{F}_U \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_V.$$

**Exemple 1.** 1. *Échiquier.* En fixant  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$  deux matrices vérifiant la condition d'uniforme ellipticité (par exemple, deux multiples de l'identité), et un paramètre  $p \in (0, 1)$ , on se donne  $(X_{t,x})_{(t,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d} \sim \mathcal{B}(p)^{\otimes (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d)}$ , le champ  $\mathbf{a}$  obtenu comme suit

$$\mathbf{a}(t, x) = \mathbf{a}_{X_{[t], [x]}},$$

constant sur des cellules de taille unitaire, satisfait les conditions imposées.

- 2. *Bulles disposées de manière aléatoire.* En fixant  $\phi : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$  à support compact et en considérant un nuage de Poisson sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  d'intensité constante  $\Pi$ , en définissant

$$\mathbf{a}(t, x) = \begin{cases} \left( \sum_{z \in \Pi} \phi(z + (t, x)) \right) Id & \text{si } 1 \leq \sum_{z \in \Pi} \phi(z + (t, x)) \leq 2 \\ Id & \text{si } \sum_{z \in \Pi} \phi(z + (t, x)) \leq 1 \\ 2Id & \text{si } 2 \leq \sum_{z \in \Pi} \phi(z + (t, x)), \end{cases}$$

on obtient un champ uniformément elliptique en tout point, de loi invariante par translation (et même non-nécessairement entières), et indépendante à longue distance (déterminée par le support de  $\phi$ ).

On remarque que ce modèle ne fournit que des matrices scalaires, mais ceci dans un but de garantir plus simplement l'uniforme ellipticité, on pourrait éventuellement considérer  $\phi$  à valeurs matricielles. On peut également généraliser en considérant plusieurs fonctions  $\phi_1, \dots, \phi_k$  et superposer les champs obtenus avec  $k$  nuages de Poisson indépendants.



Étant donné un champ  $(\mathbf{a}(t, x))_{(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1}}$ , un intervalle  $I = [0, T]$  et un domaine  $U$  de  $\mathbb{R}^d$  (on notera  $V = I \times U$  et  $\partial_{\square} V = \{0\} \times U \cup I \times \partial U$  le bord parabolique de  $V$ ), et  $0 < \varepsilon \ll 1$ , on s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles parabolique suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon(t, x) - \nabla \cdot \left( \mathbf{a} \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u^\varepsilon(t, x) \right) = 0 & \text{dans } V, \\ u^\varepsilon = f & \text{sur } \partial_{\square} V. \end{cases}$$

Intuitivement, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, on imagine que la solution de cette équation converge vers une limite  $u_{\text{hom}}$ , solution du problème homogénéisé, pour le coefficient de conductivité moyenné  $\bar{\mathbf{a}}$ , formellement

$$\begin{cases} \partial_t u_{\text{hom}} - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{a}} \nabla u_{\text{hom}}) = 0 & \text{dans } V, \\ u_{\text{hom}} = f & \text{sur } \partial_{\square} V. \end{cases}$$

Sans préciser quelle norme est utilisée, l'enjeu de l'homogénéisation est de démontrer que

$$\|u^\varepsilon - u_{\text{hom}}\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ presque sûrement.}$$

Ceci correspond à un résultat d'homogénéisation qualitative, qui peut être obtenu à partir d'une variante du théorème ergodique. Cependant, un tel résultat ne précise pas à quelle vitesse a lieu cette convergence. Plus précisément, on peut s'intéresser à quantifier la vitesse de convergence de  $u^\varepsilon$  vers  $u_{\text{hom}}$ . Étant donné que les coefficients sont aléatoires, il n'est pas exclu qu'avec une infime probabilité,  $u^\varepsilon$  soit anormalement plus éloignée de  $u_{\text{hom}}$  que ce qu'on peut attendre dans un cadre générique. C'est pourquoi on souhaite une estimée de la forme suivante :

$$\|u^\varepsilon - u_{\text{hom}}\| \leq \alpha_1(\varepsilon) + \alpha_2(\varepsilon)\mathcal{X},$$

avec  $\alpha_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et où la variable aléatoire  $\mathcal{X}$  est « d'ordre raisonnable », ce que l'on décrira plus précisément dans le théorème ci-après. En prenant pour modèle l'échiquier aléatoire décrit dans l'exemple 1, avec le paramètre  $p = 1/2$ , sur un domaine cubique de la forme  $[0, n^2] \times [-n, n]^d$ , il n'est pas exclu que deux événements extrêmement opposés surviennent. Il s'agit, d'une part de l'événement où le tirage des lois de Bernoulli donne  $(n^2 + 1)(2n + 1)^d$  fois la valeur 0, et d'autre part de l'événement où ce tirage donne  $(n^2 + 1)(2n + 1)^d$  fois la valeur 1. Dans ces deux cas, les solutions des problèmes paraboliques auront des comportements très différents, et il n'est donc pas possible de se passer du terme aléatoire  $\alpha_2(\varepsilon)\mathcal{X}$  dans l'équation précédente. Heureusement, ces deux événements extrêmes ne surviennent qu'avec une probabilité valant  $2^{-(n^2+1)(2n+1)^d}$  chacun, ce qui fournit une borne théorique minimale pour les choix de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . L'un des résultats principaux obtenu dans cette thèse est le théorème d'homogénéisation quantitative suivant.

**Théorème 1.1.** *Fixons  $s \in (0, 2 + d)$ ,  $U \subseteq B_1$  un domaine borné,  $I := (I_-, 0) \subseteq (-\frac{1}{4}, 0)$  un intervalle et  $\delta > 0$  un exposant. On définit  $V := I \times U$ . Alors il existe un exposant  $\beta(\delta, V, d, \Lambda) > 0$ , une constante  $C(s, V, \delta, d, \Lambda) < \infty$  et une variable aléatoire  $\mathcal{X}$  vérifiant*

$$\mathcal{X} = \mathcal{O}_1(C) \text{ i.e. } \mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{\mathcal{X}}{C} \right) \right] \leq 2,$$

telle que, pour tout  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$  et toute condition au bord  $f \in W_{\text{par}}^{1, 2+\delta}(V)$ , en notant

$$\mathbf{a}^\varepsilon(t, x) := \mathbf{a} \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon} \right)$$

et en définissant  $u^\varepsilon, u \in f + H_{\text{par}, \sqcup}^1(V)$  les solutions des problèmes suivants

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nabla \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{dans } V, \\ u^\varepsilon = f & \text{sur } \partial_\sqcup V, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{a}} \nabla u) = 0 & \text{dans } V, \\ u = f & \text{sur } \partial_\sqcup V, \end{cases} \quad (1.2.6)$$

on ait l'estimée

$$\begin{aligned} \|\nabla u^\varepsilon - \nabla u\|_{H_{\text{par}}^{-1}(V)} + \|\mathbf{a}^\varepsilon \nabla u^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}} \nabla u\|_{H_{\text{par}}^{-1}(V)} + \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(V)} \\ \leq C \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(V)} \left( \varepsilon^{\beta(2+d-s)} + \mathcal{X} \varepsilon^s \right). \end{aligned}$$

où les normes  $H_{\text{par}}^{-1}(V)$  et  $W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(V)$  sont définies dans le chapitre 2 par (2.1.15) et (2.1.14) respectivement.

**Remarque 13** (Convergence de processus stochastiques). On peut remarquer, en adaptant (1.1.6), que pour un processus  $X^\varepsilon$  ayant, sous la loi  $\mathbf{P}_x^{\mathbf{a}}$  le générateur infinitésimal

$$\mathcal{L}^\varepsilon(u) = \nabla \cdot \mathbf{a}^\varepsilon \nabla u,$$

et tel que  $\mathbf{P}_x^{\mathbf{a}}[X^\varepsilon(0) = x] = 1$ , en notant  $\tau_U^\varepsilon$  le premier instant auquel  $X^\varepsilon$  atteint la frontière du domaine  $U$ , on a

$$u^\varepsilon(t, x) = \mathbb{E}_x^{\mathbf{a}} \left[ f(t - t \wedge \tau_U^\varepsilon, X_{t \wedge \tau_U^\varepsilon}^\varepsilon) \right].$$

En notant  $\bar{X}$  le processus ayant, sous la loi  $\mathbf{P}_x^{\bar{\mathbf{a}}}$  le générateur infinitésimal

$$\bar{\mathcal{L}}(u) = \nabla \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla u,$$

et tel que  $\mathbf{P}_x^{\bar{\mathbf{a}}}[\bar{X}(0) = x] = 1$ , en notant  $\bar{\tau}_U$  le premier instant auquel  $\bar{X}$  atteint la frontière du domaine  $U$ , on a également

$$\bar{u}(t, x) = \mathbb{E}_x^{\bar{\mathbf{a}}} \left[ f(t - t \wedge \bar{\tau}_U, \bar{X}_{t \wedge \bar{\tau}_U}) \right].$$

En fixant  $I$  et  $U$ , un résultat de convergence pour toute fonction  $f$  peut donc être interprété comme une convergence en loi du processus  $X_{t \wedge \tau_U^\varepsilon}^\varepsilon$  vers le processus  $\bar{X}_{t \wedge \bar{\tau}_U}$ . Ceci étant valable pour tout intervalle  $I$  et tout domaine  $U$ , on peut alors l'interpréter comme une convergence en loi du processus  $(X_t^\varepsilon)_{t>0}$  vers le processus  $(\bar{X}_t)_{t>0}$ .

**Remarque 14** (État de l'art). Bien qu'il n'y ait pas, à notre connaissance, de références de résultats qualitatifs pour le modèle des coefficients aléatoires, un tel résultat peut être obtenu à partir des preuves utilisées pour le modèle elliptique dans [36, 11, 33]). Il est également possible d'étudier les mêmes quantités que dans le chapitre 2 et d'utiliser le théorème ergodique sous-additif [2] afin d'obtenir la convergence de ces quantités sans avoir à prouver de résultat quantitatif (dans ce cas, les deux inégalités fonctionnelles ne sont pas nécessaires à l'obtention du résultat qualitatif notamment).

Un résultat d'homogénéisation qualitative pour le problème parabolique est démontré dans [11, Remarque 10.12], qui traite le cas de coefficients réguliers et périodiques.

Récemment, des résultats quantitatifs ont été prouvés pour le problème elliptique avec coefficients aléatoires, tout d'abord par Gloria et Otto dans [28, 29] (sur le graphe  $\mathbb{Z}^d$ ), qui fournissent des bornes optimales pour l'erreur d'homogénéisation (i.e. l'ordre de grandeur de la borne est

$\epsilon^{d/2}$ ) mais l'intégrabilité stochastique de l'estimée d'erreur n'est pas optimale (admet des moments polynomiaux mais non exponentiels) en utilisant une inégalité de trou spectral.

Dans le chapitre 2, on exploite les idées introduites dans [8, 7, 5, 6] et dans le livre [4] afin d'obtenir de telles bornes pour le modèle parabolique avec coefficients dépendants du temps. Le problème parabolique avec coefficients aléatoires ne dépendants pas du temps a été traité dans [4, Chapitre 8].

## 1.3 Marches aléatoires en conductances aléatoires

### 1.3.1 Description du modèle et questions principales

On considère dans cette sous-section les marches aléatoires en milieu aléatoire sur le graphe  $\mathbb{Z}^d$ , au plus proche voisin. Pour chaque arête  $(x, x+e)$ , on tire de façon i.i.d un réel  $\mathbf{a}(x, x+e) > 0$ . On considère le processus de Markov à temps continu, qui saute de  $x$  à  $x+e$  à taux  $\mathbf{a}(x, x+e)$ . On note  $\mathbf{P}$  la mesure image de  $\mathbf{a}$ , et  $\mathbb{E}$  l'espérance associée. Dans la suite, on considérera que les conductances sont indépendantes et identiquement distribuées, c'est-à-dire que  $\mathbf{P} \sim \nu^{\otimes \mathcal{E}^d}$  où  $\nu$  désigne la loi de la conductance d'une arête donnée. On définit ensuite deux lois

— *La loi quenched.* Étant donné un environnement  $\mathbf{a}$ , pour tout site  $x \in \mathbb{Z}^d$ , on note

$\mathbf{P}_x^{\mathbf{a}}$  la loi de la chaîne de Markov partant de  $x$  et de transition  $\mathbf{a}(x, y)$ .

— *La loi annealed.* On note  $\mathbf{P}_x^0$ , appelée loi **annealed** (ou *moyennée*), la loi vérifiant, pour tout entier  $n$  tout points  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^d$  et tout instants  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , l'égalité

$$\mathbf{P}_x^0 [X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n] = \mathbb{E} [\mathbf{P}_x^{\mathbf{a}} (X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n)].$$

L'avantage de la loi quenched est que  $(X_t)_{t>0}$  est un processus de Markov. Celui de la loi annealed est qu'en supposant  $\mathbf{P} \sim \nu^{\otimes \mathcal{E}^d}$ , la loi du processus  $(X_t)_{t>0}$  est invariante par translation.

Étant donné un environnement  $\mathbf{a}$ , la chaîne de Markov sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$  admet pour mesure invariante la mesure

$$\pi_{\mathbf{a}}(x) = \sum_{y \sim x} \mathbf{a}(x, y).$$

De plus, cette mesure est réversible : en effet, pour tout couple  $x \sim y$

$$\pi_{\mathbf{a}}(x)p(x, y, \mathbf{a}) = \mathbf{a}(x, y) = \mathbf{a}(y, x) = \pi_{\mathbf{a}}(y)p(y, x, \mathbf{a}).$$

De ce fait, on déduit notamment que  $\mathbf{P}_x^{\mathbf{a}}(X(t) = y) = \mathbf{P}_y^{\mathbf{a}}(X(t) = x)$  pour tout couple de points  $x$  et  $y$ .

Pour débiter, nous pouvons nous demander si ce modèle admet une loi des grands nombres. Autrement dit, existe-t-il  $v \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$\frac{X_t}{t} \rightarrow v \in \mathbb{R}^d \text{ p.s. ?}$$

Et si oui, pour quelle loi ? On peut d'ores et déjà remarquer qu'avec un modèle qui admet des symétries, comme le cas  $\mathbf{P} \sim \nu^{\otimes \mathcal{E}^d}$ , si une telle vitesse limite existe, on a nécessairement  $v = 0$ . Cette convergence a en fait lieu presque sûrement pour les lois quenched et annealed. Ensuite, nous nous posons les questions suivantes :

**Question 1** (Temps de sortie d'un compact. ). Étant donné un domaine  $\Lambda$ , en introduisant  $\tau_\Lambda = \inf\{t > 0, X_t \notin \mathring{\Lambda}\}$ , comment se comportent  $\tau_\Lambda$  et  $X_{\tau_\Lambda}$ ? Le comportement de ces deux variables aléatoires est-il similaire à ceux qui sont obtenus pour des marches aléatoires dans un environnement déterministe lorsque  $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ , et à quelle vitesse cette convergence a-t-elle lieu? On peut dores et déjà constater qu'en vertu de la remarque 1, la fonction qui à  $x \in \Lambda$  associe  $\mathbf{P}_x^{\mathbf{a}}[X_{\tau_\Lambda} = y]$  est l'unique solution du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \sum_{z \sim x} \mathbf{a}(x, z) (u(z) - u(x)) = 0 & \text{pour tout } x \in \Lambda \\ u(z) = \delta_y(z) & \text{pour tout } z \in \partial\Lambda. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

On s'aperçoit alors qu'en considérant une suite de domaines de la forme  $\mathcal{B}(0, n)$ , la probabilité que le premier sommet de  $\mathcal{S}(0, n)$  visité par la marche aléatoire soit situé entre les angles  $\alpha$  et  $\beta$  s'interprète comme la solution d'un problème semblable à (1.3.1) dont le comportement asymptotique est un résultat sur l'homogénéisation de cette équation, ce qu'illustre la figure 1.3-3.

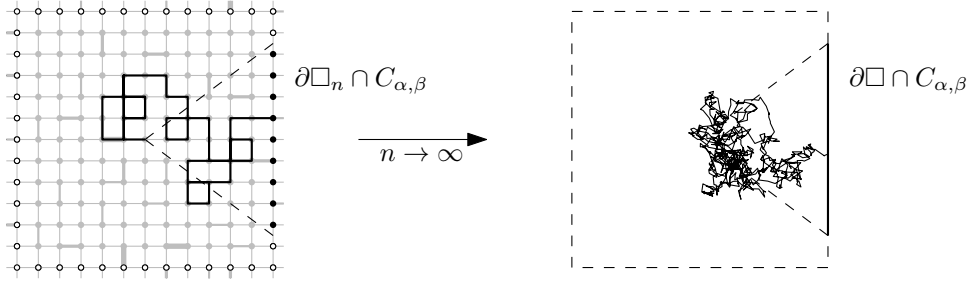


FIGURE 1.3-3 – Probabilité que le point de sortie de  $\square_n$  se situe entre les angles  $\alpha$  et  $\beta$ .

D'autre part, l'espérance de ce temps de sortie est également solution d'une EDP elliptique, en effet le temps d'atteinte de  $\partial\Lambda$  partant d'un sommet  $x$  est égal au temps d'attente en 0, qui suit une loi exponentielle de paramètre  $1/\pi_{\mathbf{a}}(x)$ , donc admet une espérance  $\pi_{\mathbf{a}}(x)$ , additionné au temps nécessaire pour atteindre  $\partial\Lambda$  depuis le premier sommet visité après  $x$ . Or ce sommet est l'un des  $2d$  voisins de  $x$ , avec une probabilité  $\mathbf{a}(x, y)/\pi_{\mathbf{a}}(x)$ . En utilisant la propriété de Markov, on obtient finalement

$$\begin{cases} \sum_{y \sim x} \mathbf{a}(x, y) (\mathbb{E}_y^{\mathbf{a}}[\tau_\Lambda] - \mathbb{E}_x^{\mathbf{a}}[\tau_\Lambda]) = -1 & \text{si } x \in \mathring{\Lambda} \\ \mathbb{E}_z^{\mathbf{a}}[\tau_\Lambda] = 0 & \text{si } z \in \partial\Lambda. \end{cases}$$

Enfin, en définissant la fonction de Green  $G_{\mathbf{a}}^\Lambda$  de la sorte :

$$G_{\mathbf{a}}^\Lambda(x, y) = \mathbb{E}_x^{\mathbf{a}} \left[ \int_0^{\tau_\Lambda} \mathbb{1}_{X_t=y} dt \right],$$

on obtient une expression qui lie cette fonction aux probabilités  $\mathbf{P}_x^{\mathbf{a}}[\tau_{\{y\}} \leq \tau_\Lambda]$  et  $\mathbf{P}_y^{\mathbf{a}}[\tau_{\{y\}} \leq \tau_\Lambda]$ . En effet,

$$G_{\mathbf{a}}^\Lambda(x, y) = \frac{\mathbf{P}_x^{\mathbf{a}}[\tau_{\{y\}} \leq \tau_\Lambda]}{1 - \mathbf{P}_y^{\mathbf{a}}[\tau_{\{y\}} \leq \tau_\Lambda]}.$$

Par ailleurs, pour un sommet  $z_0 \in \mathring{\Lambda}$  fixé, la fonction  $G^\Lambda$  est solution du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} \sum_{y \in \Lambda, x \sim y} \mathbf{a}(x, y) (G_{\mathbf{a}}^\Lambda(x, z_0) - G_{\mathbf{a}}^\Lambda(y, z_0)) = \delta_{z_0}(x) & \text{pour tout } x \in \mathring{\Lambda} \\ G_{\mathbf{a}}^\Lambda(y, z_0) = 0 & \text{pour tout } y \in \partial\Lambda. \end{cases}$$

Autrement dit, la fonction  $\tilde{G}_{\mathbf{a}, z_0}^\Lambda := x \mapsto G_{\mathbf{a}}^\Lambda(x, z_0)$  est l'unique solution de l'équation  $\nabla \cdot \mathbf{a} \nabla \tilde{G}_{\mathbf{a}, z_0}^\Lambda = \delta_{z_0}$ , qui s'annule sur le bord de  $\Lambda$ .

**Question 2** (Principe d'invariance.). Existe-t-il  $v \in \mathbb{R}^d$  et  $\bar{\mathbf{a}} \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$  tels que

$$\frac{X_t - vt}{\sqrt{t}} \rightarrow \mathcal{N}(0, \bar{\mathbf{a}})?$$

Voire, plus précisément, existe-t-il une bonne normalisation pour laquelle on ait la convergence des trajectoires vers celle d'un mouvement brownien? Formellement, pour  $t_1 < \dots < t_n$ , peut-on définir de manière naturelle des temps  $T_1^k, \dots, T_n^k$  tels que

$$\left( \frac{X_{T_1^k}}{\sqrt{T_1^k}}, \dots, \frac{X_{T_n^k}}{\sqrt{T_n^k}} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (B_{t_1}, \dots, B_{t_n}).$$

On remarque que si un tel couple existe, l'invariance du modèle des conductances i.i.d. par la réflexion de coordonnée  $i$  permet de garantir la nullité de  $v$ , et avec l'invariance par permutation de coordonnées, on observe que la matrice  $\bar{\mathbf{a}}$ , si elle existe, est une homothétie.

**Question 3** (Théorème central limite local pour la loi quenched). On suppose qu'il existe une matrice  $\bar{\mathbf{a}}$  satisfaisant les hypothèses de la question 2, que l'on note  $\bar{\mathbf{a}} = \alpha Id$ , où le scalaire  $\alpha$  sera explicité dans la suite.

Pour deux sommets  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{Z}^d$ , et  $t > 0$ , a-t-on

$$\mathbf{P}_x^{\mathbf{a}}(X(t) = y) \approx \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4\alpha t}}}{(4\alpha\pi t)^{d/2}} =: \bar{\mathbf{P}}(t, x, y) \quad ?$$

Le terme de droite correspond au noyau de la chaleur pour la matrice  $\bar{\mathbf{a}}$ . La fonction  $P(t, x, y) := \mathbf{P}_x^{\mathbf{a}}(X(t) = y)$  est la fonction de Green parabolique, i.e. l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t P(t, x, \cdot) - \nabla \cdot \mathbf{a}(\cdot) \nabla P(t, x, \cdot) = 0 & \text{dans } \mathbb{Z}^d, \\ P(0, x, y) = \delta_0(x - y) & \text{pour tout } x, y \in \mathbb{Z}^d, \end{cases}$$

tandis que la fonction  $\bar{\mathbf{P}}(t, x, y)$  est la fonction de Green du problème parabolique (continu) homogénéisé

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\mathbf{P}}(t, x, \cdot) - \nabla \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla \bar{\mathbf{P}}(t, x, \cdot) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d, \\ \bar{\mathbf{P}}(0, x, \cdot) = \delta_x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Un tel théorème limite local (pour la loi quenched) s'apparente donc à un problème d'homogénéisation pour l'équation parabolique. Dans le cas de coefficients variables dans le temps, un résultat de convergence en loi — après renormalisation — vers un mouvement brownien s'interprète ainsi comme un résultat d'homogénéisation.

### 1.3.2 La méthode des correcteurs

Comme on l'a déjà évoqué, le processus  $X_t$ , sous la loi  $\mathbf{P}^{\mathbf{a}}$  n'est pas une martingale. En effet, pour tout  $x$ ,

$$\mathbb{E}^{\mathbf{a}} [X_{t+\delta t} | X_t = x] - X_t = \sum_{|e|=1} \mathbf{a}(x, e)e + o(\delta t) =: V_{\mathbf{a}}(x),$$

où le terme  $V_{\mathbf{a}}(x)$  est appelé dérive locale en  $x$  et n'est a priori pas nul. Une manière d'obtenir une martingale à partir de la marche aléatoire  $(X_t)_{t>0}$  est d'appliquer une fonction  $\Psi$  à cette dernière. Pour une fonction  $\Psi(\mathbf{a}, \cdot) : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , la suite obtenue est une martingale si et seulement si la fonction  $\Psi(\mathbf{a}, \cdot)$  est  $\mathbf{a}$ -harmonique.

#### Cas de la dimension 1

Nous considérons pour commencer le réseau  $\mathbb{Z}$ . À quelle condition sur la fonction  $\Psi$ , la suite  $M_n = \Psi(\mathbf{a}, X_n)$  est une martingale sous la loi  $\mathbf{P}^{\mathbf{a}}$ ? Ceci est équivalent au fait que pour tout  $x \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{a}(x, x+1) (\Psi(\mathbf{a}, x+1) - \Psi(\mathbf{a}, x)) + \mathbf{a}(x, x-1) (\Psi(\mathbf{a}, x-1) - \Psi(\mathbf{a}, x)) = 0,$$

ce qui, en utilisant la symétrie de  $\mathbf{a}$ , impose une formule de récurrence pour l'incrément  $\Psi(\mathbf{a}, x+1) - \Psi(\mathbf{a}, x)$  :

$$\Psi(\mathbf{a}, x+1) - \Psi(\mathbf{a}, x) = \frac{\mathbf{a}(x, x-1)}{\mathbf{a}(x, x+1)} (\Psi(\mathbf{a}, x) - \Psi(\mathbf{a}, x-1)).$$

De cette formule de récurrence, l'expression de  $\Psi(\mathbf{a}, x+1) - \Psi(\mathbf{a}, x)$  s'en déduit (pour  $x > 0$ ), par produit télescopique :

$$\Psi(\mathbf{a}, x+1) - \Psi(\mathbf{a}, x) = \frac{1}{\mathbf{a}(x-1, x)} (\Psi(\mathbf{a}, 1) - \Psi(\mathbf{a}, 0)) \text{ si } x > 0.$$

L'espace des fonctions solutions, dites harmoniques, est donc de dimension 2, engendré par la fonction constante égale à 1 et la fonction

$$\Psi(\mathbf{a}, n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mathbf{a}(k, k+1)} & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{k=n}^{-1} \frac{1}{\mathbf{a}(k, k+1)} & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, en supposant que  $\mathbf{a}^{-1}(0, 1)$  soit intégrable,  $M_n$  est une  $\mathbf{P}_x^{\mathbf{a}}$  martingale, et si elle est de plus de carré intégrable, comme précédemment, en utilisant l'ergodicité de l'environnement vu de la particule et le TCL pour les martingales, on obtient :

$$\frac{\Psi(\mathbf{a}, X_t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Mieux : il y a convergence en loi du vecteur  $\left( \frac{\Psi(\mathbf{a}, t_1 n)}{\sqrt{t_1 n}}, \dots, \frac{\Psi(\mathbf{a}, t_k n)}{\sqrt{t_k n}} \right)$  vers  $(\sigma B_{t_1}, \dots, \sigma B_{t_k})$ . La loi des grands nombres permet d'affirmer que dans le cas où  $\mathbb{E} \left[ \frac{1}{\mathbf{a}(k, k+1)} \right] > 0$ , ce qui est assuré dans le cas uniformément elliptique, on a  $\mathbf{P}$ -presque sûrement

$$\frac{\Psi(\mathbf{a}, n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \pm\infty]{} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\mathbf{a}(0, 1)} \right] =: \alpha.$$

Ainsi, du comportement de  $\Psi(\mathbf{a}, X_t)$  on peut déduire celui de  $X_t$  : en effet,

$$\frac{X_t}{\sqrt{t}} = \underbrace{\frac{X_T}{\Psi(\mathbf{a}, X_t)}}_{\rightarrow 1/\alpha} \underbrace{\frac{\Psi(\mathbf{a}, X_t)}{\sqrt{t}}}_{\rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)}. \quad (1.3.2)$$

### Cas général

L'intérêt de la fonction  $\Psi(\mathbf{a}, \cdot)$  précédemment introduite est de transformer  $(X_t)_{t \geq 0}$  en une martingale sous la loi  $\mathbf{P}^{\mathbf{a}}$ . Comme de plus,  $\Psi(\mathbf{a}, \cdot)$  est asymptotiquement un multiple de l'identité, cela permet de comparer  $X_t$  à  $\Psi(\mathbf{a}, X_t)$  et donc d'obtenir une « légère » déformation de  $X_t$  pour laquelle on a un TCL. En s'inspirant de cela, il serait commode, en dimension supérieure, d'introduire une fonction  $\Psi(\mathbf{a}, \cdot)$  qui soit à la fois  $\mathbf{a}$ -harmonique et telle que  $\mathbf{P}$ -presque sûrement

$$|\Psi(\mathbf{a}, \cdot) - x| = o(x).$$

Ceci introduit la notion de correcteur :

**Definition 1.1** (Correcteur). *On appelle correcteur la fonction  $\chi(\mathbf{a}, \cdot)$  vérifiant*

$$\chi(\mathbf{a}, x) = \psi(\mathbf{a}, x) - x.$$

Malheureusement, on ne peut pas exprimer une telle fonction comme solution d'un problème elliptique dont la condition au bord imposerait cette linéarité asymptotique. Pour pallier à cela, on peut construire une suite de correcteurs sur des ensembles de plus en plus grands et espérer pouvoir en extraire une sous-suite convergente. [4, Chapitre 4] démontre comment, à partir de ces correcteurs en volume fini, il est possible de construire des correcteurs sur l'espace entier.

Avant toute chose, nous pouvons remarquer que  $\Psi(\mathbf{a}, \cdot)$  est  $\mathbf{a}$ -harmonique si et seulement si, pour tout  $1 \leq i \leq d$ , la projection sur la coordonnée  $i$ , que l'on notera  $\Psi_i(\mathbf{a}, \cdot)$  est  $\mathbf{a}$ -harmonique. Par ailleurs,  $|\Psi(\mathbf{a}, \cdot) - x| = o(x) \iff \forall i, |\Psi_i(\mathbf{a}, \cdot) - x_i| = o(x)$ . On est donc amené, pour chaque direction  $e_i$ , à construire une fonction de  $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{a}$ -harmonique et équivalente à  $x_i$ . Fixons à présent  $e \in \mathbb{Z}^d$  et introduisons  $u_{e,n}$  l'unique solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \sum_{y \sim x} \mathbf{a}(x, y) (u(y) - u(x)) = 0 \text{ pour tout } x \in \overset{\circ}{\square}_n \\ u(x) = e \cdot x \text{ pour tout } x \in \partial \square_n. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

En imposant à la solution  $u_{e,n}$  de coïncider avec la fonction affine  $\ell_e := e \cdot x$  sur le bord du domaine, on s'attend à ce que la fluctuation entre  $u_{e,n}$  et cette fonction, que l'on notera  $\phi_{e,n} := x \mapsto u_{e,n}(x) - e \cdot x$  devienne négligeable lorsque la taille du domaine tend vers l'infini.

Ceci est l'objet de le chapitre 3, où l'on démontre le théorème suivant, obtenu au cours de ma thèse.

**Théorème 1.2.** *On suppose que les coefficients  $\mathbf{a}(x, y)$  sont tirés de manière indépendante sur chaque arête, suivant une même loi dont le support est inclus dans l'intervalle  $[\lambda, 1]$ , où  $\lambda$  est un réel strictement positif. Pour tout  $s \in (0, d)$ , il existe un exposant  $\beta(d, \lambda) > 0$  et une constante  $C(s, d, \lambda) < \infty$  tels que*

$$3^{-n} \|\phi_{e,n}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C 3^{-n\beta(d-s)} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ns}),$$

où la norme  $\underline{L}^2(\square_n)$  désigne la norme  $L^2(\square_n)$  normalisée par le volume de  $\square_n$ , et où pour une variable aléatoire  $X$  et un réel  $C$ , l'énoncé

$$X \leq \mathcal{O}_1(C),$$

signifie  $\mathbb{E} \left[ \exp\left(\frac{X}{C}\right) \right] \leq 2$ .

On peut remarquer que si  $\phi_{e,n}$  était linéaire, le membre de gauche de l'inégalité serait de l'ordre d'une constante : ce résultat implique donc la sous-linéarité de  $\phi_{e,n}$ .

### 1.3.3 Une motivation à l'étude des coefficients dépendant du temps

Dans cette sous-section, on décrit le lien entre le modèle des conductances aléatoires dépendantes du temps et les mesures de Gibbs sur les champs de gradient. Ce lien est explicité dans [12] et [24, 41, 38, 17]. Une manière de décrire une interface aléatoire entre deux phases est d'introduire une fonction de hauteur. Dans  $\mathbb{R}^2$  par exemple, le graphe de cette fonction permet en effet de distinguer deux phases, celle située au dessus du graphe et celle en dessous. Une telle représentation ne recouvre bien sûr pas la totalité des cas possibles, car elle exclut les phénomènes de « bulles » et des surplombs. Si l'on est intéressé uniquement par la forme du graphe, cela revient à dire que l'on ne considère non plus la fonction elle-même mais la classe des fonctions qui lui sont égales à une constante près. On s'aperçoit qu'alors, la donnée du gradient de cette fonction permet de déduire l'allure de la surface qu'elle définit. Pour cette raison, on cherche à définir une mesure sur l'ensemble des gradients de fonctions définies sur  $\mathbb{Z}^d$ , ou tout du moins une mesure dont l'expression ne dépend de la donnée de  $\phi$  qu'à une constante près. Pour définir une mesure sur  $\mathbb{Z}^d$ , on commence par définir sur  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$  fini et une condition au bord  $\bar{\phi} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ ,

$$\mu_{\Lambda}^{\bar{\phi}}(d\phi) = \frac{1}{Z_{\Lambda}^{\bar{\phi}}} \exp(-H_{\Lambda}(\phi)) \prod_{x \in \Lambda} d\phi(x) \prod_{x \notin \Lambda} \delta_{\bar{\phi}(x)}(d\phi(x)),$$

où le hamiltonien  $H_{\Lambda}$  s'exprime de la manière suivante

$$H_{\Lambda}(\phi) = \sum_{x,y \in \Lambda, x \sim y} V(\phi(x) - \phi(y)),$$

pour un potentiel  $V$  vérifiant des conditions de convexité, régularité et parité. On peut dores et déjà s'apercevoir qu'en additionnant une constante à la condition au bord  $\bar{\phi}$ , la donnée du hamiltonien, et donc celle de la mesure  $\mu_{\Lambda}^{\bar{\phi}}$  s'en trouve être translatée d'une constante.

On dit que la mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$  est une mesure de Gibbs si pour tout domaine fini  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$ , la restriction de  $\mu$  à  $\Lambda$  coïncide avec celle définie précédemment, formellement :

$$\mu(A) = \mathbb{E}_{\mu} \left[ \mu_{\Lambda}^{\bar{\phi}}(A) \right],$$

où la condition au bord  $\bar{\phi}$  est la variable aléatoire qui justifie le calcul d'une espérance. Il serait possible de définir une telle mesure sur l'ensemble des gradients de fonctions de  $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , car comme remarqué précédemment, conditionnellement à une donnée extérieure  $\bar{\phi}$ , la loi du gradient de  $\phi$  sur un domaine  $\Lambda$  ne dépend de  $\bar{\phi}$  que via  $\nabla \bar{\phi}$ . En pratique, une telle considération peut être préférée pour la raison suivante : l'étude de la forme d'une interface repose davantage sur les différences de hauteurs plutôt que sur les hauteurs elles-mêmes (autrement dit, la forme d'une interface ne dépend de la fonction de hauteur qu'à une constante près).



On introduit la dynamique suivante :

$$d\phi_t(x) = -\frac{\partial H}{\partial \phi(x)} dt + \sqrt{2} dB_t(x), \quad (1.3.4)$$

où  $(B_t(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$  sont des mouvements browniens indépendants. Pour commencer, on peut remarquer que lorsque  $\phi_t$  admet en  $x$  un minimum local, le terme de dérive  $-\frac{\partial H}{\partial \phi(x)}$  qui s'exprime comme la somme sur les sommets  $y$  voisins de  $x$  de la quantité  $V'(\phi_t(y) - \phi_t(x))$  est positif, en rappelant que le potentiel  $V$  est convexe. Dans ce cas de figure, la quantité  $\phi_t(x)$  aura tendance à croître. Inversement, en un maximum global, elle aura tendance à décroître. Ce phénomène étant en compétition avec le terme de « bruit », la dynamique admet pour mesure stationnaire toutes les mesures de Gibbs. En effet, en se restreignant à une partie finie  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$ , le générateur infinitésimal du processus  $\phi_t$  s'exprime de la sorte

$$\mathcal{L}(F) = \sum_{x \in \Lambda} \left( \frac{\partial}{\partial \phi(x)} \right)^2 F - \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \frac{\partial H}{\partial \phi(x)} \frac{\partial F}{\partial \phi(x)}.$$

On s'aperçoit alors que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\Lambda} F \mathcal{L} G e^{-H} d\phi_\Lambda &= \int_{\mathbb{R}^\Lambda} F \sum_{x \in \Lambda} \frac{\partial}{\partial \phi(x)} \left[ \frac{\partial G}{\partial \phi(x)} e^{-H} \right] d\phi_\Lambda \\ &= - \sum_{x \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}^\Lambda} \frac{\partial F}{\partial \phi(x)} \frac{\partial G}{\partial \phi(x)} e^{-H} d\phi_\Lambda, \end{aligned}$$

pour tout  $F, G \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^\Lambda)$ . Cette expression est symétrique en  $F$  et  $G$ , ce qui signifie que la mesure  $e^H d\phi_\Lambda = d\mu_\Lambda$  est réversible pour la dynamique introduite par (1.3.4). Connaissant  $\phi_t(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$  et  $t > 0$ , on peut s'intéresser à la marche aléatoire  $X_t$  qui à l'instant  $t$  saute du sommet  $x$  vers le sommet  $y$  à taux  $V''(\phi_t(x) - \phi_t(y))$ . On peut remarquer que lorsque  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ , le processus ainsi décrit est celui de la marche aléatoire simple. Par ailleurs, pour un tel potentiel, la mesure de Gibbs décrit un champ libre gaussien. On sait, dans ce cas-là qu'il est possible d'écrire la covariance des hauteurs en  $x$  et  $y$  de la manière suivante :

$$\text{Cov}_\mu [\phi(x), \phi(y)] = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty \mathbf{1}_{X_t=x} dt \right], \quad (1.3.5)$$

où  $X_t$ , sous la loi  $\mathbf{P}_x$ , désigne la marche aléatoire simple issue de  $x$ . Le terme de droite est en fait  $G(x, y)$ , fonction de Green pour la marche aléatoire simple. Une manière de s'apercevoir de cela est de remarquer que la densité de la mesure étant  $\exp(-H_\Lambda(\phi))$  on peut exprimer le hamiltonien comme  $\phi^t \Delta_\Lambda \phi$ , où  $\Delta_\Lambda$  est la matrice symétrique laplacienne qui se trouve être l'inverse de la matrice de covariance pour la mesure de Gibbs restreinte au domaine  $\Lambda$ . Il semble alors naturel que la covariance de  $\phi(x)$  et  $\phi(y)$  sous la mesure de Gibbs sur  $\mathbb{Z}^d$  vaille  $G(x, y)$ , la fonction de Green en tant qu'inverse du Laplacien.

La représentation de Helffer-Sjöstrand, introduite dans [32, 39] établit que, pour  $F, G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ , on a

$$\text{Cov}_\mu [F(\phi), G(\phi)] = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \int_0^\infty \mathbb{E}^\mu \left[ \frac{\partial F}{\partial \phi(x)}(\phi_0) \frac{\partial G}{\partial \phi(X_t)}(\phi_t) \right] dt,$$

où dans le terme de droite,  $\phi_t = \{\phi_t(x), x \in \mathbb{Z}^d\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$  désigne le processus décrit par la dynamique (1.3.4). Dans le cas où  $F(\phi) = \phi(0)$  et  $G = \phi(x)$ , pour  $x \in \mathbb{Z}^d$  donné, on retrouve une généralisation de (1.3.5)

$$\text{Cov}_\mu [\phi(0), \phi(x)] = \mathbb{E}_\mu \mathbb{E}^{0,\phi} \left[ \int_0^\infty \mathbb{1}_{X_t=x} dt \right].$$

Cette représentation en terme de marche aléatoire fournit donc un outil permettant d'étudier les covariances pour une mesure de Gibbs. Dans cette perspective, il semble intéressant d'étudier la marche aléatoire en milieu dépendant du temps. Bien que la dynamique décrite par (1.3.4) ne satisfasse pas les conditions imposées dans le chapitre 2 (la condition violée est discutée ci-dessous) et qu'elle relève d'un modèle discret et non continu, elle amène à s'intéresser aux résultats d'homogénéisation d'équations paraboliques en milieu dépendant du temps.

En supposant que la marche aléatoire dans l'environnement décrit par  $(\phi_t(x))_{x \in \mathbb{Z}^d, t > 0}$  admette à grande échelle un comportement très proche de la marche aléatoire simple, les temps de visite d'un sommet  $y$  partant du sommet  $x$  admettront également un comportement semblable à ceux obtenus pour la marche aléatoire simple, si bien qu'on peut espérer obtenir des covariances pour  $\phi(x)$  et  $\phi(y)$  comparables à celles du champ libre gaussien. Ceci s'interprète également en terme d'homogénéisation, en effet, la probabilité  $p(t, x, y, \phi)$  est donnée par la solution de l'équation parabolique suivante, à coefficients dépendant du temps

$$\begin{cases} \partial_t p(t, x, y, \phi) = \sum_{z \sim x} V''(\phi_t(z) - \phi_t(x)) (p(t, z, y) - p(t, x, y)) \\ p(0, x, y, \phi) = \delta_0(x - y). \end{cases}$$

**Remarque 15** (Défaut d'indépendance à longue distance). Dans le cas elliptique, [7] démontre un résultat d'homogénéisation avec des conditions de mélange sur le champ  $\mathbf{a}$  portant sur la décroissance des corrélations d'événements respectivement  $\mathcal{F}_U$  et  $\mathcal{F}_V$ -mesurable lorsque  $\text{dist}(U, V) \rightarrow \infty$ . La condition (P3) de l'article [7], consiste en une condition de mélange imposant une décroissance polynomiale en la distance entre deux domaines de la décorrélation d'événements qui ne dépendent que de la donnée de  $\mathbf{a}$  sur ces domaines respectifs. Cette condition est vérifiée dans le cas du champ libre gaussien, en effet, pour  $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ , comme  $(\phi(x), \phi(y)) \sim (0, \Gamma)$  où la matrice  $\Gamma$  est définie par  $\begin{pmatrix} G(x, x) & G(x, y) \\ G(x, y) & G(y, y) \end{pmatrix}$ , en notant  $\alpha = G(x, x)$  et  $\beta = G(x, y)$  on a  $\Gamma^{-1} = \frac{1}{\det(\Gamma)} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , étant donné que  $\beta \sim \frac{C}{|x-y|^{d-2}}$ , on a l'asymptotique :  $\det(\Gamma) \underset{|x-y| \rightarrow \infty}{\sim} \alpha^2$ , dont on déduit

$$\mathbb{E}[f(\phi(x))g(\phi(y))] \approx \int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v) \frac{\exp\left(-\frac{\alpha^{-1}}{2}(u^2 + v^2) + \alpha^{-2}\beta uv\right)}{2\pi\alpha} du dv$$

et

$$\mathbb{E}[f(\phi(x))]\mathbb{E}[g(\phi(y))] = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v) \frac{\exp\left(-\frac{\alpha^{-1}}{2}(u^2 + v^2)\right)}{2\pi\alpha} du dv,$$

ce qui nous permet de conclure

$$\text{Cov}[f(\phi(x)), g(\phi(y))] \approx \int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v) \frac{\exp\left(-\frac{\alpha^{-1}}{2}(u^2 + v^2)\right)}{2\pi\alpha} \underbrace{(e^{\alpha^{-2}\beta uv} - 1)}_{\sim \alpha^{-2}\beta uv} du dv \approx \frac{C'}{|x-y|^{d-2}}.$$

**Remarque 16** (Condition d'uniforme ellipticité). Afin de garantir la condition d'uniforme ellipticité, on considère un potentiel  $V$  de manière à ce qu'il existe deux constantes strictement positives telles que  $\lambda \leq V'' \leq \Lambda$ .  $\square$

D'autres applications de la représentation de Helffer-Sjöstrand sont données dans [17].

## 1.4 Idées de la preuve

Dans cette section, nous présentons les grandes lignes de la démonstration du Théorème 1.1, constituant le chapitre 2, qui est ensuite modifiée pour être appliquée au cas elliptique discret dans le chapitre 3. Nous commençons par justifier la réduction du problème (1.2.6) en justifiant qu'il suffit d'étudier le cas où  $V$  est un cube, et la condition au bord  $f$  est affine en espace, constante en temps. Ensuite, nous donnons une caractérisation des solutions comme minimiseurs d'une certaine fonctionnelle, ce qui constitue la principale différence entre les problèmes elliptique et parabolique. Nous introduirons ensuite des quantités en lien avec cette caractérisation, qui posséderont des propriétés très intéressantes, notamment celle de sous-additivité. Enfin, nous résumerons les arguments aboutissant à la convergence des quantités introduites, qui impliquera la convergence des minimiseurs de ces dernières, dont on déduit le résultat attendu.

### 1.4.1 Restriction aux ensembles cubiques avec condition au bord affine.

Afin de simplifier le problème (1.2.6), on se ramène à l'étude des équations sur des domaines cubiques, avec des conditions au bord affines. Cela permet en effet de conclure dans la section 2.5, en construisant un intermédiaire entre  $u^\varepsilon$ , la solution du problème original, et  $u_{\text{hom}}$ , celle du problème homogénéisé. Pour cela, on introduit, la fonction  $w^\varepsilon$ , appelée « développement à deux échelles » construite en ajoutant à  $u_{\text{hom}}$  un terme correctif, destiné à rendre la fonction  $u_{\text{hom}}$  « quasiment »  $\mathbf{a}^\varepsilon$ -solution (i.e. solution du problème  $(\partial_t - \nabla \cdot \mathbf{a}^\varepsilon \nabla)u = 0$ ). On admet que le domaine  $V$  est inclus dans le cube  $\square_0 = [-1/2, 1/2]^{d+1}$  — ce qui est toujours possible quitte à appliquer une opération linéaire de la forme  $(t, x) \mapsto (\lambda^2 t, \lambda x)$  — et on note  $\phi_{k,\varepsilon}$  la différence entre la solution du premier système dans (1.2.6) pour un réel  $0 < \varepsilon \ll 1$  avec la condition au bord  $f(t, x) = e_k \cdot x$  et cette fonction affine. De la sorte,  $e_k \cdot x$  n'est pas  $\mathbf{a}^\varepsilon$ -solution, mais il suffit d'y ajouter le terme  $\phi_{k,\varepsilon}$  pour qu'elle le devienne. On considère que  $u_{\text{hom}}$  se comporte localement de manière quasi-affine. On exploite ensuite l'approximation suivante :

$$u_{\text{hom}}(t, x) \approx u_{\text{hom}}(t, x_0) + \sum_{i=1}^d \partial_i u_{\text{hom}}(t, x_0) (x - x_0) \cdot e_i. \quad (1.4.1)$$

Si cette approximation était une égalité, la fonction (uniquement spatiale)  $u(t, \cdot)$  serait la fonction affine  $u_{\text{hom}}$ , à laquelle est ajoutée une combinaison linéaire des projections sur les  $i$ -ème coordonnées, pondérées par  $\partial_i u_{\text{hom}}(t, x_0)$ . En utilisant la linéarité du problème (1.2.6), la solution serait donc la fonction

$$v(t, x) = u_{\text{hom}}(t, x_0) + \sum_{i=1}^d \partial_i u_{\text{hom}}(t, x_0) \phi_{i,\varepsilon}(x).$$

Dans le cas général (si  $u_{\text{hom}}$  n'est pas affine), (1.4.1) n'est qu'une approximation, on n'obtient donc pas rigoureusement une fonction qui annule l'opérateur  $\partial_t - \nabla \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon \nabla \cdot)$  en additionnant à

$u_{\text{hom}}$  la somme  $\sum_{i=1}^d \partial_i u_{\text{hom}}(t, x_0) \phi_{i,\varepsilon}$ , mais ceci fournit une fonction

$$\tilde{w}^\varepsilon := u_{\text{hom}} + \sum_{i=1}^d \partial_i u_{\text{hom}}(t, x_0) \phi_{i,\varepsilon},$$

pour laquelle la quantité  $\|\partial_t \tilde{w}^\varepsilon - \nabla \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon \nabla \tilde{w}^\varepsilon)\|$  est petite. Par ailleurs, on s'aperçoit que la condition au bord pour les fonctions  $\phi_{i,\varepsilon}$  imposent la nullité de ces dernières sur le bord parabolique de  $\square_0$ , et non sur  $\partial_\square V$ , ainsi, les fonctions  $\tilde{w}^\varepsilon$  et  $u_{\text{hom}}$  ne coïncident pas sur ce bord. Pour imposer cela, on multiplie le terme correctif par une fonction troncature  $\zeta$ , qui s'annule sur  $\partial_\square V$  et vaut 1 sur l'ensemble des points de  $V$  suffisamment éloignés de sa frontière. On introduit alors la véritable fonction intermédiaire

$$w^\varepsilon(t, x) := u_{\text{hom}}(t, x) + \zeta(t, x) \sum_{i=1}^d \partial_i u_{\text{hom}}(t, x) \phi_{i,\varepsilon}(t, x).$$

Cette fonction établit alors un pivot entre  $u_{\text{hom}}$  et  $u^\varepsilon$  : l'inégalité triangulaire assure que  $\|u_{\text{hom}} - u^\varepsilon\| \leq \|u_{\text{hom}} - w^\varepsilon\| + \|w^\varepsilon - u^\varepsilon\|$ . La première des deux normes est celle du terme correctif

$$\zeta(t, x) \sum_{i=1}^d \partial_i u_{\text{hom}}(t, x) \phi_{i,\varepsilon}(t, x),$$

qui se majore par une estimée de la fonction de troncature, qui croît à mesure que l'ensemble  $\zeta = 1$  se rapproche de  $V$ , des dérivées directionnelles de  $u_{\text{hom}}$ , qui est obtenue à partir de la condition au bord  $f$ , à partir d'un résultat d'analyse purement déterministe, et enfin, par une estimée de la norme des fonctions  $\phi_{i,\varepsilon}$ , à laquelle on se ramènera par la suite. Le deuxième terme peut être majoré en remarquant que la fonction  $w^\varepsilon - u^\varepsilon$  est nulle sur le bord  $\partial_\square V$ , à partir de  $\|\partial_t - \nabla \cdot \mathbf{a}^\varepsilon(w^\varepsilon - u^\varepsilon)\|$ , pour une norme qui sera explicitée dans la section 2.5. On est donc à présent ramené à l'étude de (2.1.21) pour des conditions au bord  $f(t, x) = p \cdot x$ , sur le domaine  $\square_0$ . Comme remarqué au début de la sous-section 1.2.2, fixer un domaine et contracter les coefficients à l'ordre  $\varepsilon$  revient à fixer les coefficients et dilater le domaine d'un facteur  $1/\varepsilon$ , ce qui rendra les propriétés de sous-additivité plus commode dans la suite.

### 1.4.2 Caractérisation des solutions comme minimiseurs

Dans cette sous-section, on donne une caractérisation des solutions du problème parabolique (1.2.6) en tant que minimiseurs d'une fonctionnelle. Cette caractérisation est proche de celle établie par [23] (qui se trouve également dans [22]). Contrairement au problème elliptique en dimension 1, traité au début de la sous-section 1.2.2, qui est une équation différentielle ordinaire, nous n'avons de formule explicite ni pour les solutions au problème elliptique en dimension supérieure, ni pour le problème parabolique. Par ailleurs, ces solutions dépendent des coefficients de manière non-locale et non-linéaire. L'idée introduite dans [15, 16], dans le cas elliptique, repose sur le fait que la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{a}(\nabla u(x)) = 0 \text{ pour tout } x \in U \\ u(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \partial U, \end{cases} \quad (1.4.2)$$

dans  $H^1(U)$ , soit le minimiseur de la fonctionnelle suivante

$$\int \frac{1}{2} \nabla u \cdot \mathbf{a} \nabla u, \text{ pour } u \text{ décrivant } f + H_0^1(U).$$

L'existence et l'unicité d'un minimiseur est assurée par le fait que cette fonctionnelle est uniformément convexe et coercive (voir [19, Chapitre 8]). Cette caractérisation justifie la définition, pour  $p \in \mathbb{R}^d$ , de la quantité

$$\nu(U, p) := \inf_{u \in \ell_p + H_0^1(U)} \int_U \frac{1}{2} \nabla u \cdot \mathbf{a} \nabla u,$$

où le symbole  $\int$  désigne l'intégrale normalisée par la mesure de Lebesgue, précisément  $\int_U f = \frac{1}{|U|} \int_U f$ . La quantité  $\nu$  possède notamment la propriété de sous-additivité, qui permettra d'en déduire la convergence de  $\nu(U, p)$  lorsque  $U \nearrow \mathbb{R}^d$ .

Dans l'optique d'étendre la preuve du problème elliptique au problème parabolique, la première difficulté rencontrée consiste à chercher une caractérisation similaire, qui permettrait d'exprimer à leur tour les solutions du problème parabolique comme minimiseurs d'une intégrale.

Dans un premier temps nous allons exposer une autre caractérisation des solutions au problème (1.4.2) qui reste valable dans des cas où la fonction  $\mathbf{a}$  n'est plus linéaire, mais vérifie une hypothèse. On donnera un exemple d'une fonction  $\mathbf{a}$  satisfaisant cette hypothèse sans toutefois être linéaire. Cette caractérisation est notamment utilisée par [7]. Ensuite, nous modifierons cette formulation variationnelle afin qu'elle permette de caractériser les solutions du problème parabolique.

### Une seconde formulation variationnelle

Nous donnons donc à présent une formulation variationnelle de (1.4.2), permettant de traiter un cadre plus général que les fonctions  $\mathbf{a}$  linéaires. Supposons qu'il existe une fonction  $A(\cdot, \cdot)$  convexe telle que  $A(p, q) \geq p \cdot q$  avec égalité si et seulement si  $q = \mathbf{a}(p)$ . On dira alors que  $A$  représente la fonction  $\mathbf{a}$ . Nous donnerons ensuite quelques exemples de fonctions  $\mathbf{a}$  non linéaires qui peuvent être représentées de la sorte, mais nous remarquons tout d'abord que dans ce cadre-là, pourvu que la matrice  $\mathbf{a}$  soit uniformément elliptique,  $A(p, q) = \frac{1}{2} p \cdot \mathbf{a} p + \frac{1}{2} q \cdot \mathbf{a}^{-1} q$  représente la fonction  $\mathbf{a}$ .

On remarque tout d'abord qu'en introduisant  $L_{\text{sol}}^2(U) = \{g \in L^2(U, \mathbb{R}^d), \nabla \cdot g \equiv 0\}$ , et  $\mathcal{A}(U) = \{u \in H^1(U), \nabla \cdot (\mathbf{a}(\nabla u)) = 0\}$  on a

$$u \in \mathcal{A}(U) \Leftrightarrow \exists g \in L_{\text{sol}}^2(U), g = \mathbf{a}(\nabla u). \quad (1.4.3)$$

Par ailleurs, quelle que soit la fonction  $g$ , on a l'inégalité suivante :

$$\int_U (A(\nabla u, g) - \nabla u \cdot g) \geq 0,$$

par hypothèse sur  $A$ . L'égalité n'est atteinte que dans le cas où l'intégrande est nulle presque partout, i.e. lorsque  $g \equiv \mathbf{a}(\nabla u)$ . On s'aperçoit alors que

$$\mathcal{I}(u) := \inf_{g \in L_{\text{sol}}^2(U)} \int_U (A(\nabla u, g) - \nabla u \cdot g) \geq 0,$$

et en admettant que cet infimum soit atteint par une fonction  $g$  — ce qui se justifie par un argument de convexité de la fonction  $q \mapsto A(p, q) - p \cdot q$  — ce dernier est nul si et seulement si  $u \in \mathcal{A}(U)$ . On obtient donc l'alternative suivante :

— Si  $\mathcal{I}(u) > 0$ , alors  $u \notin \mathcal{A}(U)$ .

— Si  $\mathcal{I}(u) = 0$ , alors  $u \in \mathcal{A}(U)$ .

Pour une fonction  $u_0 \in H^1(U)$  fixée, on a alors équivalence entre

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{a}(\nabla u)) = 0 & \text{dans } U, \\ u = u_0 & \text{sur } \partial U. \end{cases} \Leftrightarrow u \text{ est l'unique minimiseur de } \begin{cases} u_0 + H_0^1(U) & \rightarrow \mathbb{R}^+, \\ u & \mapsto \mathcal{I}(u). \end{cases}$$

Par ailleurs, on connaît la valeur de ce minimum : 0. Ceci n'était pas le cas pour la formulation variationnelle évoquée précédemment, et peu t se révéler utile. En effet, au voisinage de son minimiseur, la fonctionnelle  $\mathcal{I}(u)$  se comporte comme une forme quadratique non-dégénérée en  $u - \tilde{u}$ , en notant  $\tilde{u}$  la fonction réalisant le minimum. La quantité  $\mathcal{I}(u)$  permet ainsi non-seulement de savoir si  $u \in \mathcal{A}(U)$ , mais également de savoir, lorsque ce n'est pas le cas, à quel point  $u$  est loin d'appartenir à cet ensemble.

### Une formulation variationnelle pour le problème parabolique

À présent, on s'inspire de la formulation variationnelle pour le problème elliptique obtenue dans le paragraphe précédent afin d'en obtenir une pour le problème parabolique. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $U$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$ . On note à présent  $V = I \times U$  et

$$\mathcal{A}(V) = \{u \in H_{\text{par}}^1(V), \partial_t u = \nabla \cdot \mathbf{a}(\nabla u)\}.$$

Dans la définition précédente, l'espace  $H_{\text{par}}^1(V)$  est l'espace adéquat pour définir d'une part  $\nabla \cdot \mathbf{a}(\nabla \cdot)$ , de manière à ce que cet opérateur fournisse pour presque tout instant  $t \in I$  une distribution de  $H^{-1}(U)$  à partir d'une distribution de  $H^1(U)$  et d'autre part que  $\partial_t u$  appartienne à l'ensemble  $H^{-1}(U)$ . Précisément, on a

$$H_{\text{par}}^1(I \times U) := \{u \in L^2(I; H^1(U)) : \partial_t u \in L^2(I; H^{-1}(U))\}.$$

De la même manière qu'avec (1.4.3), on peut remarquer que

$$u \in \mathcal{A}(V) \Leftrightarrow \exists g \text{ vérifiant } \nabla \cdot g = \partial_t u \text{ et } g = \mathbf{a}(\nabla u).$$

On s'aperçoit, toujours en utilisant l'inégalité  $A(p, q) \geq p \cdot q$ , que

$$\mathcal{J}(u) := \inf_{g/\nabla \cdot g = \partial_t u} \int_V (A(\nabla u, g) - \nabla u \cdot g) \geq 0.$$

Le cas d'égalité n'est obtenu que s'il existe  $g$  vérifiant  $\nabla \cdot g = \partial_t u$  telle que  $g = \mathbf{a}(\nabla u)$ , ce qui est équivalent au fait que  $u \in \mathcal{A}(V)$ . Comme dans le paragraphe précédent, on obtient l'alternative suivante :

— Si  $\mathcal{J}(u) > 0$ , alors  $u \notin \mathcal{A}(V)$ .

— Si  $\mathcal{J}(u) = 0$ , alors  $u \in \mathcal{A}(V)$ .

Pour une fonction  $u_0 \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(U)$  fixée, on a alors équivalence entre

$$\begin{cases} \partial_t u = \nabla \cdot (\mathbf{a}(\nabla u)) & \text{dans } V, \\ u = u_0 & \text{sur } \partial_{\text{par}} V. \end{cases} \Leftrightarrow u \text{ est l'unique minimiseur de } \begin{cases} u_0 + H_{\text{par}, \sqcup}^1(V) & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ u & \rightarrow \mathcal{J}(u). \end{cases}$$

De plus, on sait que le minimum attendu est nul.

### Exemples de fonctions a représentées par $A(\cdot, \cdot)$

Nous donnons à présent quelques exemples simples de fonctions  $A$  possédant les propriétés énoncées précédemment. De telles fonctions peuvent être obtenues à partir de fonctions convexes. En effet, étant donné  $\phi$  convexe, on définit sa transformée de Legendre-Fenchel

$$\phi^*(q) := \sup_{p \in \mathbb{R}^d} (p \cdot q - \phi(p)),$$

en supposant que  $\phi$  admette de bonnes conditions de régularité, le vecteur  $p \in \mathbb{R}^d$  introduit dans la définition de  $\phi^*$ , en tant que point critique de la fonction  $p \mapsto p \cdot q - \phi(p)$  — dont le gradient vaut  $q - \nabla\phi(p)$  — satisfait  $\nabla\phi(p) = q$ . On remarque alors que  $\phi(p) + \phi^*(q) \geq p \cdot q$ , avec égalité si et seulement si  $q = \nabla\phi(p)$ . Ainsi, dès lors que  $\mathbf{a}$  s'exprime comme le gradient d'une fonction convexe  $\phi$ , il est possible de la représenter par la fonction  $A(p, q) = \phi(p) + \phi^*(q)$ . Dans le cas où  $\mathbf{a}$  est une matrice symétrique définie positive, on l'obtient comme le gradient de la fonction  $p \mapsto \frac{1}{2}p \cdot \mathbf{a}p$ , dont la transformée est la fonction  $q \mapsto \frac{1}{2}q \cdot \mathbf{a}^{-1}q$ . Dans ce cas, on a effectivement  $A(p, q) - p \cdot q = \frac{1}{2}\|\mathbf{a}^{1/2}p - \mathbf{a}^{-1/2}q\|^2$ , dont on s'assure facilement la positivité et le cas de nullité. Si  $\mathbf{a}$  n'est plus symétrique mais se décompose de la sorte :  $\mathbf{a} = s + m$  avec  $s$  symétrique définie positive et  $m$  antisymétrique, on introduit  $A(p, q) := \tilde{A}(p, q - mp)$ , où  $\tilde{A}$  représente la matrice  $s$  avec les notations précédentes (i.e.  $\frac{1}{2}P \cdot sp + \frac{1}{2}q \cdot s^{-1}q$ ). On vérifie que  $A$  représente la fonction linéaire définie par  $\mathbf{a}$  et vérifie

$$A(p, q) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ où } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s - ms^{-1}m & ms^{-1} \\ -s^{-1}m & s^{-1} \end{pmatrix}.$$

#### 1.4.3 Définition des quantités étudiées

Bien que cette caractérisation ne soit pas directement utilisée dans le chapitre 2, elle justifie l'intérêt de trois ensembles de fonctions :  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{S}$  qui seront introduits, ainsi que des quantités  $\nu$ ,  $\nu^*$  et  $J$ , que l'on esquisse à présent. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}^+$  et  $U$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$ . Considérons le problème parabolique sur le domaine  $V = I \times U$ . La caractérisation de la solution comme minimiseur amène à introduire les espaces de fonctions suivants :

$$\mathcal{C}(V) := \left\{ \begin{pmatrix} \nabla u \\ g \end{pmatrix}, u \in H_{\text{par}}^1(V), \nabla \cdot g = \partial_t u \right\}, \quad \mathcal{C}_0(V) := \left\{ \begin{pmatrix} \nabla u \\ g \end{pmatrix}, u \in H_{\text{par}, \square}^1(V), \nabla \cdot g = \partial_t u \right\},$$

où l'égalité liant la divergence de  $g$  à la dérivée temporelle de  $u$  est plus forte dans la deuxième définition. Pour le produit scalaire sur  $\mathcal{C}(V)$  définit par

$$\langle S|T \rangle_{\underline{L}^2(\mathbf{A}, V)} := \int_V S \cdot \mathbf{A}T,$$

on définit l'espace

$$\mathcal{S}(V) := \mathcal{C}(V) \cap \mathcal{C}_0(V)^{\perp \mathbf{A}}.$$

**Remarque 17** (Comparaison avec le modèle elliptique). On peut établir une correspondance entre les espaces  $\mathcal{C}(V)$ ,  $\mathcal{C}_0(V)$ ,  $\mathcal{S}(V)$  et, respectivement, les espaces  $\nabla H^1(U)$ ,  $\nabla H_0^1(U)$ ,  $\nabla \mathcal{A}(U)$ . En omettant la deuxième coordonnée (le terme  $g$  dont la divergence vaut  $\partial_t u$ ) des éléments de la première liste d'ensembles, les correspondances  $\mathcal{C}(V) \leftrightarrow \nabla H^1(U)$  et  $\mathcal{C}_0(V) \leftrightarrow \nabla H_0^1(U)$  sont immédiates. En introduisant sur  $L^2(U, \mathbb{R}^d)$  le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{a}}$  de la sorte

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{a}} = \int_U f \cdot \mathbf{a}g,$$

on s'aperçoit que l'ensemble  $\mathcal{A}(U) = \{u \in H^1(U), \forall v \in H_0^1(U), \int_U \nabla v \cdot \mathbf{a} \nabla u = 0\}$  est précisément l'ensemble des fonctions dont le gradient est orthogonal (pour le produit scalaire induit par  $\mathbf{a}$ ) à  $H_0^1(U)$ . Il est donc légitime d'espérer que les fonctions de  $\mathcal{S}(V)$  admettent pour première coordonnée le gradient d'une fonction de  $\mathcal{A}(V)$ . Comme nous le verrons ci-dessous, ceci est en fait plus compliqué.  $\square$

Un élément capital dans le chapitre 2 est le Lemme 2.8, stipulant que

$$\mathcal{S}(V) := \left\{ \left( \begin{array}{c} \nabla u + \nabla u^* \\ \mathbf{a} \nabla u - \mathbf{a}^t \nabla u^* \end{array} \right), u \in \mathcal{A}(V), u^* \in \mathcal{A}^*(V) \right\},$$

où  $\mathcal{A}(V)$  et  $\mathcal{A}^*(V)$  sont les ensembles des solutions de deux problèmes paraboliques. La remarque 2.9 explique comment extraire de cette combinaison la solution au problème étudié. On introduit ensuite, pour  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ , la quantité

$$\nu(V, X) = \inf_{S \in X + \mathcal{C}_0(V)} \int_V \frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S, \quad (1.4.4)$$

ainsi que sa quantité duale

$$\nu^*(V, X^*) = \sup_{S \in \mathcal{C}(V)} \int_V X^* \cdot S - \frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S.$$

L'expression de l'intégrande dans l'équation précédente,  $X^* \cdot S - \frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S$  et le fait que l'on cherche à optimiser en la variable  $S$  font en sorte que  $\nu^*(V, \cdot)$  s'apparente à la transformée de Legendre-Fenchel de  $\nu(V, \cdot)$ . En omettant l'espace sur lequel le supremum est réalisé, et en s'autorisant ainsi à maximiser l'intégrande point par point, les symboles  $\int$  et  $\sup$  commutent, l'intégrande devient donc  $\sup_{S \in \mathbb{R}^d} (X^* \cdot S - \frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S)$  qui est bien la transformée de Legendre-Fenchel de  $\frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S$ . Bien sûr, la contrainte d'avoir à maximiser l'intégrale pour une fonction  $S \in \mathcal{C}(V)$  empêche une telle considération, mais d'une certaine manière, lorsque  $V \nearrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ , l'argument tend à être valable en un certain sens.

Par ailleurs, on peut plus rigoureusement démontrer une inégalité entre  $\nu^*(V, \cdot)$  et la transformée de Legendre-Fenchel de  $\nu(V, \cdot)$ . En effet, pour  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$  donnés, en considérant  $X + S_{V,X}$  le minimiseur de  $\nu(V, X)$  dans (1.4.4), on obtient, en l'utilisant dans l'expression de  $\nu(V, X^*)$

$$\nu^*(V, X^*) \geq \int_V \left( X^* \cdot (X + S_{V,X}) - \frac{1}{2} (X + S_{V,X}) \cdot \mathbf{A} (X + S_{V,X}) \right) = X^* \cdot X - \nu(V, X),$$

où l'on obtient l'égalité de part le fait que  $\int_V S_{V,X} = 0$ , car  $S_{V,X} \in \mathcal{C}_0(V)$ , et par définition de  $\nu(V, X)$ . Ceci étant valable pour tout choix de  $X$ , on a

$$\nu^*(V, X^*) \geq \sup_{X \in \mathbb{R}^{2d}} (X^* \cdot X - \nu(V, X)),$$

ce qui revient précisément à dire que  $\nu^*(V, \cdot)$  est supérieure à la transformée de Legendre-Fenchel de  $\nu(V, \cdot)$ .

Les deux quantités  $\nu$  et  $\nu^*$  sont quadratiques en  $X$  et  $X^*$ , ce qui reste valable pour leurs espérances, que l'ont peut donc exprimer par deux matrices :

$$\mathbb{E}[\nu(V, X)] = \frac{1}{2} X \cdot \mathbf{B}_V X ; \quad \mathbb{E}[\nu^*(V, X^*)] = \frac{1}{2} X^* \cdot \mathbf{A}_V^{-1} X^*,$$



où la notation, peu naturelle au premier abord, sera légitimée par la suite : présageant que les quantités  $\nu$  et  $\nu^*$  sont conjuguées, on devrait avoir  $\mathbf{B}_V = \mathbf{A}_V$ . Ceci n'est en fait pas le cas, mais le deviendra asymptotiquement. En effet, on peut tout d'abord montrer que ces quantités sont sous-additives en la variable  $V$  : étant donnée une liste d'ensembles  $V_1, \dots, V_n$ , on peut dans le premier cas concaténer les minimiseurs de  $\nu^*(V_i, X)$  dans la définition de  $\nu(V_i, X)$  afin d'obtenir un candidat pour  $\nu(\cup_i V_i, X)$ , permettant de garantir que l'infimum dans (1.4.4) est inférieur au résultat obtenu. Pour la sous-additivité de  $\nu^*$  à l'inverse, on peut considérer le maximiseur de  $\nu^*(\cup_i V_i, X)$  que l'on restreint sur chacun des ensembles  $V_i$ , afin d'obtenir autant de candidats, permettant de garantir que  $\nu^*(V_i, X)$  est supérieur à la contribution de  $V_i$  pour le maximiseur sur la réunion des  $V_i$ .

Cette sous-additivité des quantités se transmet à celles de leurs espérances ; mieux : pour la suite d'ensembles  $(\square_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , appelés cylindres paraboliques, on obtient le  $n + 1$ -ème ensemble en réunifiant  $3^{d+2}$  translatés du  $n$ -ème. La propriété de sous-additivité implique que  $\nu(\square_{n+1}, X) \leq 3^{-(n+2)} \sum_{z \in \mathcal{Z}_{n,n+1}} \nu(z + \square_n, X)$ , où  $\mathcal{Z}_{n,n+1}$  désigne l'ensemble des  $3^{d+2}$  centres des cubes de taille  $n$  dans  $\square_{n+1}$ . Par stationnarité, l'espérance de la quantité  $\nu(z + \square_n, X)$  ne dépend pas de  $z \in \mathcal{Z}_{n,n+1}$ , et on obtient alors la décroissance de la suite  $\mathbb{E}[\nu(\square_n, X)]$ . Dans le raisonnement qui précède, on peut remplacer  $\nu$  par  $\nu^*$  ou  $J$  et aboutir au même résultat. Ceci permet d'affirmer que les matrices  $\mathbf{A}_{\square_n}$  et  $\mathbf{B}_{\square_n}$  admettent des limites, que l'on note  $\bar{\mathbf{A}}$  et  $\bar{\mathbf{B}}$ .

L'enjeu est à présent de montrer que  $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}}$ , i.e. que les limites de  $\nu$  et  $\nu^*$  sont des transformées de Legendre-Fenchel mutuelles. On introduit une nouvelle quantité,  $J$ , qui encode la connaissance à la fois de  $\nu$  et de  $\nu^*$

$$J(V, X, X^*) = \inf_{S \in \mathcal{S}(V)} \int_V -\frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S - X \cdot \mathbf{A} S + X^* \cdot S.$$

En utilisant les propriétés des espaces  $\mathcal{C}(V)$  et  $\mathcal{C}_0(V)$ , on a

$$\nu(V, X) = \frac{1}{2} \|\text{Proj}_{\mathcal{S}(V)}^{\mathbf{A}}(X)\|^2, \quad \nu^*(V, X^*) = \frac{1}{2} \|\text{Proj}_{\mathcal{S}(V)}^{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^{-1} X^*)\|^2, \quad (1.4.5)$$

et finalement, on en déduit le Lemme 2.5, énonçant que :

$$J(V, X, X^*) = \frac{1}{2} \|\text{Proj}_{\mathcal{S}(V)}^{\mathbf{A}}(X - \mathbf{A}^{-1} X^*)\|^2.$$

et tous les projetés impliqués correspondent aux optimiseurs respectifs des définitions de  $\nu$ ,  $\nu^*$  et  $J$ . Prouver que les quantités  $\nu$  et  $\nu^*$  sont asymptotiquement conjuguées revient à prouver que la limite de  $J$  se comporte ainsi :

$$\bar{J}(X, X^*) = \frac{1}{2} X \cdot \bar{\mathbf{A}} X + \frac{1}{2} X^* \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} X^* - X \cdot X^*,$$

qui ne s'annule que lorsque  $X^*$  prend la valeur  $\bar{\mathbf{A}} X$ . L'objectif est d'obtenir la convergence de la quantité  $J$  vers la quantité  $\bar{J}$ . Le Lemme 2.22 permet de réduire le calcul de la distance de  $J(V, \cdot, \cdot)$  à  $\bar{J}(\cdot, \cdot)$  en « gelant » l'une des deux coordonnées, précisément

$$\sup_{X, X^* \in B_1} |J(V, X, \bar{\mathbf{A}} X^*) - \bar{J}(X, X^*)| \leq C \sup_{X \in B_1} (J(V, X, \bar{\mathbf{A}} X))^{\frac{1}{2}}.$$

**Remarque 18.** En admettant que toutes les quantités s'homogénéisent lorsqu'on considère de grandes échelles, et que les vecteurs  $X \in \mathbb{R}^{2d}$  deviennent « presque » des éléments de  $\mathcal{S}(\square_n)$  pour  $n \gg 1$ , on a l'heuristique suivante :

$$\text{Proj}_{\mathcal{S}(\square_n)}^{\mathbf{A}}(X) \approx X \quad \text{et} \quad \text{Proj}_{\mathcal{S}(\square_n)}^{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^{-1} X^*) \approx \bar{\mathbf{A}}^{-1} X^*,$$

ce qui, en utilisant (1.4.5) légitime l'intuition selon laquelle

$$\nu(\square_n, X) \approx \frac{1}{2}X \cdot \bar{\mathbf{A}}X \quad \text{et} \quad \nu^*(\square_n, X^*) \approx \frac{1}{2}X^* \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1}X^*.$$

Et donc enfin

$$J(\square_n, X, X^*) \approx \frac{1}{2}X \cdot \bar{\mathbf{A}}X + \frac{1}{2}X^* \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1}X^* - X \cdot X^* = \bar{J}(X, X^*).$$

□

Ne connaissant pas la quantité  $\bar{\mathbf{A}}$ , nous donnons une estimation du membre de gauche dans laquelle l'expression  $\bar{\mathbf{A}}$  est remplacée par  $\bar{\mathbf{A}}_n := \bar{\mathbf{A}}_{\square_n}$ , l'erreur commise étant de l'ordre de  $|\bar{\mathbf{A}}_n - \bar{\mathbf{A}}|$ , dont on démontre a posteriori la décroissance exponentielle en  $n$ . Ceci nous amène à contrôler la décroissance de la quantité  $\mathbb{E}[J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)]$ , dont la Proposition 2.23 énonce qu'elle est exponentielle. La preuve de cette décroissance se fait en plusieurs étapes.

*Étape 1.* On introduit  $\tau_n$  qui quantifie la décroissance de l'espérance de  $J$  entre deux échelles successives. On démontre que la variance de la valeur moyenne d'un minimiseur est petite (estimée par une moyenne pondérée de ces quantités  $(\tau_k)_{k \leq n}$ ), ce qui constitue le Lemme 2.26, en comparant le minimiseur  $S(\cdot, \square_n, X, X^*)$  avec une approximation obtenue en mettant bout à bout des minimiseurs d'une échelle  $m < n$ . La variance s'estimera ensuite par celle de l'assemblage effectué ajoutée à l'erreur commise en considérant cet assemblage plutôt que la véritable quantité  $S(\cdot, \square_n, X, X^*)$ . L'assemblage de sous-cube permet d'obtenir des quantités indépendantes dont les variances s'additionnent, permettant ensuite d'exprimer la variance à l'échelle  $n$  comme une fraction (i.e. un multiple pour un réel inférieur à 1) de celle à l'échelle  $n-l$  (additionnée d'un terme correctif), puis par récurrence d'en déduire le Lemme 2.26, qui donne une majoration de cette variance à partir d'une somme pondérée des  $(\tau_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ . Précisément, il existe deux constantes  $\alpha > 0$  et  $C > 0$  telles que

$$\text{Var} \left[ \int_{\square_n} S(\cdot, \square_n, X, X^*) \right] \leq C 3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

*Étape 2.* Le contrôle de la variance ne permet a priori d'estimer la quantité  $\mathbb{E} \left[ \left( \int_V S(\cdot, \square_n, X, X^*) \right)^2 \right]$  que dans le cas où l'espérance de la moyenne est nulle. Ceci survient précisément pour le choix de  $X^* = \bar{\mathbf{A}}_n X$ ; en effet, celui-ci s'exprime comme un annulateur de la fonction  $X^* \mapsto \nabla_{X^*} \mathbb{E}[J(\square_n, X, X^*)]$ , les relations liant la dérivées directionnelle de  $J(\square_n, \cdot, \cdot)$  à la moyenne du minimiseur (le résultat (2.2.29)) permettent de conclure que la variance est bien l'espérance du carré de la moyenne :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_V S(\cdot, \square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X) \right)^2 \right] = \text{Var} \left[ \int_V S(\cdot, \square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X) \right].$$

*Étape 3.* La quantité  $\mathbb{E}[J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)]$  est directement estimée à partir de la norme  $L^2$  du maximiseur  $S(\cdot, \square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)$ . L'utilisation du théorème de Poincaré multi-échelle permet de majorer la norme  $H^{-1}$  de ce-dernier à partir de ses moyennes sur chacun des sous-cubes contenus dans  $\square_n$ . L'inégalité de Caccioppoli permettra ensuite d'en déduire une majoration pour la norme  $L^2$  de  $S(\cdot, \square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)$ . Ceci aboutit à la Proposition 2.24, énonçant l'existence de  $\alpha > 0$  tel que

$$\mathbb{E}[J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)] \leq C 3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

On conclut alors par un argument de type EDO, qui permet de démontrer que la moyenne pondérée des  $\tau_k$  dans la majoration précédente décroît polynomialement, ce dont on déduit que  $|\bar{\mathbf{A}}_n - \bar{\mathbf{A}}|$  décroît également de manière polynomiale. Ceci prouve la proposition 2.23 : il existe des constantes  $C$  et  $\beta > 0$  telles que

$$\mathbb{E}[J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}X)] \leq C 3^{-\beta n}.$$

En utilisant à présent le Lemme 2.22, on en déduit que  $J(\square_n, X, X^*)$  est proche de  $\bar{J}(X, X^*)$ , ce qui, pour des formes quadratiques (en fixant l'une des deux variables) implique la même estimée pour la distance de leurs gradients. En utilisant à nouveau le lien entre le gradient en  $X$  et la moyenne des minimiseurs, donné par (2.2.28), on en déduira une majoration de la moyenne de  $S(\cdot, \square_n, X, X^*) - \bar{S}(X, X^*)$  (de la même manière, (2.2.29) permettra les mêmes majorations pour la différence des moyennes flux  $AS(\cdot, \square_n, X, X^*) - \bar{AS}(X, X^*)$ ). Comme précédemment, l'inégalité de Poincaré multi-échelle permettra de transférer une estimée sur les moyennes des cubes à échelles données à une estimée sur la norme  $H^{-1}$  de la fonction sur une échelle supérieure, puis l'inégalité de Caccioppoli démontrera la convergence des minimiseurs. La remarque 2.9 permettra alors d'en déduire une décroissance du correcteur en volume fini, qui permettra dans la section 2.5 d'en déduire un résultat d'homogénéisation en effectuant un développement à deux échelles.

#### 1.4.4 Idées communes et différences dans la preuve du problème elliptique discret

Dans le chapitre 3, nous utilisons des méthodes relativement proches afin de démontrer la convergence des correcteurs du problème elliptique discret. La principale différence réside à nouveau dans l'expression d'une solution au problème comme minimiseur d'une fonctionnelle. Une difficulté rencontrée a été d'introduire des quantités  $\nu$  et  $\nu^*$  sous-additives. En effet, contrairement au modèle continu pour lequel on obtient un cube de taille  $3^{n+1}$  en réalisant l'union de  $3^d$  cubes de taille  $3^n$ , sans se soucier du bord de ces sous-cubes, qui est de mesure de Lebesgue nulle (et donc ne joue pas de rôle dans la sous-additivité), ceci n'est pas aussi immédiat dans le cas discret. Si l'on considère par exemple les ensembles d'arêtes  $\mathcal{E}(U)$  liant les sommets de  $U$ , nous n'avons plus l'égalité  $\mathcal{E}(U_1 \cup U_2) = \mathcal{E}(U_1) \cup \mathcal{E}(U_2)$ , car les arêtes liant des sommets de  $U_1$  à des sommets de  $U_2$  n'appartiennent pas au second ensemble. Pour contourner ce problème, nous considérerons d'autres ensembles d'arêtes,  $\mathcal{E}^+(U)$ , pour lesquels cette égalité est valable.

Un autre aspect sur lequel les deux preuves diffèrent est celui des inégalités de type Poincaré multi-échelle et Caccioppoli, qui dans les deux preuves consistent en une section dédiée — 2.3 et 3.2 — à ces deux résultats purement déterministes qui sont indispensables pour chacune de ces preuves.

La preuve de la décroissance des quantités sous-additives dans la section 3.3 est très proche de celle décrite dans le cas parabolique dans la section 2.4. Le fait que les conductances soient indépendantes tandis que dans le chapitre 2, les coefficients ne sont indépendants qu'à longue portée, permet de simplifier certaines étapes, comme le calcul de la variance dans (3.3.10) ou le contrôle de la fluctuation de  $J$  dans (3.3.24).

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les correcteurs, il n'y a donc pas d'analogue à la section 2.5.



## Chapitre 2

# Quantitative stochastic homogenization and regularity theory of parabolic equations

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Motivation and informal summary of results

In this chapter, we develop a quantitative theory of stochastic homogenization for linear, uniformly parabolic equations with coefficients depending on both the space and time variables. We consider equations of the form

$$\partial_t u^\varepsilon - \nabla \cdot \left( \mathbf{a} \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u^\varepsilon \right) = 0 \quad \text{in } I \times U, \quad (2.1.1)$$

where  $I \subseteq \mathbb{R}$  is an open interval,  $U$  is a bounded Lipschitz domain of  $\mathbb{R}^d$ , and  $(t, x) \mapsto \mathbf{a}(t, x)$  is a stationary random field taking values in the set of real  $d$ -by- $d$  matrices satisfying, for a fixed constant  $\Lambda \in [1, \infty)$ ,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi \cdot \mathbf{a}(t, x) \xi \geq \Lambda^{-1} |\xi|^2 \quad \text{and} \quad |\mathbf{a}(t, x) \xi| \leq \Lambda |\xi|. \quad (2.1.2)$$

Here the symbol  $\nabla$  denotes the gradient in the space variables only, that is,  $\nabla w = (\partial_{x_1} w, \dots, \partial_{x_d} w)$ . We let  $\mathbf{P}$  be the law of the random field  $\mathbf{a}(t, x)$ , which we assume to be invariant under translations by elements of  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$  and to have a finite range of dependence. (See below in the following subsection for the precise assumptions.)

We are interested in the behavior of the solutions  $u^\varepsilon(t, x)$  for  $0 < \varepsilon \ll 1$ . It is well-known that, under very general qualitative assumptions on the coefficients (stationarity and ergodicity), the equation (2.1.1) homogenizes to an effective limiting equation of the form

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{a}} \nabla u) = 0 \quad \text{in } I \times U, \quad (2.1.3)$$

where  $\bar{\mathbf{a}}$  is a deterministic  $d$ -by- $d$  matrix. This principle can be formulated in various ways, but it means for example that the solutions  $u^\varepsilon$  of (2.1.1), subject to appropriate initial-boundary conditions, converge as  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{P}$ -almost surely and in some appropriate function space, to

solutions of the homogenized equation (2.1.3).<sup>1</sup> Such a result is usually proved by soft arguments, using an abstract version of the ergodic theorem, which unfortunately does not give *quantitative* information concerning the convergence.

There has been a lot of recent interest in quantitative stochastic homogenization for elliptic equations, particularly in the case of linear, uniformly elliptic equations. This essentially began with the work of Gloria and Otto [28, 29], who proved the first quantitative results which are optimal in the scaling of the parameter  $\varepsilon$  (see also [27]). Their work motivated a great number of subsequent works, and we refer to the recently completed monograph [4] for more background, references and historical information.

In this chapter, motivated by the desire to obtain quantitative homogenization results—in particular, explicit estimates of the homogenization error—we develop an analytic approach for parabolic equations with random coefficients based on the ideas recently introduced in [8, 7, 5, 6], which are perhaps best presented in [4]. Those papers developed a rather complete quantitative theory of elliptic homogenization starting from the observation that certain energy quantities—which are very natural from a variational perspective—are also rather convenient for studying the homogenization process. This is because : (i) they efficiently encode information about the weak convergence of the fluxes, gradients, and energy densities of solutions; and (ii) they are amenable to renormalization arguments in the sense that we can obtain rates of convergence for the quantities by iterating the length scale. This variational approach allows one to circumvent the need for nonlinear concentration inequalities, because it reveals a “linear” structure of the randomness : while the solutions are very nonlinear functions of the coefficients, the energy quantities turn out to be essentially linear. This observation greatly simplifies the theory and allows one to derive estimates which are optimal both in the scaling of  $\varepsilon$  as well as in stochastic integrability. A related approach inspired by [8, 7, 5, 6] has also recently been developed in [30, 31].

The two main results of this chapter are (i) a quantitative estimate on the homogenization error for Cauchy-Dirichlet problems (Theorem 2.1) and (ii) a complete large-scale regularity theory (Theorem 2.2). It has already been observed in the elliptic case (see [4]) that results of this type are the first step towards optimal quantitative estimates and scaling limits for first-order correctors as well as optimal error estimate for boundary-value problems. At the same time, the results in this chapter are the first quantitative stochastic homogenization results, to our knowledge, for parabolic equations with coefficients with space-time dependence.

The starting point for adapting the techniques of [4] to the parabolic case is a variational characterization of divergence-form parabolic equations that was first discovered by Brezis and Ekeland [13, 14]. We give a self-contained presentation of this characterization in Appendix 2.7, where we also give a convex analytic proof of the well-posedness of general Cauchy-Dirichlet problems inspired by [23]. Based on this variational principle, we introduce subadditive quantities for the homogenization problem in Section 2.2 and adapt the methods of [4], using an iteration of scales and a renormation-type argument, to obtain an algebraic rate of convergence in Section 2.4. Compared to the elliptic case, the main sources of additional difficulty in the iteration argument have to do with the need to control certain weak Sobolev norms of the time derivatives of the solutions. We accomplish this with the help of some functional inequalities we prove in Section 2.3. In Section 2.5, we show that the convergence of the subadditive quantities gives us approximate

---

1. We remark that we are unaware of a reference which proves this specific result in the parabolic setting. Nevertheless, we maintain that it is essentially well-known, since the classical qualitative proof given in the elliptic case (see for instance [36, 11, 33]) can be straightforwardly generalized to the parabolic setting.

first-order correctors with good quantitative bounds, which allows us to prove Theorem 2.1. In the last section, we obtain the regularity result of Theorem 2.2. In the rest of this introduction, we state the assumptions, notation and main results.

### 2.1.2 Assumptions

We fix a spatial dimension  $d \geq 2$  and a parameter  $\Lambda \in [1, \infty)$ . We let  $\Omega$  denote the set of all possible coefficient fields  $\mathbf{a}(t, x)$ , which are assumed to be measurable maps from  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  into the set  $\Omega_0$  of matrices  $\mathbf{a}$  satisfying

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi \cdot \mathbf{a} \xi \geq \Lambda^{-1} |\xi|^2 \quad \text{and} \quad |\mathbf{a} \xi| \leq \Lambda |\xi|. \quad (2.1.4)$$

That is, we define

$$\Omega_0 := \{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{d \times d} : \mathbf{a} \text{ satisfies (2.1.4)} \}$$

and then set

$$\Omega := \{ \mathbf{a} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega_0 \text{ is Lebesgue-measurable} \}. \quad (2.1.5)$$

For every Borel subset  $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , we define  $\mathcal{F}_V$  to be the  $\sigma$ -algebra representing the information obtaining by observing the coefficient field in  $V$ . Formally,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_V &:= \text{the } \sigma\text{-algebra generated by the random elements} & (2.1.6) \\ \mathbf{a} &\mapsto \int_V \varphi(t, x) \mathbf{a}(t, x) dt dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

The largest of the  $\sigma$ -algebras in this family is  $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d}$ . We assume that  $\mathbf{P}$  is a given probability measure on the measurable space  $(\Omega, \mathcal{F})$  which satisfies the following two assumptions :

(P1)  $\mathbf{P}$  is *stationary* with respect to  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$ -translations : for every  $z \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$  and event  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}[T_z A].$$

(P2)  $\mathbf{P}$  has a *unit range of dependence* : for every pair of Borel subsets  $U, V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ,

$$\text{dist}(U, V) \geq 1 \implies \mathcal{F}_U \text{ and } \mathcal{F}_V \text{ are } \mathbf{P}\text{-independent.}$$

Here “dist” is defined with respect to the usual Euclidean distance on  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ . We denote by  $\mathbb{E}[X]$  the expectation of an  $\mathcal{F}$ -measurable random variable  $X$  with respect to  $\mathbf{P}$ . While we assume that the coefficient field has a finite range of dependence for simplicity, we point out that this hypothesis can be weakened using arguments similar to those exposed in [7].

### 2.1.3 Notation

We unfortunately must introduce quite a bit of notation, particularly since we are working with parabolic equations which require us to define various function spaces. We collect the notation needed in this subsection, which the reader is encouraged to skim and consult as a reference.



### General notation

We denote the set of natural numbers by  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ . We use the symbols  $\wedge$  and  $\vee$  to denote minimum and maximum, respectively, for example  $r \wedge s = \min\{r, s\}$  for  $r, s \in \mathbb{R}$ . For every  $r \in \mathbb{R}$ , we also denote  $r_+ := r \vee 0$  and  $r_- := r \wedge 0$ . For any  $m \in \mathbb{N}$  and measurable subset  $E \subseteq \mathbb{R}^m$ , the Lebesgue measure of  $E$  is denoted by  $|E|$ , unless  $E$  is a finite set, in which case  $|E|$  is the cardinality of  $E$ . This is often used for  $m \in \{1, d, 1 + d\}$ . A slash through the integral denotes normalization by the Lebesgue measure :  $f_E := \frac{1}{|E|} \int_E$ . The mean of a function  $f \in L^1(E)$  is also denoted by  $(f)_E := f_E f$ .

A *parabolic cylinder* is any set of the form  $I \times U$  where  $I = (I_-, I_+) \subseteq \mathbb{R}$  is a bounded open interval and  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  is a bounded Lipschitz domain. We denote the parabolic boundary of  $I \times U$  by

$$\partial_{\sqcup}(I \times U) := (I \times \partial U) \cup (\{I_-\} \times U).$$

We denote the Euclidean ball of  $\mathbb{R}^d$  of radius  $r \in (0, \infty]$  centered at  $x \in \mathbb{R}^d$  by  $B_r(x)$ , and put  $B_r := B_r(0)$ . Throughout, we work with the triadic cubes defined for every  $n \in (0, \infty)$  by

$$I_n := \left( -\frac{3^{2n}}{2}, \frac{3^{2n}}{2} \right), \quad \square_n := \left( -\frac{3^n}{2}, \frac{3^n}{2} \right)^d, \quad \square_n := I_n \times \square_n.$$

Note that the parabolic cylinder  $\square_n$  is evidently not a cube per se since its sides have a scaling which match the parabolic scaling. However, we note that for each  $m, n \in \mathbb{N}$  with  $m < n$ , we can write  $\square_n$  as the disjoint union (up to a set of Lebesgue measure zero) of exactly  $3^{(2+d)(m-n)}$  cubes of the form  $z + \square_m$  with  $z \in 3^{2m}\mathbb{Z} \times 3^m\mathbb{Z}^d$ .

We also use the following notation for parabolic cylinders : for each  $r \in (0, \infty]$  and  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , we define

$$\tilde{I}_r := (-r^2, 0], \quad Q_r(t, x) := (t, x) + \tilde{I}_r \times B_r, \quad \text{and} \quad Q_r := Q_r(0, 0), \quad (2.1.7)$$

with, by convention,  $Q_\infty := (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^d$ .

### Function spaces

For every bounded Lipschitz domain  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  with  $|U| < \infty$  and  $p \in [1, \infty)$ , we denote the normalized  $L^p(U)$  norm of a function  $f \in L^p(U)$  by

$$\|f\|_{\underline{L}^p(U)} := \left( \int_U |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |U|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(U)}. \quad (2.1.8)$$

For  $p = \infty$ , we denote  $\|f\|_{\underline{L}^\infty(U)} := \|f\|_{L^\infty(U)}$ . We use similar notation to denote normalized (scale-invariant) Sobolev norms : for every  $p \in [1, \infty)$  and  $f \in W^{1,p}(U)$ ,

$$\|f\|_{\underline{W}^{1,p}(U)} := |U|^{-\frac{1}{d}} \|f\|_{\underline{L}^p(U)} + \|\nabla f\|_{\underline{L}^p(U)}$$

In the case  $p = 2$  we use the notation  $\|f\|_{\underline{H}^1(U)} := \|f\|_{\underline{W}^{1,2}(U)}$ . As usual,  $H_0^1(U)$  and  $W_0^{1,p}(U)$  respectively denote the closure in  $H^1(U)$  and  $W^{1,p}(U)$ , respectively, of the compactly supported smooth functions in  $U$ . The dual spaces to  $W^{1,p}(U)$  and  $W_0^{1,p}(U)$  are denoted by  $\widehat{W}^{-1,p'}(U)$  and

$W^{-1,p'}(U)$ , respectively, where  $p' := \frac{p}{p-1}$  is the Hölder conjugate exponent of  $p$ . The normalized, scale-invariant dual norms are respectively defined by

$$\|v\|_{\underline{W}^{-1,p'}(U)} := \sup \left\{ \int_U uv : u \in W^{1,p}(U), \|u\|_{\underline{W}^{1,p}(U)} \leq 1 \right\}$$

and

$$\|v\|_{\underline{W}^{-1,p'}(U)} := \sup \left\{ \int_U uv : u \in W_0^{1,p}(U), \|u\|_{\underline{W}^{1,p}(U)} \leq 1 \right\}.$$

Here we are abusing notation by denoting the natural pairing  $\langle u, w \rangle$  between the two dual spaces (up to a constant) by the normalized integral. This is done to emphasize the normalization that we wish to enforce, which extends the action of an element  $w \in C_c^\infty(U)$  on  $W^{1,p}(U)$  by  $u \mapsto \int_U uw$ . For  $p = 2$ , we also write  $\|\cdot\|_{\underline{H}^{-1}(U)} := \|v\|_{\underline{W}^{-1,2}(U)}$  and  $\|\cdot\|_{\underline{H}^{-1}(U)} := \|v\|_{\underline{W}^{-1,2}(U)}$ .

We next introduce function spaces designed for parabolic equations. For each  $n \in \mathbb{N}$ , bounded Lipschitz domain  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , Banach space  $X$  and  $p \in [1, \infty)$ , we denote by  $L^p(U; X)$  the space of Lebesgue-measurable mappings  $u : U \rightarrow X$  such that

$$\|u\|_{\underline{L}^p(U; X)} := \left( \int_U \|u(x)\|_X^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

For every interval  $I = (I_-, I_+) \subseteq \mathbb{R}$  and bounded Lipschitz domain  $U \subseteq \mathbb{R}^d$ , we define the function space

$$H_{\text{par}}^1(I \times U) := \left\{ u \in L^2(I; H^1(U)) : \partial_t u \in L^2(I; H^{-1}(U)) \right\}, \quad (2.1.9)$$

which is the closure of bounded smooth functions on  $I \times U$  with respect to the norm

$$\|u\|_{\underline{H}_{\text{par}}^1(I \times U)} := \|u\|_{\underline{L}^2(I; \underline{H}^1(U))} + \|\partial_t u\|_{\underline{L}^2(I; \underline{H}^{-1}(U))}. \quad (2.1.10)$$

We denote by  $H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  the closure in  $H_{\text{par}}^1(I \times U)$  of the set of smooth functions with compact support in  $(I_-, I_+) \times U$ . In other words, a function in  $H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  has zero trace on the lateral boundary  $I \times \partial U$  and the initial time  $\{I_-\} \times U$  but does not necessarily vanish at the final time.

We let  $H_{\text{par}, 0}^1(I \times U)$  denote the completion of the set of smooth functions with compact support in  $I \times U$  with respect to the norm

$$\|v\|_{\underline{H}_{\text{par}, 0}^1(I \times U)} := \|v\|_{\underline{L}^2(I; \underline{H}^1(U))} + \|\partial_t v\|_{\underline{L}^2(I; \widehat{H}^{-1}(U))}. \quad (2.1.11)$$

Note that compared with (2.1.10), here we require the time derivative  $\partial_t v(t, \cdot)$  to be an element of  $\widehat{H}^{-1}(U)$  instead of  $H^{-1}(U)$ . In particular, for  $v \in H_{\text{par}, 0}^1(I \times U)$ , the spatial average of  $\partial_t v$  over  $I \times U$  is well-defined, since constant functions belong to  $L^2(I; H^1(U))$  (while they do not belong to  $L^2(I; H_0^1(U))$ ). Moreover, the boundary condition imposes that for every  $v \in H_{\text{par}, 0}^1(I \times U)$ ,

$$\int_{I \times U} \partial_t v = 0. \quad (2.1.12)$$

This identity is indeed clear if  $v$  is smooth and compactly supported in  $I \times U$ , and we can then obtain the general case by density.

In certain situations, it is useful to work with variations of  $H_{\text{par}}^1(I \times U)$  in which the exponent of integrability is  $p \in (1, \infty)$  rather than 2. So we also define the function spaces

$$W_{\text{par}}^{1,p}(I \times U) := \left\{ u \in L^p(I; W^{1,p}(U)) : \partial_t u \in L^p(I; W^{-1,p}(U)) \right\}, \quad (2.1.13)$$

which is the closure of bounded smooth functions on  $I \times U$  with respect to the norm

$$\|u\|_{\underline{W}_{\text{par}}^{1,p}(I \times U)} := \|u\|_{\underline{L}^p(I; \underline{W}^{1,p}(U))} + \|\partial_t u\|_{\underline{L}^p(I; \underline{W}^{-1,p}(U))}. \quad (2.1.14)$$

Similarly to  $H_{\text{par},\sqcup}^1(I \times U)$ , we denote by  $W_{\text{par},\sqcup}^{1,p}(I \times U)$  the closure in  $W_{\text{par}}^{1,p}(I \times U)$  of the set of smooth functions with compact support in  $(I_-, I_+] \times U$ . Finally, for every parabolic cylinder  $V$ , we denote by  $W_{\text{par},\text{loc}}^{1,p}(V)$ ,  $H_{\text{par},\text{loc}}^1(V)$ , and so forth, the functions on  $V$  which are, respectively, elements of  $W_{\text{par}}^{1,p}(W)$  and  $H_{\text{par}}^1(W)$ , etc, for every subcylinder  $W \subseteq V$  with  $\overline{W} \subseteq V$ .

We next turn to the definitions of the negative parabolic Sobolev spaces. We denote by  $\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(V)$  and  $H_{\text{par}}^{-1}(V)$  the dual spaces to  $H_{\text{par}}^1(V)$  and  $H_{\text{par},\sqcup}^1(V)$ , respectively, with (normalized, scale-invariant) dual norms given by

$$\begin{cases} \|f\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(V)} := \sup \left\{ \int_V f w : w \in H_{\text{par}}^1(V), \|w\|_{H_{\text{par}}^1(V)} \leq 1 \right\} \\ \|f\|_{H_{\text{par}}^{-1}(V)} := \sup \left\{ \int_V f w : w \in H_{\text{par},\sqcup}^1(V), \|w\|_{H_{\text{par},\sqcup}^1(V)} \leq 1 \right\}. \end{cases} \quad (2.1.15)$$

As explained above, the notation  $\int_V f w$  should be interpreted as the canonical pairing between  $f \in \widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(V)$  or  $f \in H_{\text{par}}^{-1}(V)$ , respectively, and  $w \in H_{\text{par}}^1(V)$  or  $w \in H_{\text{par},\sqcup}^1(V)$ , which extends the action of bounded smooth functions on  $H_{\text{par}}^1(V)$  or  $H_{\text{par},\sqcup}^1(V)$ . We similarly define the space  $W_{\text{par}}^{-1,p}(V)$  to be the dual space of the Banach space  $W_{\text{par},\sqcup}^{1,p'}(V)$ , where  $p' := \frac{p}{p-1}$ , and endow it with the (normalized, scale-invariant) norm

$$\|f\|_{W_{\text{par}}^{-1,p}(V)} := \sup \left\{ \int_V f w : w \in W_{\text{par},\sqcup}^{1,p'}(V), \|w\|_{W_{\text{par},\sqcup}^{1,p'}(V)} \leq 1 \right\}. \quad (2.1.16)$$

Recall that negative Sobolev norms arise naturally when one wishes to quantify *weak* convergence in  $L^p$  or positive Sobolev spaces (see [4, Section 1.4]). This is indeed their purpose in this chapter.

### The $\mathcal{O}_s$ notation

Since the random variables we encounter in this chapter are very often the sum of a deterministic quantity and a “small” random part, it is useful to work with the notation introduced in [6] for expressing the sizes of random variables (essentially, an alternative notation for certain Orlicz norms). It is intended to remind us of “big- $\mathcal{O}$ ” notation and is convenient because it compresses some of our computations and makes our inequalities easier to understand at a glance.

If  $X$  is a random variable and  $s, k \in (0, \infty)$ , then we write

$$X \leq \mathcal{O}_s(k)$$

as a shorthand for the statement that

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \left( \frac{X_+}{k} \right)^s \right) \right] \leq 2. \quad (2.1.17)$$

Roughly, this means that “ $X$  is of order  $k$  with stretched exponential tails with exponent  $s$ .” More precisely, we can use Chebyshev’s inequality to see that

$$X \leq \mathcal{O}_s(k) \implies \forall \lambda > 0, \mathbf{P}[X > \lambda k] \leq 2 \exp(-\lambda^s). \quad (2.1.18)$$

The converse of this statement is almost true : for every  $k \geq 0$ ,

$$\forall \lambda \geq 0, \quad \mathbf{P}[X \geq \lambda k] \leq \exp(-\lambda^s) \implies X \leq \mathcal{O}_s\left(2^{\frac{1}{s}} \theta\right). \quad (2.1.19)$$

This can be obtained by integration. We also use the notation

$$X = \mathcal{O}_s(k) \iff X \leq \mathcal{O}_s(k) \text{ and } -X \leq \mathcal{O}_s(k).$$

Similarly, we write  $X \leq Y + \mathcal{O}_s(k)$  to mean that  $X - Y \leq \mathcal{O}_s(k)$  and  $X = Y + \mathcal{O}_s(k)$  to mean that  $X - Y = \mathcal{O}_s(k)$ . If  $s \in [1, \infty)$ , then Jensen's inequality gives us a triangle inequality for  $\mathcal{O}_s(\cdot)$  in the following sense : for any measure space  $(E, \mathcal{S}, \mu)$ , measurable function  $K : E \rightarrow (0, \infty)$  and jointly measurable family  $\{X(z)\}_{z \in E}$  of nonnegative random variables, we have

$$\forall z \in E, X(z) \leq \mathcal{O}_s(K(z)) \implies \int_E X d\mu \leq \mathcal{O}_s\left(\int_E K d\mu\right). \quad (2.1.20)$$

If  $s \in (0, 1]$ , then the statement is true after adding a prefactor constant  $C_s > 1$  to the right side. For a proof of (2.1.18)-(2.1.20), see [4, Appendix A].

#### 2.1.4 Statement of the main results

We present two main results. The first provides an algebraic convergence rate for the homogenization limit of the Cauchy-Dirichlet initial-value problem in a parabolic cylinder  $I \times U$ , where  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  is a bounded Lipschitz domain. This is a parabolic counterpart of a theorem proved in the elliptic setting in [8] (see also [4, Theorem 2.16]).

**Theorem 2.1.** *Fix  $s \in (0, 2 + d)$ , a bounded Lipschitz domain  $U \subseteq B_1$ , an interval  $I := (I_-, 0) \subseteq (-\frac{1}{4}, 0)$  and an exponent  $\delta > 0$ . Put  $V := I \times U$ . There exist an exponent  $\beta(\delta, V, d, \Lambda) > 0$ , a constant  $C(s, V, \delta, d, \Lambda) < \infty$  and a random variable  $\mathcal{X}$  satisfying*

$$\mathcal{X} = \mathcal{O}_1(C)$$

such that the following convergence result holds : for each  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$  and initial-boundary condition  $f \in W_{\text{par}}^{1, 2+\delta}(V)$ , denoting

$$\mathbf{a}^\varepsilon(t, x) := \mathbf{a}\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

and taking  $u^\varepsilon, u \in f + H_{\text{par}, \sqcup}^1(V)$  to be the solutions of the Cauchy-Dirichlet problems

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nabla \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{in } V, \\ u^\varepsilon = f & \text{on } \partial_\sqcup V, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{a}} \nabla u) = 0 & \text{in } V, \\ u = f & \text{on } \partial_\sqcup V, \end{cases} \quad (2.1.21)$$

we have the estimate

$$\begin{aligned} \|\nabla u^\varepsilon - \nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(V)} + \|\mathbf{a}^\varepsilon \nabla u^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}} \nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(V)} + \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(V)} \\ \leq C \|f\|_{W_{\text{par}}^{1, 2+\delta}(V)} \left( \varepsilon^{\beta(2+d-s)} + \mathcal{X} \varepsilon^s \right). \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

As well as estimating the homogenization error, notice that the estimate (2.1.22) quantifies the weak convergence in  $L^2(V)$  of the gradients and fluxes of  $u^\varepsilon$  to those of  $u$ . The random part of the error, namely  $\mathcal{X} \varepsilon^s$  for an  $s$  arbitrarily close to  $2 + d$ , is very small compared to the

deterministic part,  $\varepsilon^{\beta(2+d-s)}$ . It is also important for applications to observe that  $\mathcal{X}$  is independent of the initial-boundary condition  $f$ .

On the right side of (2.1.22), we have split the error into a possibly rather large deterministic part (large, since we do not control the smallness of  $\beta > 0$ ) plus a random error. While the typical size of the error is estimated suboptimally, since  $\beta > 0$  is small, the *tail behavior* of this random part is sharply estimated. In particular, we see that the probability for the term  $(\varepsilon^{\beta(2+d-s)} + \mathcal{X}\varepsilon^s)$  to be  $O(1)$  is smaller than  $\exp(-\varepsilon^{-s}/C)$ , for arbitrary  $s < 2 + d$ . This estimate is sharp, in the sense that it would be false for any  $s > 2 + d$ . We refer to [4, Remark 2.5 and Section 3.5] for similar considerations in the elliptic setting.

The second theorem we present here is a large-scale regularity result, a parabolic counterpart to [4, Theorem 3.6]. In particular, we seek to classify all ancient solutions of the parabolic equation which exhibit at most polynomial growth at infinity and backwards in time. This requires us to introduce some additional notation.

We denote polynomials in the variables  $t, x_1, \dots, x_d$  by  $\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ . The *parabolic degree*  $\deg_p(w)$  of an element  $w \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  is the degree of the polynomial  $(t, x) \mapsto w(t^2, x)$ . For each  $k \in \mathbb{N}$  we let  $\mathcal{P}_k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  be the subset of  $\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  of polynomials with parabolic degree at most  $k$ . For  $\alpha > 0$ , we say that a function  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  or  $\phi : (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  is *parabolically  $\alpha$ -homogeneous* if

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \phi(\lambda^2 t, \lambda x) = \lambda^\alpha \phi(t, x).$$

Any element of  $\mathcal{P}_k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  can be written as a sum of at most  $C(d, k) < \infty$  many parabolically homogeneous polynomials.

We denote by  $\overline{\mathcal{A}}_k(Q_\infty)$  the set of  $\bar{\mathbf{a}}$ -caloric functions on  $Q_\infty$  with growth which is strictly less than a polynomial of parabolic degree  $k + 1$  :

$$\overline{\mathcal{A}}_k(Q_\infty) := \left\{ w \in H_{\text{par}}^1(Q_\infty) : \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-(k+1)} \|w\|_{L^2(Q_r)} = 0, \partial_t w - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{a}} \nabla w) = 0 \text{ in } Q_\infty \right\}.$$

It turns out that  $\overline{\mathcal{A}}_k(Q_\infty)$  coincides with the set of  *$\bar{\mathbf{a}}$ -caloric polynomials*<sup>2</sup> of parabolic degree at most  $k$ . That is,

$$\overline{\mathcal{A}}_k(Q_\infty) = \{w|_{Q_\infty} : w \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d), \partial_t w - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{a}} \nabla w) = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d\}. \quad (2.1.23)$$

The vector space of  $n$ -homogeneous  $\bar{\mathbf{a}}$ -caloric polynomials is isomorphic to that of  $n$ -homogeneous polynomials of  $\mathbb{R}^d$ . This can be shown by backwards uniqueness and the fact that this vector space is spanned by products of homogeneous  $\bar{\mathbf{a}}$ -caloric polynomials depending only on  $t$  and one of the space variables (see for instance [42] or [35, Proposition 1.1.1]). In any case, we have that  $\dim(\overline{\mathcal{A}}_k(Q_\infty)) = \binom{d+k}{d} < \infty$ .

In the next result, we generalize the parabolic Liouville theorem implicit in (2.1.23) to  $\mathbf{a}(x)$ -caloric functions. At the same time we provide a *quantitative* version of this Liouville principle, in other words, a  $C^{k,1}$ -type regularity estimate. Denote, for every parabolic cylinder  $I \times U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathcal{A}(I \times U) := \{w \in H_{\text{par,loc}}^1(I \times U) : \partial_t w - \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla w) = 0 \text{ in } I \times U\}$$

---

2.  $\bar{\mathbf{a}}$ -caloric polynomials are often called *heat polynomials* in the literature, in the case  $\bar{\mathbf{a}} = I_d$

and, for every  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{A}_k(Q_\infty) := \left\{ w \in \mathcal{A}(Q_\infty) : \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-(k+1)} \|w\|_{\underline{L}^2(Q_r)} = 0 \right\}.$$

Note that these vector spaces are *random* since they depend on  $\mathbf{a} \in \Omega$ . The following theorem is a parabolic analogue of [4, Theorem 3.6].

**Theorem 2.2** (Parabolic higher regularity theory). *Fix  $s \in (0, 2 + d)$ . There exist an exponent  $\delta(s, d, \Lambda) \in (0, \frac{1}{2}]$  and a random variable  $\mathcal{X}_s$  satisfying the estimate*

$$\mathcal{X}_s \leq \mathcal{O}_s(C(s, d, \Lambda)) \quad (2.1.24)$$

such that the following statements hold, for every  $k \in \mathbb{N}$  :

(i)<sub>k</sub> *There exists  $C(k, d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $u \in \mathcal{A}_k(Q_\infty)$ , there exists  $p \in \overline{\mathcal{A}}_k(Q_\infty)$  such that, for every  $R \geq \mathcal{X}_s$ ,*

$$\|u - p\|_{\underline{L}^2(Q_R)} \leq CR^{-\delta} \|p\|_{\underline{L}^2(Q_R)}. \quad (2.1.25)$$

(ii)<sub>k</sub> *For every  $p \in \overline{\mathcal{A}}_k(Q_\infty)$ , there exists  $u \in \mathcal{A}_k(Q_\infty)$  satisfying (2.1.25) for every  $R \geq \mathcal{X}_s$ .*

(iii)<sub>k</sub> *There exists  $C(k, d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $R \geq \mathcal{X}_s$  and  $u \in \mathcal{A}(Q_R)$ , there exists  $\phi \in \mathcal{A}_k(Q_\infty)$  such that, for every  $r \in [\mathcal{X}_s, R]$ , we have the estimate*

$$\|u - \phi\|_{\underline{L}^2(Q_r)} \leq C \left( \frac{r}{R} \right)^{k+1} \|u\|_{\underline{L}^2(Q_R)}. \quad (2.1.26)$$

In particular, we have,  $\mathbf{P}$ -almost surely, for every  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\dim(\mathcal{A}_k(Q_\infty)) = \dim(\overline{\mathcal{A}}_k(Q_\infty)) = \binom{d+k}{d}. \quad (2.1.27)$$

Observe that, as in the elliptic case, even for  $k = 0$  the third statement of Theorem 2.2 gives us an important gradient estimate on solutions. Indeed, the combination of statement (iii)<sub>0</sub> and the Caccioppoli inequality yields that, for every  $R \geq \mathcal{X}_s$ ,  $u \in \mathcal{A}(Q_R)$  and  $r \in [\mathcal{X}_s, R]$ , we have

$$\|\nabla u\|_{\underline{L}^2(Q_r)} \leq C \|\nabla u\|_{\underline{L}^2(Q_R)}.$$

This should be seen as a  $C^{0,1}$ -type estimate and compared to pointwise gradient bounds for the solutions of the heat equation.

The proof of Theorem 2.2 is obtained as a consequence of Theorem 2.1 and a routine adaptation of the proof of [4, Theorem 3.6], which is the statement of the analogous result in the elliptic case. In Section 2.6, we explain the modifications required in the parabolic setting.

Soon after the first version of this proof was submitted and posted to the arxiv, a new preprint of Bella, Chiarini and Fehrman [10] appeared which contains a large-scale regularity result which has some overlap with Theorem 2.2. In particular, under qualitative assumptions, they obtain the statement of Theorem 2.2 in the case  $k = 1$  with the estimate (2.1.24) on  $\mathcal{X}_s$  replaced by the qualitative bound  $\mathbf{P}[\mathcal{X}_s < \infty] = 1$ .

### 2.1.5 Outline of the chapter

In the next section, we introduce the subadditive quantities inherited from the variational structure of the equation and record some of their basic properties. For convenience, the variational formulation of uniformly parabolic equations is recalled in a self-contained presentation in Appendix 2.7. In Section 2.3, we present several functional inequalities which are needed later in the chapter. Of particular interest are inequalities giving us control of certain weak norms of functions in terms of the spatial averages of the functions in cubes as well as Caccioppoli-type inequalities giving us control of strong norms of solutions in terms of weak norms. Section 2.4 is the heart of the chapter, where we prove the convergence of the subadditive quantities by an iteration over the length scales. In Section 2.5, we demonstrate how to pass from control of the convergence of the subadditive quantities to general homogenization results. Finally, in Section 2.6 we summarize the passage from the quantitative homogenization results to the higher regularity theory (which is entirely analogous to the elliptic setting). In Appendix 2.8, we give local and global versions of the Meyers higher integrability estimate for gradients of solutions. We remark that the statement of the global Meyers estimate we prove appears to be new and somewhat sharper compared to what has previously appeared in the literature.

## 2.2 Variational structure and subadditive quantities

### 2.2.1 Variational formulation of parabolic equations

As we now explain, the solution of a parabolic equation can be obtained as the minimizer of a uniformly convex functional. This is an entirely deterministic statement, valid for an arbitrary fixed coefficient field  $\mathbf{a} \in \Omega$ .

The following proposition states the solvability of parabolic equations. It relies on convex analysis and calculus of variations, and is close to the main result of [23] (see also the monograph [22]). We provide a self-contained proof in the appendix in the more general setting of maximal monotone operators, and for a larger set of pairs  $(w, w^*)$ ; see Proposition 2.34.

**Proposition 2.3** (Parabolic variational principle). *Let  $\mathcal{J}$  be defined below in (2.2.4). For each  $w \in H_{\text{par}}^1(I \times U)$  and  $w^* \in L^2(I; H^{-1}(U))$ , the mapping*

$$\begin{cases} w + H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U) & \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \mapsto \mathcal{J}[u, w^*] \end{cases}$$

*is uniformly convex. Moreover, its minimum is zero, and the associated minimizer is the unique  $u \in w + H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  solution of*

$$(\partial_t - \nabla \cdot \mathbf{a} \nabla)u = w^* \quad \text{in } I \times U. \quad (2.2.1)$$

Equation (2.2.1) is interpreted as

$$\forall \phi \in L^2(I; H_0^1(U)), \quad \int_{I \times U} \nabla \phi \cdot \mathbf{a} \nabla u = \int_{I \times U} \phi (w^* - \partial_t u). \quad (2.2.2)$$

The left side of (2.2.2) can be more explicitly written as

$$\int_{I \times U} \nabla \phi(t, x) \cdot \mathbf{a}(t, x) \nabla u(t, x) dt dx,$$

while the right side of (2.2.2) could be more properly written as

$$\int_I \langle \phi(t, \cdot), (w^* - \partial_t u)(t, \cdot) \rangle dt,$$

with  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  the duality pairing between  $H_0^1(U)$  and  $H^{-1}(U)$ .

We proceed to define the functional  $\mathcal{J}$  appearing in Proposition 2.3. To start with, we decompose the matrix  $\mathbf{a}$  into its symmetric and skew-symmetric parts :

$$\mathbf{s}(t, x) := \frac{\mathbf{a}(t, x) + \mathbf{a}^\dagger(t, x)}{2}, \quad \mathbf{m}(t, x) := \frac{\mathbf{a}(t, x) - \mathbf{a}^\dagger(t, x)}{2},$$

and set

$$A(p, q, t, x) := \frac{1}{2} p \cdot \mathbf{s}(t, x) p + \frac{1}{2} (q - \mathbf{m}(t, x) p) \cdot \mathbf{s}^{-1}(t, x) (q - \mathbf{m}(t, x) p), \quad (2.2.3)$$

so that the following lemma holds.

**Lemma 2.4.** *There exists a constant  $C(\Lambda) < \infty$  such that, for every  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ,*

$$(p, q) \mapsto A(p, q, t, x) - C^{-1}(|p|^2 + |q|^2) \quad \text{is convex,}$$

and

$$(p, q) \mapsto A(p, q, t, x) - C(|p|^2 + |q|^2) \quad \text{is concave.}$$

Moreover, for every  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  and  $p, q \in \mathbb{R}^d$ ,

$$A(p, q, t, x) \geq p \cdot q,$$

with equality if and only if  $q = \mathbf{a}(t, x)p$ .

**Proof.** We briefly recall the proof—see also [7, (2.6)]. The fact that  $(p, q) \mapsto A(p, q, t, x)$  is uniformly convex and  $C^{1,1}$  follows from the definition of  $\Omega$  in (2.1.5). The second part of the lemma is a consequence of the identity

$$A(p, q, t, x) - p \cdot q = \frac{1}{2} (\mathbf{a}(t, x)p - q) \mathbf{s}^{-1}(t, x) (\mathbf{a}(t, x)p - q).$$

□

The functional  $\mathcal{J}$  appearing in Proposition 2.3 is defined, for every  $u \in H_{\text{par}}^1(I \times U)$  and  $u^* \in L^2(I; H^{-1}(U))$ , by

$$\mathcal{J}[u, u^*] := \inf \left\{ \int_{I \times U} (A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot) - \nabla u \cdot \mathbf{g}) : -\nabla \cdot \mathbf{g} = u^* - \partial_t u \right\}. \quad (2.2.4)$$

In the infimum above, we understand that  $\mathbf{g} \in L^2(I \times U; \mathbb{R}^d)$ , and the last condition is interpreted as

$$\forall \phi \in L^2(I; H_0^1(U)), \quad \int_{I \times U} \nabla \phi \cdot \mathbf{g} = \int_{I \times U} \phi (u^* - \partial_t u).$$

In the integral on the right side of (2.2.4), the dot “ $\cdot$ ” in the expression  $A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot)$  stands for the time-space variable, that is,

$$\begin{aligned} & \int_{I \times U} (A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot) - \nabla u \cdot \mathbf{g}) \\ &= \int_I \int_U (A(\nabla u(t, x), \mathbf{g}(t, x), t, x) - \nabla u(t, x) \cdot \mathbf{g}(t, x)) dx dt. \end{aligned}$$



### 2.2.2 Subadditive quantities and basic properties

In this subsection, we define the subadditive quantities and collect their basic properties. Although their definitions are actually very natural and intuitive, many readers will not find them to be on first reading. In order to understand the motivation for studying them, it is best to first have some familiarity with the elliptic case with symmetric coefficients, which is described in [4]. Indeed, much of what appears below can be compared to Chapter 2 of [4], and in fact this chapter can be seen as a generalization of [4, Chapters 1-3] to the parabolic setting. Now, since the subadditive quantities are endowed from the variational structure of the equation, it is natural that the parabolic versions should be somewhat more complicated than the elliptic ones. A similar issue was encountered in [7], where subadditive quantities were defined and analyzed for “non-variational” elliptic equations.

In any case, the most convincing demonstration that these are the “right” quantities will have to wait until Section 2.5, where we prove that quantitative information about the convergence of the subadditive quantities can be translated directly into control of the first-order correctors and therefore into estimates on the rate of homogenization.

Without further ado, we give the definitions of the subadditive quantities. For every Lipschitz domain  $U \subseteq \mathbb{R}^d$ , bounded interval  $I \subseteq \mathbb{R}$  and  $p, q \in \mathbb{R}^d$ , we define

$$\mu(I \times U, p, q) := \inf_{(\nabla v, \mathbf{h}) \in \mathcal{C}_0(I \times U)} \int_{I \times U} A(p + \nabla v, q + \mathbf{h}, \cdot), \quad (2.2.5)$$

where the infimum is taken over  $(\nabla v, \mathbf{h})$  ranging in the space

$$\mathcal{C}_0(I \times U) := \left\{ (\nabla v, \mathbf{h}) \in L^2(I \times U; \mathbb{R}^d)^2 : v \in H_{\text{par},0}^1(I \times U) \text{ and} \right. \\ \left. \forall \phi \in L^2(I; H^1(U)), \int_{I \times U} \nabla \phi \cdot \mathbf{h} = - \int_{I \times U} \phi \partial_t v \right\}. \quad (2.2.6)$$

Since  $\phi \in L^2(I; H^1(U))$  and  $\partial_t v \in L^2(I; \widehat{H}^{-1}(U))$ , the last integral is well-defined, in the usual interpretation as

$$\int_I \langle \phi(t, \cdot), \partial_t v(t, \cdot) \rangle dt,$$

where here  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the duality pairing between  $H^1(U)$  and  $\widehat{H}^{-1}(U)$ . Testing the condition in (2.2.6) against the function  $\phi(t, x) := p \cdot x$  and integrating by parts in time, we see that any candidate  $\mathbf{h}$  must satisfy

$$\int_{I \times U} \mathbf{h} = 0. \quad (2.2.7)$$

The dual subadditive quantity  $\mu^*$  is defined, for every  $p^*, q^* \in \mathbb{R}^d$ , by

$$\mu^*(I \times U, q^*, p^*) := \sup_{(\nabla u, \mathbf{g}) \in \mathcal{C}(I \times U)} \int_{I \times U} (-A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot) + q^* \cdot \nabla u + p^* \cdot \mathbf{g}), \quad (2.2.8)$$

where the supremum is taken over  $(\nabla u, \mathbf{g})$  ranging in the space

$$\mathcal{C}(I \times U) := \left\{ (\nabla u, \mathbf{g}) \in L^2(I \times U; \mathbb{R}^d)^2 : u \in H_{\text{par}}^1(I \times U), \right. \\ \left. \forall \phi \in L^2(I; H_0^1(U)), \int_{I \times U} \nabla \phi \cdot \mathbf{g} = - \int_{I \times U} \phi \partial_t u \right\}. \quad (2.2.9)$$

Note that for each  $p \in \mathbb{R}^d$  and  $(\nabla v, \mathbf{h}) \in \mathcal{C}_0(I \times U)$ , we have  $(p + \nabla v, q + \mathbf{h}) \in \mathcal{C}(I \times U)$ . Using also (2.1.12) and (2.2.7), we thus deduce that for every  $p, q, p^*, q^* \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mu^*(I \times U, q^*, p^*) \geq q^* \cdot p + p^* \cdot q - \mu(I \times U, p, q). \quad (2.2.10)$$

That is, the function  $(q^*, p^*) \mapsto \mu^*(I \times U, q^*, p^*)$  is bounded below by the convex dual of the function  $(p, q) \mapsto \mu(I \times U, p, q)$ . As in the elliptic case (see [5, Lemma 3.1] and [6]), we will combine  $\mu$  and  $\mu^*$  into a master quantity denoted by  $J$  which monitors the defect in this convex duality pairing. For concision, we set

$$V := I \times U, \quad (2.2.11)$$

and define a  $2d$ -by- $2d$  matrix field  $\mathbf{A} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{2d \times 2d}$  by

$$\mathbf{A}(t, x) := \begin{pmatrix} \mathbf{s}(t, x) - \mathbf{m}(t, x)\mathbf{s}^{-1}(t, x)\mathbf{m}(t, x) & \mathbf{m}(t, x)\mathbf{s}^{-1}(t, x) \\ -\mathbf{s}^{-1}(t, x)\mathbf{m}(t, x) & \mathbf{s}^{-1}(t, x) \end{pmatrix},$$

so that

$$A(p, q, t, x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

This notation allows to rewrite the definitions of  $\mu$  and  $\mu^*$  in (2.2.5) and (2.2.8) in more compact notation : for every  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ , we have

$$\mu(V, X) = \inf_{S \in X + \mathcal{C}_0(V)} \int_V \frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S, \quad (2.2.12)$$

$$\mu^*(V, X^*) = \sup_{S \in \mathcal{C}(V)} \int_V \left( -\frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S + X^* \cdot S \right), \quad (2.2.13)$$

and the inequality (2.2.10) can be rewritten as

$$\mu^*(V, X^*) \geq X \cdot X^* - \mu(V, X). \quad (2.2.14)$$

We now set

$$\mathcal{S}(V) := \left\{ (\nabla v, \mathbf{h}) \in \mathcal{C}(V) : \forall (\nabla \phi, \mathbf{f}) \in \mathcal{C}_0(V), \int_V \begin{pmatrix} \nabla \phi \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \mathbf{h} \end{pmatrix} = 0 \right\}, \quad (2.2.15)$$

and for every  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$J(V, X, X^*) := \sup_{S \in \mathcal{S}(V)} \int_V \left( -\frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S - X \cdot \mathbf{A} S + X^* \cdot S \right). \quad (2.2.16)$$

The master quantity  $J$  can be rewritten in the following more explicit notation :

$$J \left( V, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q^* \\ p^* \end{pmatrix} \right) := \sup_{(\nabla v, \mathbf{g}) \in \mathcal{S}(V)} \int_V \left( -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q^* \\ p^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla v \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \right). \quad (2.2.17)$$

The next lemma shows that  $J$  monitors the defect in convex duality between  $\mu$  and  $\mu^*$ .

**Lemma 2.5.** For every  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$J(V, X, X^*) = \mu(V, X) + \mu^*(V, X^*) - X \cdot X^*. \quad (2.2.18)$$

Moreover, the maximizer  $S(\cdot, V, X, X^*)$  in (2.2.16) is the difference between the maximizer of  $\mu^*(V, X^*)$  in (2.2.13) and the minimizer of  $\mu(V, X)$  in (2.2.12).

**Proof.** We first argue that, for every  $X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$\mu^*(V, X^*) = \sup_{S \in \mathcal{S}(V)} \int_V \left( -\frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S + X^* \cdot S \right). \quad (2.2.19)$$

Let  $S^* \in \mathcal{C}(V)$  denote the maximizer in the definition of  $\mu^*(V, X^*)$ . Note that, for every  $X^* \in \mathbb{R}^{2d}$  and  $S \in \mathcal{C}_0(V)$ ,

$$\int_U X^* \cdot S = 0. \quad (2.2.20)$$

By the first variation for  $\mu^*$ , we deduce that

$$\forall S' \in \mathcal{C}_0(V), \quad \int_V S' \cdot \mathbf{A} S^* = 0.$$

That is,  $S^* \in \mathcal{S}(U)$ , and thus (2.2.19) holds.

Let  $X = (p, q) \in \mathbb{R}^{2d}$  and

$$S_0 = (\nabla v, \mathbf{h}) \in X + \mathcal{C}_0(V) \quad (2.2.21)$$

denote the minimizer in the definition of  $\mu(V, p, q) = \mu(V, X)$ . For every  $S \in \mathcal{S}(V)$ ,

$$\begin{aligned} \mu(V, X) + \int_V \left( X^* \cdot S - \frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S \right) - X \cdot X^* \\ = \int_V \left( \frac{1}{2} S_0 \cdot \mathbf{A} S_0 - \frac{1}{2} S \cdot \mathbf{A} S + X^* \cdot S \right) - X \cdot X^*. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

By (2.2.21), we have  $X = \int_V S_0$ . For each  $S \in \mathcal{S}(V)$ ,

$$\int_V S \cdot \mathbf{A} S_0 = \int_V S \cdot \mathbf{A} X,$$

and this last identity holds true in particular for  $S = S_0$ . We obtain that the left side of (2.2.22) is equal to

$$\int_V \left( -\frac{1}{2} (S - S_0) \cdot \mathbf{A} (S - S_0) - X \cdot \mathbf{A} (S - S_0) + X^* \cdot (S - S_0) \right).$$

We compare this result to the identities (2.2.19) and (2.2.16) to obtain the lemma.  $\square$

The next lemma collects elementary properties of  $J$  and its minimizer. It can be compared with [4, Lemma 2.2].

**Lemma 2.6** (Basic properties of  $J$ ). *The quantity  $J(V, X, X^*)$  and its maximizer  $S(\cdot, V, X, X^*)$  satisfy*

*the following properties :*

- *The mapping  $(X, X^*) \mapsto J(V, X, X^*)$  is quadratic.*

- Uniformly convex and  $C^{1,1}$  in  $X$  and  $X^*$  separately. There exists a constant  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $X_1, X_2, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} |X_1 - X_2|^2 &\leq \frac{1}{2} J(V, X_1, X^*) + \frac{1}{2} J(V, X_2, X^*) - J\left(V, \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2, X^*\right) \\ &\leq C |X_1 - X_2|^2 \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

and, for every  $X_1^*, X_2^*, X \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} |X_1^* - X_2^*|^2 &\leq \frac{1}{2} J(V, X, X_1^*) + \frac{1}{2} J(V, X, X_2^*) - J\left(V, X, \frac{1}{2} X_1^* + \frac{1}{2} X_2^*\right) \\ &\leq C |X_1^* - X_2^*|^2. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

- Subadditivity. Let  $V_1, \dots, V_N \subseteq V$  be parabolic cylinders that partition  $V$ , in the sense that  $V_i \cap V_j = \emptyset$  if  $i \neq j$  and

$$\left| V \setminus \bigcup_{i=1}^N V_i \right| = 0.$$

For every  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ , we have

$$J(V, X, X^*) \leq \sum_{i=1}^N \frac{|V_i|}{|V|} J(V_i, X, X^*). \quad (2.2.25)$$

- First variation for  $J$ . For  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ , the function  $S(\cdot, V, X, X^*)$  is the unique element of  $\mathcal{S}(V)$  such that

$$\forall T \in \mathcal{S}(V), \quad \int_V T \cdot \mathbf{A}S(\cdot, V, X, X^*) = \int_V (-X \cdot \mathbf{A}T + X^* \cdot T). \quad (2.2.26)$$

- Quadratic response. For every  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$  and  $T \in \mathcal{S}(V)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \int_V |T - S(\cdot, V, X, X^*)|^2 \\ \leq J(V, X, X^*) - \int_V \left( -\frac{1}{2} T \cdot \mathbf{A}T - X \cdot \mathbf{A}T + X^* \cdot T \right) \\ \leq C \int_V |T - S(\cdot, V, X, X^*)|^2. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

- Formulas for derivatives of  $J$ . For every  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$\nabla_X J(V, X, X^*) = - \int_V \mathbf{A}S(\cdot, V, X, X^*) \quad (2.2.28)$$

and

$$\nabla_{X^*} J(V, X, X^*) = \int_V S(\cdot, V, X, X^*). \quad (2.2.29)$$

**Proof.** Since these properties are easy to check and their proofs are almost the same of those of [4, Lemma 2.2], we omit the details.  $\square$

**Remark 2.7.** Since  $X^* \mapsto \mu^*(V, X^*)$  is a quadratic form, we obtain from (2.2.28) and Lemma 2.5 that

$$\int_V S(\cdot, V, X, 0) = \nabla_{X^*} J(V, X, 0) = -X, \quad (2.2.30)$$

a property which also follows directly from the definition of  $\mu$  in (2.2.12) and the identification of  $-S(\cdot, V, X, 0)$  as the minimizer in this definition. From (2.2.29) and Lemma 2.5, we also obtain the dual identity

$$\int_V \mathbf{A}S(\cdot, V, 0, X^*) = X^*.$$

In the next lemma, we relate the space  $\mathcal{S}(I \times U)$  with the space of solutions of the parabolic equation and of its dual. Define the vector space  $\mathcal{A}(I \times U)$  to be the set of weak solutions  $u \in H_{\text{par}}^1(I \times U)$  of the equation

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla u) = 0 \quad \text{in } I \times U,$$

and the vector space  $\mathcal{A}^*(I \times U)$  to be the set of weak solutions  $u^* \in H_{\text{par}}^1(I \times U)$  of the dual equation

$$\partial_t u^* + \nabla \cdot (\mathbf{a}^\dagger \nabla u^*) = 0 \quad \text{in } I \times U.$$

Note that the direction of time is reversed in the dual equation. Precisely,

$$\mathcal{A}(I \times U) :=$$

$$\left\{ u \in H_{\text{par}}^1(I \times U) : \forall w \in L^2(I; H_0^1(U)), \int_{I \times U} w \partial_t u = - \int_{I \times U} \nabla w \cdot \mathbf{a} \nabla u \right\},$$

$$\mathcal{A}^*(I \times U) :=$$

$$\left\{ u^* \in H_{\text{par}}^1(I \times U) : \forall w \in L^2(I; H_0^1(U)), \int_{I \times U} w \partial_t u^* = \int_{I \times U} \nabla w \cdot \mathbf{a}^\dagger \nabla u^* \right\}.$$

**Lemma 2.8.** *We have*

$$\mathcal{S}(V) := \left\{ (\nabla u + \nabla u^*, \mathbf{a} \nabla u - \mathbf{a}^\dagger \nabla u^*) : u \in \mathcal{A}(V), u^* \in \mathcal{A}^*(V) \right\}. \quad (2.2.31)$$

**Proof.** Recall that  $V = I \times U$ , and denote by  $\mathcal{S}'(I \times U)$  the set on the right side of (2.2.31). The condition

$$\int_{I \times U} (\nabla \phi, \mathbf{f}) \cdot \mathbf{A}(\nabla v, \mathbf{h}) = 0$$

appearing in (2.2.15) can be rewritten more explicitly as

$$\int_{I \times U} (\nabla \phi \cdot \mathbf{s} \nabla v + (\mathbf{f} - \mathbf{m} \nabla \phi) \cdot \mathbf{s}^{-1} (\mathbf{h} - \mathbf{m} \nabla v)) = 0. \quad (2.2.32)$$

We first verify that  $\mathcal{S}(I \times U) \subseteq \mathcal{S}'(I \times U)$ . The space  $\{0\} \times L^2(I, L_{\text{sol},0}^2(U))$  is a subspace of  $\mathcal{C}_0(I \times U)$ . Hence, if (2.2.32) holds for every  $(\nabla \phi, \mathbf{h}) \in \mathcal{C}_0(I \times U)$ , then in particular

$$\forall \mathbf{f} \in L^2(I; L_{\text{sol},0}^2(U)), \quad \int_{I \times U} \mathbf{f} \cdot \mathbf{s}^{-1} (\mathbf{h} - \mathbf{m} \nabla v) = 0.$$

In other words,  $\mathbf{s}^{-1} (\mathbf{h} - \mathbf{m} \nabla v)$  belongs to the space orthogonal to  $L^2(I; L_{\text{sol},0}^2(U))$  in  $L^2(I \times U)$ . That is, there exists  $w \in L^2(I; H^1(U))$  such that

$$\mathbf{s}^{-1} (\mathbf{h} - \mathbf{m} \nabla v) = \nabla w,$$

and we deduce that for every  $(\nabla \phi, \mathbf{f}) \in \mathcal{C}_0(I \times U)$ ,

$$\int_{I \times U} (\nabla \phi \cdot (\mathbf{s} \nabla v + \mathbf{m} \nabla w) - w \partial_t \phi) = 0.$$

Denoting by  $\Delta_N^{-1}$  the solution operator for the Laplace equation on  $U$  with null Neumann boundary condition, we observe that for each  $\phi \in H_{\text{par},0}^1(I \times U)$ , the pair  $(\nabla\phi, \nabla\Delta_N^{-1}(\partial_t\phi))$  belongs to  $\mathcal{C}_0(I \times U)$ . The identity above therefore holds for arbitrary  $\phi \in H_{\text{par},0}^1(I \times U)$ , and we thus deduce that  $\partial_t w \in L^2(I, H^{-1}(U))$ . We can then integrate by parts in time and obtain that

$$\forall \phi \in H_{\text{par},0}^1(I \times U), \quad \int_{I \times U} (\nabla\phi \cdot (\mathbf{s}\nabla v + \mathbf{m}\nabla w) + \phi \partial_t w) = 0. \quad (2.2.33)$$

This property can be extended to arbitrary  $\phi \in L^2(I; H_0^1(U))$  by density. The additional requirement that  $(\nabla v, \mathbf{h}) \in \mathcal{C}(I \times U)$  brings

$$\forall \psi \in L^2(I; H_0^1(U)), \quad \int_{I \times U} (\nabla\psi \cdot (\mathbf{s}\nabla w + \mathbf{m}\nabla v) + \psi \partial_t v) = 0. \quad (2.2.34)$$

Setting

$$u := \frac{1}{2}(v + w), \quad u^* := \frac{1}{2}(v - w), \quad (2.2.35)$$

we deduce that  $u \in \mathcal{A}(I \times U)$ ,  $u^* \in \mathcal{A}^*(I \times U)$ , with

$$v = \frac{1}{2}(u + u^*), \quad \mathbf{h} = \mathbf{a}\nabla u - \mathbf{a}^\dagger \nabla u^*,$$

and this completes the proof that  $\mathcal{S}(I \times U) \subseteq \mathcal{S}'(I \times U)$ .

Conversely, given  $u \in \mathcal{A}(I \times U)$  and  $u^* \in \mathcal{A}^*(I \times U)$ , we set

$$v = u + u^*, \quad w := u - u^*, \quad \mathbf{h} := \mathbf{a}\nabla u - \mathbf{a}^\dagger \nabla u^* = \mathbf{s}\nabla w + \mathbf{m}\nabla v,$$

and observe that

$$\mathbf{a}\nabla u + \mathbf{a}^\dagger \nabla u^* = \mathbf{s}\nabla v + \mathbf{m}\nabla w.$$

The identities (2.2.33) and (2.2.34) follow. This implies that the condition (2.2.32) is satisfied for every  $(\nabla\phi, \mathbf{f}) \in \mathcal{C}_0(I \times U)$ , and hence that  $(\nabla v, \mathbf{h}) \in \mathcal{S}(I \times U)$ . We have thus shown that  $\mathcal{S}'(I \times U) \subseteq \mathcal{S}(I \times U)$ , which completes the proof.  $\square$

**Remark 2.9.** Note that for  $S = (\nabla u + \nabla u^*, \mathbf{a}\nabla u - \mathbf{a}^\dagger \nabla u^*) \in \mathcal{S}(V)$ , we have

$$\mathbf{A}S = (\mathbf{a}\nabla u + \mathbf{a}^\dagger \nabla u^*, \nabla u - \nabla u^*). \quad (2.2.36)$$

Indeed, (2.2.36) is implicit in the proof of Lemma 2.8 above and can also be checked by a direct computation. In particular,  $\nabla u$  can be written as one half the sum of the first component of  $S$  and second component of  $\mathbf{A}S$ , and  $\mathbf{a}\nabla u$  can be recovered similarly. This observation is needed in Section 2.5 in the construction of (approximate) correctors.

## 2.3 Functional inequalities

We collect here some functional inequalities which will be useful in the rest of the chapter. The two main results are a ‘‘multiscale’’ version of the Poincaré inequality, and a Caccioppoli-type inequality for elements of  $\mathcal{S}(\boxplus_n)$ . The proof of the latter is based on a parabolic version of the Helmholtz-Hodge decomposition of vector fields, which is of independent interest.

We first recall a useful version of the Poincaré inequality, for functions of the space variable only.

**Lemma 2.10.** *Let  $\psi \in L^2(\square_n)$  satisfy*

$$\int_{\square_n} \psi = 1.$$

*There exists  $C(d) < \infty$  such that, for every  $u \in H^1(\square_n)$ ,*

$$\left\| u - \int_{\square_n} u \psi \right\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C \|\psi\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \|\nabla u\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)}. \quad (2.3.1)$$

**Proof.** By the usual Poincaré inequality, all we need to show is that

$$\left| \int_{\square_n} u (1 - \psi) \right| \leq C \|\psi\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \|\nabla u\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)}. \quad (2.3.2)$$

Let  $w$  be the solution of the Neumann problem

$$\begin{cases} -\Delta w = 1 - \psi & \text{in } \square_n, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla w = 0 & \text{on } \partial \square_n. \end{cases}$$

Notice that this has a solution because  $\int_{\square_n} (1 - \psi) = 0$ , and we have the  $H^2$  estimate (see for instance [4, Lemma B.18])

$$\|\nabla w\|_{\underline{H}^1(\square_n)} \leq C \|1 - \psi\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C \left(1 + \|\psi\|_{\underline{L}^2(\square_n)}\right) \leq C \|\psi\|_{\underline{L}^2(\square_n)}.$$

Testing the equation for  $w$  by  $u$  thus yields

$$\begin{aligned} \left| \int_{\square_n} u (1 - \psi) \right| &= \left| \int_{\square_n} \nabla u \cdot \nabla w \right| \\ &\leq C \|\nabla u\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)} \|\nabla w\|_{\underline{H}^1(\square_n)} \\ &\leq C \|\psi\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \|\nabla u\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)}. \end{aligned}$$

□

For every parabolic cylinder  $V$  and  $f \in L^1(V)$ , we recall that we use the following shorthand notation for the spatial average of  $f$  over  $V$  :

$$(f)_V := \int_V f. \quad (2.3.3)$$

By the standard Poincaré inequality in  $1 + d$  coordinates, we have

$$\|u - (u)_{\square_n}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C 3^n \|\nabla u\|_{\underline{L}^2(\square_n)} + C 3^{2n} \|\partial_t u\|_{\underline{L}^2(\square_n)}. \quad (2.3.4)$$

In the context of parabolic equations, it is natural to try to preserve a matching between the number of times a function is differentiated in space and *half* the number of times it is differentiated in time. The estimate (2.3.4) is not consistent with this scaling. The purpose of the next proposition is to obtain such a bound—see also Corollary 2.13 below.

**Proposition 2.11.** *There exists  $C(d) < \infty$  such that, for every  $u \in H_{\text{par}}^1(\square_n)$  and  $\mathbf{g} \in L^2(\square_n; \mathbb{R}^d)$  satisfying  $\partial_t u = \nabla \cdot \mathbf{g}$ , we have*

$$\|u - (u)_{\square_n}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C \left( \|\nabla u\|_{\underline{L}^2(I_n; \underline{H}^{-1}(\square_n))} + \|\mathbf{g}\|_{\underline{L}^2(I_n; \underline{H}^{-1}(\square_n))} \right).$$

**Remark 2.12.** In the statement of Proposition 2.11 (and similarly for Corollary 2.13 and Proposition 2.16 below), the condition  $\partial_t u = \nabla \cdot \mathbf{g}$  is interpreted as

$$\forall \phi \in L^2(I_n; H_0^1(\square_n)), \quad \int_{\square_n} \nabla \phi \cdot \mathbf{g} = - \int_{\square_n} \phi \partial_t u.$$

Equivalently, this amounts to saying that  $(\nabla u, \mathbf{g}) \in \mathcal{C}(\square_n)$ . As an example, we can always take  $\mathbf{g} = \nabla \Delta_{\square_n}^{-1} \partial_t u$ , where  $\Delta_{\square_n}^{-1}$  is the solution operator for the Laplacian in  $\square_n$  with null Dirichlet boundary condition.

**Proof** (Proof of Proposition 2.11). Let  $\psi \in C_c^\infty(\square_n)$  be a smooth function of compact support in  $\square_n$  such that  $\int_{\square_n} \psi(x) dx = 1$ ,  $0 \leq \psi \leq 2$ , and

$$3^{-n} \|\nabla \psi\|_{L^\infty(\square_n)} + \|\nabla^2 \psi\|_{L^\infty(\square_n)} \leq C 3^{-2n}. \quad (2.3.5)$$

We write  $(u)_{\square_n, \psi} := \int_{\square_n} u(x) \psi(x) dx$  and  $(u)_{\square_n} := \int_{\square_n} u(x) dx$ . Using the Poincaré inequality (in the form given by Lemma 2.10) in time slices gives, for every  $t \in I_n$ ,

$$\|u(t, \cdot) - (u(t, \cdot))_{\square_n, \psi}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C \|\nabla u(t, \cdot)\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)}.$$

Thus

$$\int_{I_n} \int_{\square_n} |u(t, x) - (u(t, \cdot))_{\square_n, \psi}|^2 dx dt \leq C \int_{I_n} \|\nabla u(t, \cdot)\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)}^2 dt. \quad (2.3.6)$$

Since  $\psi \in H_0^1(U)$  and  $\nabla \psi \in H_0^1(U; \mathbb{R}^d)$ , we have, for every  $t \in I_n$ ,

$$\begin{aligned} |\partial_t (u(t, \cdot))_{\square_n, \psi}| &= \left| \int_{\square_n} \psi(x) \partial_t u(t, x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\square_n} \nabla \psi(x) \cdot \mathbf{g}(t, \cdot)(x) dx \right| \\ &\leq C \|\nabla \psi\|_{\underline{H}^1(\square_n)} \|\mathbf{g}(t, \cdot)\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)} \\ &\leq C 3^{-2n} \|\mathbf{g}(t, \cdot)\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)}. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I_n} \left| (u(t, \cdot))_{\square_n, \psi} - \int_{I_n \times \square_n} \psi(x) u(t, x) dx dt \right| \\ \leq \int_{I_n} |\partial_t (u(t, \cdot))_{\square_n, \psi}| dt \\ \leq C 3^{-2n} \int_{I_n} \|\mathbf{g}(t, \cdot)\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)} dt \\ = C \int_{I_n} \|\mathbf{g}(t, \cdot)\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)} dt. \end{aligned}$$

Combining this with (2.3.6), we obtain

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \int_{\square_n} \left| u(t, x) - \int_{I_n \times \square_n} \psi(y) u(s, y) ds dy \right|^2 dx dt \\ \leq C \int_{I_n} \|\nabla u(t, \cdot)\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)}^2 dt + \left( \int_{I_n} \|\mathbf{g}(t, \cdot)\|_{\underline{H}^{-1}(\square_n)} dt \right)^2. \end{aligned}$$

Since

$$\|u - (u)_{\square_n}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|u - c\|_{\underline{L}^2(\square_n)},$$

this yields the announced result.  $\square$



**Corollary 2.13.** *There exists  $C(d) < \infty$  such that, for every  $u \in H_{\text{par}}^1(\square_n)$  and  $\mathbf{g} \in L^2(\square_n, \mathbb{R}^d)$  satisfying  $\partial_t u = \nabla \cdot \mathbf{g}$ ,*

$$\|u - (u)_{\square_n}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C3^n \left( \|\nabla u\|_{\underline{L}^2(\square_n)} + \|\mathbf{g}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \right). \quad (2.3.7)$$

**Proof.** This follows from Proposition 2.11 and the inequalities

$$\|v\|_{\underline{L}^2(I_n; \underline{H}^{-1}(\square_n))} \leq \|v\|_{\underline{L}^2(I_n; \widehat{H}^{-1}(\square_n))} \leq C3^n \|v\|_{\underline{L}^2(\square_n)}.$$

□

**Remark 2.14.** Recall from Remark 2.12 that in the statement of Corollary 2.13, we can take  $\mathbf{g} = \nabla \Delta_{\square_n}^{-1} \partial_t u$ . Moreover, there exists  $C(d) < \infty$  such that, for every  $f \in L^2(I_n; H^{-1}(\square_n))$ ,

$$C^{-1} \|f\|_{\underline{L}^2(I_n; \underline{H}^{-1}(\square_n))} \leq \|\nabla \Delta_{\square_n}^{-1} f\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C \|f\|_{\underline{L}^2(I_n; \underline{H}^{-1}(\square_n))}.$$

Indeed, by the standard Poincaré inequality, the norm  $\|\cdot\|_{\underline{H}^1(\square_n)}$  is equivalent to the norm  $u \mapsto \|\nabla u\|_{\underline{L}^2(\square_n)}$  on  $H_0^1(\square_n)$ , and moreover,

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \int_{\square_n} f \phi : \phi \in L^2(I_n; H_0^1(\square_n)), \|\nabla \phi\|_{L^2(\square_n)} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{\square_n} \nabla \phi \cdot \nabla \Delta_{\square_n}^{-1} f : \phi \in L^2(I_n; H_0^1(\square_n)), \|\nabla \phi\|_{L^2(\square_n)} \leq 1 \right\} \\ &= \|\nabla \Delta_{\square_n}^{-1} f\|_{\underline{L}^2(\square_n)}. \end{aligned}$$

In particular, on the right side of (2.3.7), we can replace the term  $\|\mathbf{g}\|_{\underline{L}^2(\square_n)}$  with the quantity  $\|\partial_t u\|_{\underline{L}^2(I_n; \underline{H}^{-1}(\square_n))}$ .

The next proposition allows to obtain a control of the  $H_{\text{par}}^{-1}(V)$  norm of a function from a knowledge of its spatial averages over large scales. For each  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ , we set

$$\mathcal{Z}_m := [(3^{2m}\mathbb{Z}) \times (3^m\mathbb{Z}^d)] \cap \square_n. \quad (2.3.8)$$

Although  $\mathcal{Z}_m$  depends on  $n$ , we keep this dependence implicit in the notation, since its identity will be clear from the context. This is a parabolic version of the inequality which first appeared in [5, Proposition 6.1].

**Proposition 2.15** (Multiscale Poincaré inequality). *There exists  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $n \geq 1$  and  $f \in L^2(\square_n)$ ,*

$$\|f\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_n)} \leq C \|f\|_{\underline{L}^2(\square_n)} + C \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |(f)_{z+\square_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Proof** (Proof of Proposition 2.15). Recalling (2.1.15), we fix  $g \in H_{\text{par}}^1(\square_n)$  such that

$$\|g\|_{\underline{H}_{\text{par}}^1(\square_n)} \leq 1, \quad (2.3.9)$$

and decompose the proof into two steps.

*Step 1.* In this step, we show that there exists a constant  $C(d) < \infty$  such that, for every  $m \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$\sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \int_{z+\square_m} |g - (g)_{z+\square_m}|^2 \leq C |\square_n| 3^{2m}. \quad (2.3.10)$$

By Corollary 2.13 and Remark 2.14, the left side above is bounded by

$$C 3^{2m} |\square_m| \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \left( \|\nabla g\|_{\underline{L}^2(z+\square_m)}^2 + \|\partial_t g\|_{\underline{L}^2(z_0+I_m, \underline{H}^{-1}(z'+\square_m))}^2 \right),$$

where we write  $z = (z_0, z') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$ . The contribution of the first term is easily estimated, since by (2.3.9),

$$|\square_m| \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \|\nabla g\|_{\underline{L}^2(z+\square_m)}^2 = \int_{\square_n} |\nabla g|^2 \leq |\square_n|.$$

For the second term, we write

$$\begin{aligned} & \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \|\partial_t g\|_{\underline{L}^2(z_0+I_m, \underline{H}^{-1}(z'+\square_m))}^2 \\ &= \sup \left\{ \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \left( \int_{z+\square_m} \phi_z \partial_t g \right)^2 : \phi_z \in L^2(z_0 + I_m; H_0^1(z' + \square_m)), \|\nabla \phi_z\|_{\underline{L}^2(z+\square_m)} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

For  $\phi_z$  satisfying the conditions in the supremum above, we have

$$\begin{aligned} |\square_n|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \left( \int_{z+\square_m} \phi_z \partial_t g \right)^2 &= \int_{\square_n} \partial_t g \left( \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \phi_z \int_{z+\square_m} \phi_z \partial_t g \right) \\ &\leq \|\partial_t g\|_{\underline{L}^2(I_n; \underline{H}^{-1}(\square_n))} \left\| \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \phi_z \int_{z+\square_m} \phi_z \partial_t g \right\|_{\underline{L}^2(I_n; \underline{H}^1(\square_n))}. \end{aligned}$$

Notice that, by (2.3.9), the first term on the right side of the previous inequality is bounded by 1. Moreover, by the normalization of the functions  $\phi_z$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \phi_z \int_{z+\square_m} \phi_z \partial_t g \right\|_{\underline{L}^2(I_n; \underline{H}^1(\square_n))}^2 &\leq C \left\| \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \nabla \phi_z \int_{z+\square_m} \phi_z \partial_t g \right\|_{\underline{L}^2(\square_n)}^2 \\ &\leq C \frac{|\square_m|}{|\square_n|} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \left( \int_{z+\square_m} \phi_z \partial_t g \right)^2. \end{aligned}$$

Combining the last three displays, we arrive at

$$\sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \|\partial_t g\|_{\underline{L}^2(z_0+I_m, \underline{H}^{-1}(z'+\square_m))}^2 \leq C \frac{|\square_n|}{|\square_m|},$$

and this completes the proof of (2.3.10).

*Step 2.* We aim to control  $\int_{\square_n} fg$ , which we decompose into

$$\int_{\square_n} fg = \int_{\square_n} f(g - (g)_{\square_n}) + (f)_{\square_n} (g)_{\square_n}. \quad (2.3.11)$$

By the definition of the  $H_{\text{par}}^1$  norm in (2.1.10), we have  $(g)_{\square_n} \leq 3^n$ , and therefore, by Jensen's inequality,

$$(f)_{\square_n} (g)_{\square_n} \leq 3^n |(f)_{\square_n}| \leq C 3^{n-1} \left( |\mathcal{Z}_{n-1}|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_{n-1}} |(f)_{z+\square_{n-1}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3.12)$$

We then proceed to decompose the first integral on the right side of (2.3.11) recursively. For every  $m \in \{0, \dots, n-1\}$  and  $z \in \mathcal{Z}_{m+1}$ , we have

$$\begin{aligned} \int_{z+\square_{m+1}} f \cdot (g - (g)_{z+\square_{m+1}}) &= \sum_{y \in \mathcal{Z}_m \cap (z+\square_{m+1})} \int_{y+\square_m} f \cdot (g - (g)_{y+\square_m}) \\ &\quad + |\square_m| \sum_{y \in \mathcal{Z}_m \cap (z+\square_{m+1})} ((g)_{y+\square_m} - (g)_{z+\square_{m+1}}) \cdot (f)_{y+\square_m}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Summing over  $z \in \mathcal{Z}_{m+1}$  and using Hölder's inequality, we get

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathcal{Z}_{m+1}} \int_{z+\square_{m+1}} f \cdot (g - (g)_{z+\square_{m+1}}) &\leq \sum_{y \in \mathcal{Z}_m} \int_{y+\square_m} f \cdot (g - (g)_{y+\square_m}) \\ &\quad + |\square_m| \left( \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_{m+1} \\ y \in \mathcal{Z}_m \cap (z+\square_{m+1})}} |(g)_{y+\square_m} - (g)_{z+\square_{m+1}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{y \in \mathcal{Z}_m} |(f)_{y+\square_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

By Jensen's inequality, we have, for each  $z \in \mathcal{Z}_{m+1}$ ,

$$\sum_{y \in \mathcal{Z}_m \cap (z+\square_{m+1})} |(g)_{y+\square_m} - (g)_{z+\square_{m+1}}|^2 \leq \sum_{y \in \mathcal{Z}_m \cap (z+\square_{m+1})} \int_{y+\square_m} |g - (g)_{z+\square_{m+1}}|^2,$$

and thus, by (2.3.10),

$$\sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_{m+1} \\ y \in \mathcal{Z}_m \cap (z+\square_{m+1})}} |(g)_{y+\square_m} - (g)_{z+\square_{m+1}}|^2 \leq C \frac{|\square_n|}{|\square_m|} 3^{2m}.$$

Using also that  $|\mathcal{Z}_m| = |\square_n| / |\square_m|$  and combining with (2.3.13), we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathcal{Z}_{m+1}} \int_{z+\square_{m+1}} f \cdot (g - (g)_{z+\square_{m+1}}) \\ \leq \sum_{y \in \mathcal{Z}_m} \int_{y+\square_m} f \cdot (g - (g)_{y+\square_m}) + C |\square_n| 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{y \in \mathcal{Z}_m} |(f)_{y+\square_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Summing over  $m \in \{0, \dots, n-1\}$  yields

$$\begin{aligned} \int_{\square_n} f (g - (g)_{\square_n}) \\ \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}_0} \int_{z+\square_0} f \cdot (g - (g)_{z+\square_0}) + C |\square_n| \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{y \in \mathcal{Z}_m} |(f)_{y+\square_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Hence, by Hölder's inequality and (2.3.10),

$$\begin{aligned} & \int_{\square_n} f(g - (g)_{\square_n}) \\ & \leq C |\square_n|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\square_n} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C |\square_n| \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{y \in \mathcal{Z}_m} |(f)_{y+\square_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dividing by  $|\square_n|$  and combining with (2.3.11)-(2.3.12), we obtain

$$\int_{\square_n} fg \leq C \|f\|_{\underline{L}^2(\square_n)} + C \sum_{m=0}^n 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{y \in \mathcal{Z}_m} |(f)_{y+\square_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Taking the supremum over all  $g$  satisfying (2.3.9) yields the result.  $\square$

The name ‘‘multiscale Poincaré inequality’’ for Proposition 2.15 is best understood in conjunction with the following statement.

**Proposition 2.16.** *There exists a constant  $C(d) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u \in H_{\text{par}}^1(\square_{n+1})$  and  $\mathbf{g} \in L^2(\square_{n+1}; \mathbb{R}^d)$  satisfying  $\partial_t u = \nabla \cdot \mathbf{g}$ , we have*

$$\|u - (u)_{\square_n}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C \|\nabla u\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_{n+1})} + C \|\mathbf{g}\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_{n+1})}.$$

**Remark 2.17.** It is clear that the proof of Proposition 2.16 can be adapted to show that for every  $r > 0$ , there exists a constant  $C(r, d) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u \in H_{\text{par}}^1(\square_n)$  and  $\mathbf{g} \in L^2(\square_n; \mathbb{R}^d)$  satisfying  $\partial_t u = \nabla \cdot \mathbf{g}$ , we have

$$\|u - (u)_{\square_{n-r}}\|_{\underline{L}^2(\square_{n-r})} \leq C \|\nabla u\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_n)} + C \|\mathbf{g}\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_n)}.$$

Although one can expect that the estimate above still holds for  $r = 0$ , we leave it as an open question here, and content ourselves with an interior estimate.

Combining Propositions 2.15 and 2.16 allows to estimate the (interior)  $L^2$  oscillation of  $u$  in terms of spatial averages of  $\nabla u$  and  $\mathbf{g}$  (see also [5, Proposition 6.1]). The estimate yields better interior information than the ‘‘single-scale’’ Poincaré inequality provided by Proposition 2.11 as soon as the spatial averages of  $\nabla u$  and  $\mathbf{g}$  display non-trivial cancellations over large scales. This feature will be crucial to our subsequent arguments.

Before turning to the proof of Proposition 2.16, we recall the classical  $H^2$  estimate for solutions of the heat equation. For simplicity, we state it using periodic boundary conditions in the space variable. We denote the corresponding function spaces by  $H_{\#}^1(U)$ ,  $H_{\text{par},\#}^1(I \times U)$ , etc.

**Lemma 2.18** ( $H^2$  estimate for the Cauchy problem). *There exists  $C(d) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$ , if  $f \in L^2(\square_n)$  and  $u \in H_{\text{par},\#}^1(\square_n)$  solves the Cauchy problem*

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = f & \text{in } \square_n, \\ u = 0 & \text{on } \left\{ -\frac{3^{2n}}{2} \right\} \times \square_n, \end{cases} \quad (2.3.14)$$

then  $\nabla u \in H_{\text{par},\#}^1(\square_n)$  and

$$3^{-n} \|u\|_{\underline{H}_{\text{par},\#}^1(\square_n)} + \|\nabla u\|_{\underline{H}_{\text{par},\#}^1(\square_n)} \leq C \|f\|_{\underline{L}^2(\square_n)}. \quad (2.3.15)$$

**Proof.** By scaling, it suffices to prove the result for  $n = 0$ . For each  $s \in I_0$ , we test equation (2.3.14) against the function  $(t, x) \mapsto \mathbb{1}_{t < s} u(t, x)$  and get

$$\int_{(-\frac{1}{2}, s) \times \square_0} (u \partial_t u + |\nabla u|^2) = \int_{(-\frac{1}{2}, s) \times \square_0} u f,$$

which implies

$$\frac{1}{2} \|u(s, \cdot)\|_{L^2(\square_0)}^2 + \int_{(-\frac{1}{2}, s) \times \square_0} |\nabla u|^2 \leq \|u\|_{L^2(\square_0)} \|f\|_{L^2(\square_0)}.$$

Taking the supremum over  $s \in I_0$ , observing that

$$\sup_{s \in I_0} \|u(s, \cdot)\|_{L^2(\square_0)} \leq \|u\|_{L^2(\square_0)}$$

and using Young's inequality, we obtain

$$\|u\|_{L^2(\square_0)} + \|\nabla u\|_{L^2(\square_0)} \leq C \|f\|_{L^2(\square_0)}.$$

We now turn to the estimation of  $\|\nabla^2 u\|_{L^2(\square_0)}$ . We first observe that by integration by parts, we have  $\|\nabla^2 u\|_{L^2(\square_0)} = \|\Delta u\|_{L^2(\square_0)}$ . Moreover, using (2.3.14), we get

$$\|\Delta u\|_{L^2(\square_0)}^2 = \int_{\square_0} \Delta u (f + \partial_t u) = \int_{\square_0} f \Delta u - \int_{\square_0} \nabla u \cdot \partial_t \nabla u,$$

with

$$\int_{\square_0} \nabla u \cdot \partial_t \nabla u = \frac{1}{2} \|\nabla u(\frac{1}{2}, \cdot)\|_{L^2(\square_0)}^2 \geq 0,$$

and therefore

$$\|\Delta u\|_{L^2(\square_0)} \leq \|f\|_{L^2(\square_0)}. \quad (2.3.16)$$

We also need bounds on the time derivatives of  $u$  and  $\nabla u$ . Note that

$$\begin{aligned} \|\partial_t \nabla u\|_{L^2(I_0; H_{\#}^{-1}(\square_0))} &= \sup \left\{ \int_{\square_0} \partial_t \nabla u \cdot F : \|F\|_{L^2(I_0; H_{\#}^1(\square_0))} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{\square_0} \partial_t u \nabla \cdot F : \|F\|_{L^2(I_0; H_{\#}^1(\square_0))} \leq 1 \right\} \\ &\leq \|\partial_t u\|_{L^2(\square_0)}, \end{aligned}$$

and we can estimate the  $L^2$ -norm of  $\partial_t u$  using (2.3.14) and (2.3.16) :

$$\|\partial_t u\|_{L^2(\square_0)} = \|f + \Delta u\|_{L^2(\square_0)} \leq 2 \|f\|_{L^2(\square_0)}.$$

The obvious bound

$$\|\partial_t u\|_{L^2(I_0; H_{\#}^{-1}(\square_0))} \leq C \|\partial_t u\|_{L^2(\square_0)}$$

completes the proof of (2.3.15).  $\square$

**Proof** (Proof of Proposition 2.16). By homogeneity, it suffices to show the result for  $n = 0$ . Let  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{1+d})$  be a smooth function with compact support in  $\square_{-2}$  and such that  $\int_{\mathbb{R}^{1+d}} \psi = 1$ . We decompose the proof into three steps.

*Step 1.* Let  $\eta \in C_c^\infty(\square_1)$  be a smooth function with compact support in  $\square_{3/4}$  and such that  $\eta \equiv 1$  on  $\square_{1/2}$ . In this step, we show that there exists a constant  $C(d, \psi, \eta) < \infty$  such that, for every  $u \in L^2(\square_1)$ ,

$$\|\eta(u - u \star \psi)\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \leq C \left( \|\nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} + \|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \right), \quad (2.3.17)$$

For each  $n \in \mathbb{N}$ , we set

$$\psi_n := 3^{n(2+d)} \psi(3^{2n}t, 3^n x).$$

Since the function  $\psi_{-1} - \psi_0$  is compactly supported and of mean zero, we can use e.g. [4, Lemma 5.7] (in  $1+d$  dimensions) to rewrite it in the form

$$\psi_{-1} - \psi_0 = \partial_t \mathbf{h}^\circ + \nabla \cdot \mathbf{h}',$$

where  $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^\circ, \mathbf{h}') \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{1+d}; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  is supported in  $\square_{-2}$  (with  $\mathbf{h}^\circ$  taking values in  $\mathbb{R}$  and  $\mathbf{h}'$  in  $\mathbb{R}^d$ ). For each  $n \in \mathbb{N}$ , we denote

$$\mathbf{h}_n(t, x) = (\mathbf{h}_n^\circ, \mathbf{h}_n')(t, x) := 3^{n(2+d)} \mathbf{h}(3^{2n}t, 3^n x),$$

so that

$$\psi_{n-1} - \psi_n = 3^{-2n} \partial_t \mathbf{h}_n^\circ + 3^{-n} \nabla \cdot \mathbf{h}_n'.$$

Since  $u \star \psi_n \rightarrow u$  in  $L^2(\square_{3/4})$ , we can use the triangle inequality to bound

$$\|\eta(u - u \star \psi)\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|\eta(u \star \psi_{n-1} - u \star \psi_n)\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)}. \quad (2.3.18)$$

We next observe that, for every  $z \in \square_{3/4}$ ,

$$\begin{aligned} (u \star \psi_{n-1} - u \star \psi_n)(z) &= \int_{\square_1} u(y) (3^{-2n} \partial_t \mathbf{h}_n^\circ + 3^{-n} \nabla \cdot \mathbf{h}_n')(z - y) dy \\ &= \int_{\square_1} (3^{-2n} \partial_t u(y) \mathbf{h}_n^\circ(z - y) + 3^{-n} \nabla u(y) \cdot \mathbf{h}_n'(z - y)) dy \\ &= 3^{-n} \int_{\square_1} \nabla u(y) \cdot \mathbf{h}_n'(z - y) dy \\ &\quad - 3^{-2n} \int_{\square_1} \mathbf{g}(y) \cdot \nabla \mathbf{h}_n^\circ(z - y) dy, \end{aligned}$$

We fix  $f \in H_{\text{par}}^1(\square_1)$ , set  $\tilde{f} := \eta f$ , and compute

$$\int_{\square_1} \eta(u \star \psi_{n-1} - u \star \psi_n) f = 3^{-n} \int_{\square_1} \nabla u \cdot (\tilde{f} \star \mathbf{h}_n') - 3^{-2n} \int_{\square_1} \mathbf{g} \cdot (\tilde{f} \star \nabla \mathbf{h}_n^\circ).$$

One can check that there exists a constant  $C(d, \psi, \mathbf{h}) < \infty$  such that

$$\|\tilde{f} \star \mathbf{h}_n'\|_{H_{\text{par}}^1(\square_1)} + 3^{-n} \|\tilde{f} \star \nabla \mathbf{h}_n^\circ\|_{H_{\text{par}}^1(\square_1)} \leq C \|f\|_{H_{\text{par}}^1(\square_1)}.$$

Summarizing, we have thus shown that

$$\|\eta(u \star \psi_{n-1} - u \star \psi_n)\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \leq C 3^{-n} \left( \|\nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} + \|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \right).$$

Summing over  $n \in \mathbb{N}$  in (2.3.18), we obtain (2.3.17).

*Step 2.* Define

$$c(u) := u \star \psi(0).$$

In this step, we show that there exists a constant  $C(d, \psi, \eta) < \infty$  such that

$$\|\eta(u - c(u))\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \leq C \left( \|\nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} + \|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \right). \quad (2.3.19)$$

This is an immediate consequence of the fact that there exists a constant  $C(d, \psi) < \infty$  such that, for every  $y, z \in \square_{3/4}$ ,

$$|u \star \psi(z) - u \star \psi(y)| \leq C \left( \|\nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} + \|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \right). \quad (2.3.20)$$

The proof of (2.3.20) is very similar to the previous step, only simpler : we represent the function  $\psi(\cdot - z) - \psi(\cdot - y)$  in the form

$$\partial_t \widetilde{\mathbf{h}}^\circ + \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{h}}',$$

with  $(\widetilde{\mathbf{h}}^\circ, \widetilde{\mathbf{h}}') \in C_c^\infty(\square_1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ , and then obtain (2.3.20) thanks to an integration by parts.

*Step 3.* For concision, we write

$$\widetilde{u} := u - c(u).$$

Let  $\chi \in C_c^\infty(\square_1)$  be a smooth function with compact support in  $\square_{1/2}$  and such that  $\chi \equiv 1$  on  $\square_0$ . In this step, we show that there exists a constant  $C(d, \psi, \eta, \chi) < \infty$  such that

$$\|\chi \widetilde{u}\|_{L^2(\square_1)} \leq C \left( \|\nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} + \|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \right). \quad (2.3.21)$$

Let  $w \in H_{\text{par}, \#}^1(\square_1)$  solve the Cauchy problem

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)w = \chi \widetilde{u} & \text{in } \square_1, \\ w = 0 & \text{on } \{-\frac{9}{2}\} \times \square_1. \end{cases} \quad (2.3.22)$$

By Lemma 2.18, there exists a constant  $C(d) < \infty$  such that

$$\|w\|_{H_{\text{par}, \#}^1(\square_1)} + \|\nabla w\|_{H_{\text{par}, \#}^1(\square_1)} \leq C \|\chi \widetilde{u}\|_{L^2(\square_1)}. \quad (2.3.23)$$

Testing the equation (2.3.22) against  $\chi \widetilde{u}$  and integrating by parts gives

$$\begin{aligned} \|\chi \widetilde{u}\|_{L^2(\square_1)}^2 &= \int_{\square_1} (\nabla w \cdot \nabla (\chi \widetilde{u}) - w \partial_t (\chi \widetilde{u})) \\ &= \int_{\square_1} (\nabla w \cdot \nabla (\chi \widetilde{u}) + \nabla (\chi w) \cdot \mathbf{g} - \partial_t \chi w \widetilde{u}) \\ &\leq \|\nabla w\|_{H_{\#, \text{par}}^1(\square_1)} \left( \|\nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} + \|\widetilde{u} \nabla \chi\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} + \|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \right) \\ &\quad + \|w\|_{H_{\#, \text{par}}^1(\square_1)} \left( \|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} + \|\widetilde{u} \nabla \chi\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \right). \end{aligned}$$

Using the result of the previous step and (2.3.23), we obtain (2.3.21). This completes the proof of Proposition 2.16, since

$$\|u - (u)_{\square_0}\|_{L^2(\square_0)} \leq \|u - c(u)\|_{L^2(\square_0)} \leq \|\chi(u - c(u))\|_{L^2(\square_0)}.$$

□

Finally, we prove a Caccioppoli-type inequality for elements of  $\mathcal{S}(\square_n)$ .

**Proposition 2.19.** *There exists a constant  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $S \in \mathcal{S}(\square_{n+1})$ ,*

$$\|S\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C3^{-n} \|S\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_{n+1})}.$$

In order to prove this result, we first describe more explicitly the structure of elements of  $\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)$ .

**Lemma 2.20** (Identification of  $\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}$ ). *There exists a constant  $C(I, U, d) < \infty$  and, for each  $u^* \in L^2(I \times U)$ , a pair  $(w, w^*) \in L^2(I; H_0^1(U)) \times L^2(I; H^{-1}(U))$  such that*

$$u^* = \partial_t w + w^*, \quad (2.3.24)$$

with

$$\|w\|_{L^2(I; H^1(U))} + \|w^*\|_{L^2(I; H^{-1}(U))} \leq C \|u^*\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)}. \quad (2.3.25)$$

Let  $V \subseteq V' \subseteq I \times U$  be subdomains of  $I \times U$  such that  $\bar{V} \subseteq V'$ . If  $u^*$  vanishes outside of  $V$ , then there exists a pair  $(w, w^*) \in L^2(I; H_0^1(U)) \times L^2(I; H^{-1}(U))$  satisfying (2.3.24)-(2.3.25) for a constant  $C(V, V', I, U, d) < \infty$ , and such that  $w$  and  $w^*$  vanish outside of  $V'$ .

**Proof.** Denote by  $\Delta_{\square_n}^{-1}$  the solution operator for the Laplacian in  $\square_n$  with null Dirichlet boundary condition. We observe that

$$(u, v) \mapsto \int_{I \times U} \left( |U|^{-\frac{2}{d}} uv + \nabla u \cdot \nabla v + \nabla \Delta_U^{-1} \partial_t u \cdot \nabla \Delta_U^{-1} \partial_t v \right)$$

is a scalar product for the Hilbert space  $H_{\text{par}}^1(I \times U)$ . By the Riesz representation theorem, there exists a unique  $u \in H_{\text{par}}^1(I \times U)$  such that, for every  $v \in H_{\text{par}}^1(I \times U)$ ,

$$\int_{I \times U} u^* v = \int_{I \times U} \left( |U|^{-\frac{2}{d}} uv + \nabla u \cdot \nabla v + \nabla \Delta_U^{-1} \partial_t u \cdot \nabla \Delta_U^{-1} \partial_t v \right),$$

and moreover, by testing this identity with  $v = u$ , we obtain

$$\|u\|_{H_{\text{par}}^1(I \times U)} \leq C \|u^*\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)}. \quad (2.3.26)$$

We set

$$w := \Delta_U^{-1} \partial_t u \quad \text{and} \quad w^* := |U|^{-\frac{2}{d}} u - \Delta u.$$

The estimate (2.3.25) follows from (2.3.26). For  $v \in H_{\text{par}}^1(I \times U)$  with compact support in  $I \times U$ , we have

$$\int_{I \times U} u^* v = \int_{I \times U} (w^* v + \partial_t w v).$$

Since  $u^* \in L^2(I \times U)$ , we can argue by density to infer that  $w^* + \partial_t w \in L^2(I \times U)$ . The identity above then implies (2.3.24).

If  $u^*$  vanishes outside of  $V \subseteq I \times U$ , then we select a smooth cutoff function  $\eta$  such that  $\eta \equiv 1$  on  $V$  and  $\eta \equiv 0$  outside of  $V'$ , and we write

$$\begin{aligned} u^* &= \eta u^* = \eta(\partial_t w + w^*) \\ &= \partial_t(\eta w) + \eta w^* - w \partial_t \eta. \end{aligned}$$

This decomposition yields the second part of the statement, by standard comparisons of norms.  $\square$



**Proof** (Proof of Proposition 2.19). By scaling, we may fix  $n = 0$ . In order to localize an element  $S \in \mathcal{S}(\square_1)$  into an element of  $\mathcal{C}_0(\square_1)$  and thus be able to use the orthogonality property in the definition of the set  $\mathcal{S}(\square_1)$ , see (2.2.15), we introduce a version of the Helmholtz-Hodge decomposition of  $S$  which is adapted to the parabolic setting. In order to minimize difficulties due to boundary conditions, we work with functions which are periodic in the space variable. In the course of the proof, we will use the elementary variant of Proposition 2.3 for the standard heat operator with space-periodic boundary condition.

We decompose the proof into four steps. The first two steps are devoted to the construction of the Helmholtz-Hodge decomposition of  $S$ , and its estimation in relevant norms. The last step uses this representation to localize  $S$  to an element of  $\mathcal{C}_0(\square_1)$  and concludes the proof.

*Step 1.* We write  $S = (\nabla u, \mathbf{g}) \in \mathcal{S}(\square_1)$ . We recall that since  $\mathcal{S}(\square_1) \subset \mathcal{C}(\square_1)$ , we have  $\partial_t u = \nabla \cdot \mathbf{g}$ , see (2.2.9). The function  $u$  is determined up to an additive constant, which we fix so that

$$\int_{\square_{3/4}} u = 0.$$

Let  $\eta \in C_c^\infty(\square_1)$  be a smooth function with compact support in  $\square_{3/4}$ , such that  $0 \leq \eta \leq 1$  and  $\eta \equiv 1$  on  $\square_{1/2}$ . We set

$$\tilde{u} := \eta u, \quad \text{and} \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_j := \eta \mathbf{g}_j.$$

For each  $j \in \{1, \dots, d\}$ , let  $T_{0j} \in H_{\text{par}, \#}^1(\square_1)$  be the unique solution of

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)T_{0j} = \tilde{\mathbf{g}}_j - \partial_{x_j} \tilde{u} & \text{in } \square_1, \\ T_{0j} = 0 & \text{on } \{-\frac{9}{2}\} \times \square_1. \end{cases} \quad (2.3.27)$$

By Lemma 2.20 there exist  $(w_j, w_j^*) \in L^2(I_1; H_0^1(\square_1)) \times L^2(I_1; H^{-1}(\square_1))$  which vanish in a neighborhood of  $\partial \square_1$  and satisfy

$$\tilde{\mathbf{g}}_j - \partial_{x_j} \tilde{u} = \partial_t w_j + w_j^*,$$

with

$$\|w_j\|_{L^2(I_1; H^1(\square_1))} + \|w_j^*\|_{L^2(I_1; H^{-1}(\square_1))} \leq C \|\tilde{\mathbf{g}}_j - \partial_{x_j} \tilde{u}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)}.$$

Since  $(w_j, w_j^*)$  vanish in a neighborhood of  $\partial \square_1$ , we can interpret this pair as an element of

$$L^2(I_1; H_{\#}^1(\square_1)) \times L^2(I_1; H_{\#}^{-1}(\square_1)),$$

with the estimate

$$\|w_j\|_{L^2(I_1; H_{\#}^1(\square_1))} + \|w_j^*\|_{L^2(I_1; H_{\#}^{-1}(\square_1))} \leq C \|\tilde{\mathbf{g}}_j - \partial_{x_j} \tilde{u}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)}.$$

Since  $\tilde{\mathbf{g}}_j - \partial_{x_j} \tilde{u} \in L^2(\square_1)$ , it is clear that  $\partial_t w_j \in L^2(I_1; H_{\#}^{-1}(\square_1))$ , and we therefore deduce that  $w_j \in H_{\#, \text{par}, \sqcup}^1(\square_1)$ . Moreover, by Proposition 2.3 applied to the standard heat operator, there exist a constant  $C(d) < \infty$  and  $T'_{0j} \in H_{\#, \text{par}, \sqcup}^1(\square_1)$  such that

$$(\partial_t - \Delta)T'_{0j} = -\Delta w_j + w_j^*,$$

with

$$\begin{aligned} \|T'_{0j}\|_{L^2(\square_1)} + \|\nabla T'_{0j}\|_{L^2(\square_1)} &\leq C \left( \|w_j\|_{L^2(I_1; H^1(\square_1))} + \|w_j^*\|_{L^2(I_1; H^{-1}(\square_1))} \right) \\ &\leq C \|\tilde{\mathbf{g}}_j - \partial_{x_j} \tilde{u}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)}. \end{aligned}$$

We thus have

$$(\partial_t - \Delta)(w_j + T'_{0j} - T_{0j}) = 0,$$

with  $w_j + T'_{0j} - T_{0j} \in H^1_{\#\text{par},\sqcup}(\square_1)$ . Therefore,

$$T_{0j} = w_j + T'_{0j},$$

and

$$\|T_{0j}\|_{L^2(\square_1)} + \|\nabla T_{0j}\|_{L^2(\square_1)} \leq C \|\tilde{\mathbf{g}}_j - \partial_{x_j} \tilde{u}\|_{\widehat{H}^{-1}_{\text{par}}(\square_1)}.$$

It is clear that  $\|\tilde{\mathbf{g}}_j\|_{H^{-1}_{\text{par}}(\square_1)} \leq C \|\mathbf{g}_j\|_{H^{-1}_{\text{par}}(\square_1)}$ . By Proposition 2.16, Remark 2.17 and the comparison

$$\|\tilde{u}\|_{H^{-1}_{\text{par}}(\square_1)} \leq \|\tilde{u}\|_{L^2(\square_1)} \leq \|u\|_{L^2(\square_{3/4})} = \|u - (u)_{\square_{3/4}}\|_{L^2(\square_{3/4})},$$

we obtain

$$\|T_{0j}\|_{L^2(\square_1)} + \|\nabla T_{0j}\|_{L^2(\square_1)} \leq C \left( \|\nabla u\|_{\widehat{H}^{-1}_{\text{par}}(\square_1)} + \|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}^{-1}_{\text{par}}(\square_1)} \right). \quad (2.3.28)$$

*Step 2.* For each  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ , we define  $T_{ij} \in H^1_{\text{par},\#}(\square_1)$  as the solution of

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)T_{ij} = \partial_{x_i} \tilde{\mathbf{g}}_j - \partial_{x_j} \tilde{\mathbf{g}}_i & \text{in } \square_1, \\ T_{ij} = 0 & \text{on } \{-\frac{9}{2}\} \times \square_1. \end{cases}$$

The solution  $T_{ij}$  is well-defined since the right-hand side belongs to  $L^2(I_1; H^{-1}_{\#}(\square_1))$ . We now estimate the  $L^2$  norm of  $T_{ij}$  using Lemma 2.18 and duality. We define  $\phi_{ij} \in H^1_{\text{par},\#}(\square_1)$  the solution of the backwards heat equation

$$\begin{cases} -(\partial_t + \Delta)\phi_{ij} = T_{ij} & \text{in } \square_1, \\ \phi_{ij} = 0 & \text{on } \{\frac{9}{2}\} \times \square_1. \end{cases} \quad (2.3.29)$$

By Lemma 2.18, we have

$$\|\nabla \phi_{ij}\|_{H^1_{\text{par},\#}(\square_1)} \leq C \|T_{ij}\|_{L^2(\square_1)}.$$

Testing the equation (2.3.29) against  $T_{ij}$ , we get

$$\|T_{ij}\|_{L^2(\square_1)}^2 = \int_{\square_1} (\tilde{\mathbf{g}}_i \partial_{x_j} \phi_{ij} - \tilde{\mathbf{g}}_j \partial_{x_i} \phi_{ij}) \leq \|\nabla \phi_{ij}\|_{H^1_{\text{par},\#}(\square_1)} \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{\widehat{H}^{-1}_{\text{par}}(\square_1)}.$$

Combining the two previous displays yields

$$\|T_{ij}\|_{L^2(\square_1)} \leq C \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{\widehat{H}^{-1}_{\text{par}}(\square_1)} \leq \|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}^{-1}_{\text{par}}(\square_1)}. \quad (2.3.30)$$

*Step 3.* For notational convenience, for each  $j \in \{1, \dots, d\}$ , we denote  $T_{j0} := -T_{0j}$ ,  $\partial_0 := \partial_t$ ,  $\partial_j := \partial_{x_j}$ ,

$$R_0 := \tilde{u} - \sum_{j=1}^d \partial_j T_{0j},$$

and, for each  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,

$$R_i := \tilde{\mathbf{g}}_i - \sum_{j=0}^d \partial_j T_{ij}.$$

In this step, we show that

$$\|R_0\|_{L^2(\square_1)} + \|\nabla R_0\|_{L^2(\square_1)} \leq C\|\nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} + C\|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)}. \quad (2.3.31)$$

and that for every  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,

$$\|R_i\|_{L^2(\square_1)} \leq C\|\nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} + C\|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)}. \quad (2.3.32)$$

Recalling that  $\partial_t u = \nabla \cdot \mathbf{g}$ , we note that

$$(\partial_t - \Delta)R_0 = (\partial_t - \Delta)\tilde{u} - \sum_{j=1}^d \partial_j (\tilde{\mathbf{g}}_j - \partial_j \tilde{u}) = u \partial_t \eta + \mathbf{g} \cdot \nabla \eta,$$

and, for each  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)R_i &= (\partial_t - \Delta)\tilde{\mathbf{g}}_i - \partial_t (\tilde{\mathbf{g}}_i - \partial_i \tilde{u}) - \sum_{j=1}^d \partial_j (\partial_i \tilde{\mathbf{g}}_j - \partial_j \tilde{\mathbf{g}}_i) \\ &= (\partial_i u)(\partial_t \eta) + (\partial_t u)(\partial_i \eta) + (\nabla \cdot \mathbf{g})(\partial_i \eta) + (\partial_i \mathbf{g}) \cdot \nabla \eta. \end{aligned}$$

Moreover, it is clear from their definitions that  $T_{0j}$  and  $T_{ij}$  vanish in a neighborhood of the initial time slice  $\{-\frac{\theta}{2}\} \times \square_1$ . The estimates (2.3.31) and (2.3.32) are thus obtained by following the steps to the derivations of (2.3.28) and (2.3.30) respectively.

*Step 4.* We now select a cutoff function  $\chi \in C_c^\infty(\square_1)$  such that  $\chi \equiv 1$  on  $\square_0$  and  $\chi \equiv 0$  outside of  $\square_{1/2}$ , and observe that

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d \nabla \partial_j (\chi^4 T_{0j}) \\ \sum_{j=0}^d \partial_j (\chi^4 T_{ij}) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_0(\square_1),$$

where we understand that the second component above denotes a  $d$ -dimensional vector field with components indexed by  $i \in \{1, \dots, d\}$ . By the definition of  $\mathcal{S}(\square_1)$ , we deduce that

$$\int_{\square_1} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d \nabla \partial_j (\chi^4 T_{0j}) \\ \sum_{j=0}^d \partial_j (\chi^4 T_{ij}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} \nabla u \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.3.33)$$

In the display above, the first vector is of dimension  $2d$ : the gradient appearing on the first row carries the first  $d$  components, while the other  $d$  components are represented by the second row and indexed by  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Applying the chain rule in the identity (2.3.33) yields a number of terms, one of which is

$$\begin{aligned} \int_{\square_1} \chi^4 \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d \nabla \partial_j T_{0j} \\ \sum_{j=0}^d \partial_j T_{ij} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} \nabla u \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} &= \int_{\square_1} \chi^4 \begin{pmatrix} \nabla \tilde{u} \\ \tilde{\mathbf{g}} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} \nabla u \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} + \int_{\square_1} \chi^4 \begin{pmatrix} \nabla R_0 \\ R_i \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} \nabla u \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \\ &= \int_{\square_1} \chi^4 \begin{pmatrix} \nabla u \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} \nabla u \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} + \int_{\square_1} \chi^4 \begin{pmatrix} \nabla R_0 \\ R_i \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} \nabla u \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

We are interested in estimating the first term in this sum. By the uniform boundedness of  $\mathbf{A}$ , the absolute value of the second term in this sum is bounded by a constant times

$$\left( \|\nabla R_0\|_{L^2(\square_1)} + \sum_{i=1}^d \|R_i\|_{L^2(\square_1)} \right) \left( \int_{\square_1} \chi^4 \left( \frac{\nabla u}{\mathbf{g}} \right) \cdot \mathbf{A} \left( \frac{\nabla u}{\mathbf{g}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

When applying the chain rule in the identity (2.3.33), the leftover terms are

$$4 \int_{\square_1} \chi^2 \left( \begin{array}{c} \sum_{j=1}^d T_{0j} (3\nabla\chi\partial_j\chi + \chi\nabla\partial_j\chi) + 2\nabla T_{0j}\chi\partial_j\chi \\ \sum_{j=0}^d T_{ij}\chi\partial_j\chi \end{array} \right) \cdot \mathbf{A} \left( \frac{\nabla u}{\mathbf{g}} \right).$$

Using once more the uniform boundedness of  $\mathbf{A}$ , we obtain that the absolute value of the quantity above is bounded by a constant times

$$\left( \sum_{j=1}^d (\|T_{0j}\|_{L^2(\square_1)} + \|\nabla T_{0j}\|_{L^2(\square_1)}) + \sum_{j=0}^d \|T_{ij}\|_{L^2(\square_1)} \right) \left( \int_{\square_1} \chi^4 \left( \frac{\nabla u}{\mathbf{g}} \right) \cdot \mathbf{A} \left( \frac{\nabla u}{\mathbf{g}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Combining the previous displays with the estimates (2.3.28), (2.3.30), (2.3.31) and (2.3.32), we arrive at

$$\left( \int_{\square_1} \chi^4 \left( \frac{\nabla u}{\mathbf{g}} \right) \cdot \mathbf{A} \left( \frac{\nabla u}{\mathbf{g}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left( \|\nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} + \|\mathbf{g}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_1)} \right).$$

By the uniform ellipticity of  $\mathbf{A}$ , the left side is an upper bound for  $\|S\|_{L^2(\square_0)}$ , up to a multiplicative constant, and therefore the proof is complete.  $\square$

## 2.4 Convergence of subadditive quantities

In this section, we obtain an algebraic rate of convergence for the limits of the subadditive quantities by adapting the approach of [8, 7], following the presentation of [4, Chapter 2].

We let  $\overline{\mathbf{A}}$  be the  $2d$ -by- $2d$  matrix characterized by the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\mu(\square_n, X)] = \frac{1}{2} X \cdot \overline{\mathbf{A}} X. \quad (2.4.1)$$

Note that the existence of the limit on the left side follows from the subadditivity of  $\mu(\cdot, X) = J(\cdot, X, 0)$  and stationarity, which together ensure that  $\mathbb{E} [\mu(\square_n, X)]$  is a nonincreasing sequence. The fact that  $X \mapsto \mu(\square_n, X)$  is quadratic ensures that the limit is also quadratic in  $X$  and can therefore be represented by a matrix. Moreover, by Lemma 2.6, there exists  $C(\Lambda) < \infty$  such that

$$\frac{1}{C} I_{2d} \leq \overline{\mathbf{A}} \leq C I_{2d}, \quad (2.4.2)$$

where  $I_{2d}$  is the  $2d$ -by- $2d$  identity matrix. It is convenient to define

$$\overline{J}(X, X^*) := \frac{1}{2} X \cdot \overline{\mathbf{A}} X + \frac{1}{2} X^* \cdot \overline{\mathbf{A}}^{-1} X^* - X \cdot X^*.$$

The goal of this section is to prove the following theorem.

**Theorem 2.21** (Convergence of  $J$ ). *There exist an exponent  $\beta(d, \Lambda) > 0$  and, for each  $s \in (0, 2 + d)$ , a constant  $C(s, d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $X, X^* \in B_1$  and  $n \in \mathbb{N}$ , we have*

$$|J(\square_n, X, X^*) - \bar{J}(X, X^*)| \leq C3^{-n\beta(2+d-s)} + \mathcal{O}_1(C3^{-ns}). \quad (2.4.3)$$

The next lemma (which should be compared to [4, Lemma 2.7]) allows us to reduce Theorem 2.21 to an estimate on the quantity  $J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}X)$ . Note that, in view of Lemma 2.5, a control on the size of  $\inf_{X^*} J(V, X, X^*)$  can be interpreted as information on the “convex duality defect” between the quantities  $\mu$  and  $\mu^*$ , quantifying how close these functions are to a convex dual pair.

**Lemma 2.22** (reduction to minimal set). *For each  $\Gamma \geq 1$ , there exists a constant  $C(\Gamma, d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $2d$ -by- $2d$  symmetric matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  satisfying*

$$\Gamma^{-1} I_{2d} \leq \tilde{\mathbf{A}} \leq \Gamma I_{2d} \quad (2.4.4)$$

and every parabolic cylinder  $V \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ , we have

$$\begin{aligned} \sup_{X, X^* \in B_1} \left| J(V, X, X^*) - \left( \frac{1}{2} X \cdot \tilde{\mathbf{A}}X + \frac{1}{2} X^* \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}X^* - X \cdot X^* \right) \right| \\ \leq C \sup_{X \in B_1} (J(V, X, \tilde{\mathbf{A}}X))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

**Proof.** Since the domain  $V$  plays no role in the argument, we drop the explicit dependence on  $V$ . Denote

$$\delta^2 := \sup_{X \in B_1} J(X, \tilde{\mathbf{A}}X).$$

To avoid a conflict in the notation, we denote the Legendre-Fenchel transform (convex dual function) of  $\mu$  by

$$H(X^*) := \sup_{X \in \mathbb{R}^{2d}} (X \cdot X^* - \mu(X)).$$

It is clear from (2.2.14) that

$$H(X^*) \leq \mu^*(X^*).$$

Thus, by (2.2.18), for every  $X \in B_1$ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu(X) + H(\tilde{\mathbf{A}}X) - X \cdot \tilde{\mathbf{A}}X \\ \leq \mu(X) + \mu^*(\tilde{\mathbf{A}}X) - X \cdot \tilde{\mathbf{A}}X = J(X, \tilde{\mathbf{A}}X) \leq \delta^2. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

This implies that, for every  $X \in B_1$ ,

$$|\mu^*(\tilde{\mathbf{A}}X) - H(\tilde{\mathbf{A}}X)| \leq \delta^2. \quad (2.4.7)$$

For each  $X \in \mathbb{R}^{2d}$ , the minimum of the map  $X^* \mapsto \mu(X) + H(X^*) - X \cdot X^*$  is zero and it is achieved at  $X^*$  for which  $X^* = \nabla\mu(X)$ . By uniform convexity (quadratic response) and (2.4.6), we deduce that, for every  $X \in B_1$ ,

$$|\tilde{\mathbf{A}}X - \nabla\mu(X)|^2 \leq C\delta^2. \quad (2.4.8)$$

Using the expression

$$\mu(X) = \frac{1}{2} X \cdot \nabla \mu(X)$$

we obtain, for every  $X \in B_1$ ,

$$\left| \frac{1}{2} X \cdot \tilde{\mathbf{A}} X - \mu(X) \right| \leq C\delta.$$

From this, uniform convexity and (2.4.4), we obtain, for every  $X^* \in B_1$ ,

$$\left| \frac{1}{2} X^* \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1} X^* - H(X^*) \right| \leq C\delta.$$

Hence by (2.4.7), (2.4.4) again,

$$\left| \frac{1}{2} X^* \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1} X^* - \mu^*(X^*) \right| \leq C\delta.$$

The formula (2.2.18) now yields the lemma.  $\square$

We decompose the estimate for  $J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}X)$  into three steps. In the first step, we identify a convenient finite-volume approximation of the homogenized matrix  $\bar{\mathbf{A}}$ . We next control the expectation of  $J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}X)$  in Subsection 2.4.2. We finally use the subadditivity of  $J$  in Subsection 2.4.3 to deduce a control of the fluctuations of  $J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}X)$ , and complete the proof of Theorem 2.21.

### 2.4.1 The coarsened mapping

Recall that  $S(\cdot, V, X, X^*)$  denotes the unique maximizer in the definition of  $J(V, X, X^*)$ , see (2.2.16). We let  $\bar{\mathbf{A}}_V \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$  be the symmetric matrix such that, for every  $X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$\mathbb{E}[J(V, 0, X^*)] = \frac{1}{2} X^* \cdot \bar{\mathbf{A}}_V^{-1} X^*.$$

By (2.2.24), there exists  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that

$$\frac{1}{C} I_{2d} \leq \bar{\mathbf{A}}_V \leq C I_{2d},$$

and by (2.2.29),

$$\mathbb{E} \left[ \int_V S(\cdot, V, 0, X^*) \right] = \bar{\mathbf{A}}_V^{-1} X^*.$$

Recalling also (2.2.30) and the linearity of the mapping  $(X, X^*) \mapsto S(\cdot, V, X, X^*)$ , we thus see that the matrix  $\bar{\mathbf{A}}_V$  is such that, for every  $X \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \int_V S(\cdot, V, X, \bar{\mathbf{A}}_V X) \right] = 0. \quad (2.4.9)$$

We note that by Lemmas 2.5 and 2.6, for each  $X \in \mathbb{R}^{2d}$ , the mapping

$$X^* \mapsto \mathbb{E}[J(V, X, X^*)] = \mathbb{E}[\mu(V, X)] + \mathbb{E}[\mu^*(V, X^*)] - X \cdot X^*$$

is uniformly convex, and achieves its unique minimum at  $X^*$  satisfying

$$\mathbb{E}[\nabla_{X^*} \mu^*(V, X^*)] = X.$$

Moreover, the latter condition is equivalent to  $X^* = \bar{\mathbf{A}}_V X$ . We thus deduce that for every  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$\mathbb{E}[J(V, X, \bar{\mathbf{A}}_V X)] \leq \mathbb{E}[J(V, X, X^*)] \leq \mathbb{E}[J(V, X, \bar{\mathbf{A}}_V X)] + C|X^* - \bar{\mathbf{A}}_V X|^2. \quad (2.4.10)$$

We use the shorthand notation

$$\bar{\mathbf{A}}_n := \bar{\mathbf{A}}_{\square_n}. \quad (2.4.11)$$

### 2.4.2 Control of the expectation of $J$

The goal of this subsection is to prove the following proposition.

**Proposition 2.23** (Decay of  $\mathbb{E}[J]$ ). *There exist  $\beta(d, \Lambda) > 0$  and  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $X \in B_1(\mathbb{R}^{2d})$ ,*

$$\mathbb{E}[J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)] \leq C3^{-\beta n}. \quad (2.4.12)$$

The main step to prove this result is to control the size of  $J$  near  $(X, \bar{\mathbf{A}}_n X)$  in terms of the expected ‘‘additivity defect’’ of  $J$  between successive triadic scales. We measure the latter using the quantity

$$\tau_n := \sup_{X, X^* \in B_1} (\mathbb{E}[J(\square_n, X, X^*)] - \mathbb{E}[J(\square_{n+1}, X, X^*)]). \quad (2.4.13)$$

**Proposition 2.24.** *There exist  $\alpha(d) < \infty$  and  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $X \in B_1(\mathbb{R}^{2d})$ ,*

$$\mathbb{E}[J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)] \leq C3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

As will be explained below, Proposition 2.23 follows from Proposition 2.24 by iteration, in analogy with an ODE argument. We focus for now on the proof of Proposition 2.24, and start by rewriting the quadratic response (2.2.27) in a more convenient form.

**Lemma 2.25** (Quadratic response). *There exists a constant  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that the following holds. Let  $V, V_1, \dots, V_k$  be parabolic cylinders such that  $\{V_1, \dots, V_k\}$  forms a partition of  $V$ , up to a set of null measure. For every  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ , we have*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \frac{|V_j|}{|V|} \|S(\cdot, V, X, X^*) - S(\cdot, V_j, X, X^*)\|_{\underline{L}^2(V_j)}^2 \\ \leq C \sum_{j=1}^k \frac{|V_j|}{|V|} (J(V_j, X, X^*) - J(V, X, X^*)). \end{aligned}$$

**Proof.** Denote  $T := S(\cdot, V, X, X^*)$ . Applying (2.2.27) on the subdomain  $V_j$  for each  $j \in \{1, \dots, k\}$ , we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \int_{V_j} |T - S(\cdot, V_j, X, X^*)|^2 \\ \leq |V_j| J(V_j, X, X^*) - \int_{V_j} \left( -\frac{1}{2} T \cdot \mathbf{A} T - X \cdot \mathbf{A} T + X^* \cdot T \right). \end{aligned}$$

Summing over  $j$  and recalling (2.2.16) yields the result.  $\square$

We next show that the spatial averages of  $S$  can be controlled by an expression involving the additivity defects of  $J$  on all smaller length scales. We denote

$$\bar{S}_n(X, X^*) := \mathbb{E} \left[ \mathop{\text{f}}_{\square_n} S(\cdot, \square_n, X, X^*) \right].$$

**Lemma 2.26.** *There exist  $\alpha(d) < \infty$  and  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $X, X^* \in B_1(\mathbb{R}^{2d})$ , we have*

$$\mathbb{E} \left[ \left| \mathop{\text{f}}_{\square_n} S(\cdot, \square_n, X, X^*) - \bar{S}_n(X, X^*) \right|^2 \right] \leq C 3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right). \quad (2.4.14)$$

**Proof.** For any  $X' \in B_1$ ,  $m \leq n$  and  $z \in \mathcal{Z}_m$ , the first variation (2.2.26) gives

$$\begin{aligned} X' \cdot \mathop{\text{f}}_{z+\square_m} (S(\cdot, \square_n, X, X^*) - S(\cdot, z + \square_m, X, X^*)) \\ = \mathop{\text{f}}_{z+\square_m} S(\cdot, z + \square_m, 0, X') \cdot \mathbf{A} (S(\cdot, \square_n, X, X^*) - S(\cdot, z + \square_m, X, X^*)). \end{aligned}$$

Averaging over  $z \in \mathcal{Z}_m$  and using the Cauchy-Schwarz inequality yields

$$\begin{aligned} |\mathcal{Z}_m|^{-1} \cdot \left| X' \cdot \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \mathop{\text{f}}_{z+\square_m} (S(\cdot, \square_n, X, X^*) - S(\cdot, z + \square_m, X, X^*)) \right| \\ \leq \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \mathop{\text{f}}_{z+\square_m} |\mathbf{A} S(\cdot, z + \square_m, 0, X')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \cdot \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \mathop{\text{f}}_{z+\square_m} |S(\cdot, \square_n, X, X^*) - S(\cdot, z + \square_m, X, X^*)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4.15) \end{aligned}$$

The first term on the right side is bounded by a constant  $C(d, \Lambda) < \infty$ . We use Lemma 2.25 to bound the second term and obtain

$$\begin{aligned} \left| |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \mathop{\text{f}}_{z+\square_m} |S(\cdot, \square_n, X, X^*) - S(\cdot, z + \square_m, X, X^*)|^2 \right| \\ \leq \frac{C}{|\mathcal{Z}_m|} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (J(z + \square_m, X, X^*) - J(\square_n, X, X^*)). \end{aligned}$$

Now, we can estimate the variance of  $\mathop{\text{f}}_{\square_n} S(\cdot, \square_n, X, X^*)$  using those at scale  $m$  :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ \mathop{\text{f}}_{\square_n} S(\cdot, \square_n, X, X^*) \right] \leq 2 \text{Var} \left[ 3^{-(d+2)(n-m)} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \mathop{\text{f}}_{z+\square_m} S(\cdot, z + \square_m, X, X^*) \right] \\ + C \mathbb{E} [J(\square_m, X, X^*) - J(\square_n, X, X^*)]. \end{aligned}$$

For  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ , we can decompose  $\mathcal{Z}_m$  into a union of  $2^{d+1}$  ‘‘checkerboard’’ subsets  $\mathcal{Z}^{(1)}, \dots, \mathcal{Z}^{(2^{1+d})}$  to ensure that for each  $i \in \{1, \dots, 2^{1+d}\}$ ,

$$(z, z') \in \mathcal{Z}^{(i)} \implies \text{dist}(z + \square_m, z' + \square_m) \geq 1.$$



For example, to any  $i \in \{1, \dots, 2^{d+1}\}$  we can associate  $(i_0, \dots, i_d) \in \{0, 1\}^{d+1}$ , and then set

$$Z^{(i)} := ((i_0 3^{2^m}, i_1 3^m, \dots, i_d 3^m) + 2((3^{2^m} \mathbb{Z}) \times (3^m \mathbb{Z}^d))) \cap \square_n. \quad (2.4.16)$$

Thus, we obtain the following bound

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \mathcal{f}_{z + \square_m} S(\cdot, z + \square_m, X, X^*) \right] \\ \leq C(d) \sum_{i=1}^{2^{d+1}} \text{Var} \left[ \sum_{z \in \mathcal{Z}^{(i)}} \mathcal{f}_{z + \square_m} S(\cdot, z + \square_m, X, X^*) \right], \end{aligned}$$

and by independence at distance larger than one and stationarity :

$$\text{Var} \left[ \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \mathcal{f}_{z + \square_m} S(\cdot, z + \square_m, X, X^*) \right] \leq C 3^{-(d+2)(n-m)} \text{Var} \left[ \mathcal{f}_{\square_m} S(\cdot, \square_m, X, X^*) \right].$$

We can now estimate the variance of the spatial average of  $S$  at scale  $n$  by the variance at smaller scales :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ \mathcal{f}_{\square_n} S(\cdot, \square_n, X, X^*) \right] \leq C 3^{-(d+2)(n-m)} \text{Var} \left[ \mathcal{f}_{\square_m} S(\cdot, \square_m, X, X^*) \right] \\ + C \mathbb{E} [J(\square_m, X, X^*) - J(\square_n, X, X^*)]. \quad (2.4.17) \end{aligned}$$

Selecting  $\ell$  to be the smallest integer such that  $C 3^{-(d+2)\ell} \leq \frac{1}{3}$ , we get

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ \mathcal{f}_{\square_{m+\ell}} S(\cdot, \square_{m+\ell}, X, X^*) \right] \leq \frac{1}{3} \text{Var} \left[ \mathcal{f}_{\square_m} S(\cdot, \square_m, X, X^*) \right] \\ + C \mathbb{E} [J(\square_m, X, X^*) - J(\square_{m+\ell}, X, X^*)]. \end{aligned}$$

We introduce

$$u_n := \text{Var} \left[ \mathcal{f}_{\square_n} S(\cdot, \square_n, X, X^*) \right],$$

and  $v_n := u_{n\ell}$ . We have

$$v_n \leq \frac{1}{3} v_{n-1} + C \sum_{k=(n-1)\ell}^{n\ell-1} \tau_k,$$

and, by induction,

$$v_n \leq 3^{-n} u_0 + C \sum_{i=1}^n 3^{-i} \sum_{k=(n-i)\ell}^{(n-i+1)\ell-1} \tau_k.$$

Defining  $\alpha := \frac{1}{\ell}$  (recall that  $\ell$  only depends on  $d$ ), we get

$$v_n \leq C \left( 3^{-n} + \sum_{k=0}^{n\ell-1} 3^{-\alpha(n-k)} \tau_k \right),$$

Thus, if  $n$  is a multiple of  $\ell$ , we have

$$u_n \leq C \left( 3^{-\alpha n} + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-\alpha(n-k)} \tau_k \right),$$

and for  $n = \ell n' + m$ , with  $0 \leq m < \ell$ , another application of (2.4.17) gives the same estimate, so finally

$$\text{Var} \left[ \int_{\square_n} S(\cdot, \square_n, X, X^*) \right] \leq C \left( 3^{-\alpha n} + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-\alpha(n-k)} \tau_k \right),$$

which is (2.4.14).  $\square$

We can now sum the scales and deduce that  $S(\cdot, \square_n, X, X^*)$  is close to a constant in a weak sense, provided that a weighted norm of  $(\tau_k)_{k < n}$  is small.

**Lemma 2.27** (Weak control of  $S$ ). *There exist  $\alpha(d) < \infty$  and  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $X, X^* \in B_1(\mathbb{R}^{2d})$ ,*

$$\mathbb{E} \left[ \left\| S(\cdot, \square_n, X, X^*) - \bar{S}_n(X, X^*) \right\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_n)}^2 \right] \leq C 3^{(2-\alpha)n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

**Proof.** We decompose the proof into three steps.

*Step 1.* To begin with, we show that there exists a constant  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$  and  $X, X^* \in B^1(\mathbb{R}^{2d})$ ,

$$|\bar{S}_n(X, X^*) - \bar{S}_m(X, X^*)|^2 \leq C \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k. \quad (2.4.18)$$

Indeed, recalling the definition of  $\mathcal{Z}_m$  in (2.3.8) (which depends implicitly on  $n$ ), we use Jensen's inequality, Lemma 2.25 and stationarity to get

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left[ \int_{\square_n} S(\cdot, \square_n, X, X^*) - |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \int_{z + \square_m} S(\cdot, z + \square_m, X, X^*) \right] \right|^2 \\ & \leq \mathbb{E} \left[ |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \int_{z + \square_m} |S(\cdot, \square_n, X, X^*) - S(\cdot, z + \square_m, X, X^*)|^2 \right] \\ & \leq C (J(\square_n, X, X^*) - J(\square_m, X, X^*)) \\ & \leq C \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k, \end{aligned}$$

and this implies (2.4.18).

*Step 2.* In this step, we show that there exists a constant  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |(S(\cdot, \square_n, X, X^*))_{z + \square_m} - \bar{S}_n(X, X^*)|^2 \right] \\ & \leq C \left( 3^{-\alpha m} + \sum_{k=0}^m 3^{\alpha(k-m)} \tau_k + \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k \right). \quad (2.4.19) \end{aligned}$$

By Lemma 2.25, we have

$$\begin{aligned} & \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \|S(\cdot, \square_n, X, X^*) - S(\cdot, z + \square_m, X, X^*)\|_{L^2(z + \square_m)}^2 \\ & \leq C \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (J(\square_n, X, X^*) - J(z + \square_m, X, X^*)). \quad (2.4.20) \end{aligned}$$

Taking expectations, using stationarity and Jensen's inequality, we deduce that

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |(S(\cdot, \square_n, X, X^*))_{z+\square_m} - (S(\cdot, z + \square_m, X, X^*))_{z+\square_m}|^2 \right] \leq C |\mathcal{Z}_m| \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k. \quad (2.4.21)$$

Moreover, by stationarity and Lemma 2.26, we have

$$\mathbb{E} \left[ |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |(S(\cdot, z + \square_m, X, X^*))_{z+\square_m} - \bar{S}_m(X, X^*)|^2 \right] \leq C \left( 3^{-\alpha m} + \sum_{k=0}^m 3^{\alpha(k-m)} \tau_k \right). \quad (2.4.22)$$

Since

$$\begin{aligned} & |(S(\cdot, \square_n, X, X^*))_{z+\square_m} - \bar{S}_n(X, X^*)|^2 \\ & \leq 3 |(S(\cdot, \square_n, X, X^*))_{z+\square_m} - (S(\cdot, z + \square_m, X, X^*))_{z+\square_m}|^2 \\ & \quad + 3 |(S(\cdot, z + \square_m, X, X^*))_{z+\square_m} - \bar{S}_m(X, X^*)|^2 \\ & \quad + 3 |\bar{S}_n(X, X^*) - \bar{S}_m(X, X^*)|^2, \end{aligned}$$

we obtain (2.4.19) by combining (2.4.21), (2.4.22) and (2.4.18).

*Step 3.* We now combine Proposition 2.15 with the result of the previous step to obtain that

$$\|S(\cdot, \square_n, X, X^*) - \bar{S}_n(X, X^*)\|_{H_{\text{par}}^{-1}(\square_n)}^2 \leq C \left( 1 + \left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right), \quad (2.4.23)$$

where  $Z_m$  is a random variable satisfying

$$\mathbb{E}[Z_m] \leq C \left( 3^{-\alpha m} + \sum_{k=0}^m 3^{\alpha(k-m)} \tau_k + \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k \right). \quad (2.4.24)$$

By Hölder's inequality, we have

$$\left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \right) \left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m \right) \leq C 3^n \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m. \quad (2.4.25)$$

Taking expectations and using (2.4.24), we get

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \leq C 3^n \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( 3^{-\alpha m} + \sum_{k=0}^m 3^{\alpha(k-m)} \tau_k + \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k \right).$$

For the last two terms, we reverse the order of the sums to find

$$\sum_{m=0}^{n-1} 3^m \sum_{k=0}^m 3^{\alpha(k-m)} \tau_k = \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \sum_{m=k}^{n-1} 3^{(1-\alpha)m} \leq C 3^{(1-\alpha)n} \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k,$$

and

$$\sum_{m=0}^{n-1} 3^m \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^k 3^m \tau_k \leq C \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \tau_k. \quad (2.4.26)$$

The second sum is bounded by the first, thus combining the above displays yields

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \leq C 3^{(2-\alpha)n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right),$$

and this completes the proof.  $\square$

We next complete the proof of Proposition 2.24 and then of Proposition 2.23.

**Proof** (Proof of Proposition 2.24). According to Lemma 2.27, Proposition 2.19 and (2.4.9), we have

$$\mathbb{E} \left[ \|S(\cdot, \square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)\|_{\underline{L}^2(\square_{n-1})}^2 \right] \leq C 3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

By Lemma 2.25, we deduce

$$\mathbb{E} \left[ \|S(\cdot, \square_{n-1}, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)\|_{\underline{L}^2(\square_{n-1})}^2 \right] \leq C 3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

Recall that  $(z + \square_{n-1})_{z \in \mathcal{Z}_{n-1}}$  is a partition of  $\square_n$ , up to a set of null measure. Moreover, by stationarity, the previous display implies that for every  $z \in \mathcal{Z}_{n-1}$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \|S(\cdot, z + \square_{n-1}, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)\|_{\underline{L}^2(z + \square_{n-1})}^2 \right] \leq C 3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

Applying Lemma 2.25 once more and summing over  $z \in \mathcal{Z}_{n-1}$ , we obtain the result.  $\square$

**Proof** (Proof of Proposition 2.23). We denote by  $\mathcal{B}$  the set of canonical basis elements of  $\mathbb{R}^{2d}$ , and observe that there exists a constant  $C(d) < \infty$  such that if  $X \mapsto B(X)$  is a nonnegative quadratic form over  $\mathbb{R}^{2d}$ , then

$$\sup_{X \in \mathcal{B}_1} B(X) \leq C \sum_{X \in \mathcal{B}} B(X). \quad (2.4.27)$$

Indeed, a quadratic form is associated to a nonnegative symmetric matrix with largest eigenvalue bounded by its trace; this trace is equal to the right side above.

By the definition of  $\tau_n$ , see (2.4.13), and Lemma 2.5, we have

$$\begin{aligned} \tau_n \leq & \sup_{X \in \mathcal{B}_1} (\mathbb{E}[\mu(\square_n, X)] - \mathbb{E}[\mu(\square_{n+1}, X)]) \\ & + \sup_{X^* \in \mathcal{B}_1} (\mathbb{E}[\mu^*(\square_n, X^*)] - \mathbb{E}[\mu^*(\square_{n+1}, X^*)]). \end{aligned}$$

Since  $X \mapsto \mathbb{E}[\mu(V, X)]$  and  $X^* \mapsto \mathbb{E}[\mu(V, X^*)]$  are nonnegative quadratic forms, and since this property is stable under linear changes of coordinates, it follows from (2.4.27) that

$$\begin{aligned} \tau_n \leq & C \sum_{X \in \mathcal{B}} (\mathbb{E}[\mu(\square_n, X)] - \mathbb{E}[\mu(\square_{n+1}, X)]) \\ & + C \sum_{X \in \mathcal{B}} (\mathbb{E}[\mu^*(\square_n, \bar{\mathbf{A}}_n X)] - \mathbb{E}[\mu^*(\square_{n+1}, \bar{\mathbf{A}}_n X)]), \end{aligned}$$

and thus by Lemma 2.5,

$$\tau_n \leq C \sum_{X \in \mathcal{B}} (\mathbb{E}[J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)] - \mathbb{E}[J(\square_{n+1}, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)]).$$

By (2.4.10), we have

$$\mathbb{E}[J(\square_{n+1}, X, \bar{\mathbf{A}}_{n+1} X)] \leq \mathbb{E}[J(\square_{n+1}, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)],$$

and therefore

$$\tau_n \leq C \sum_{X \in \mathcal{B}} (\mathbb{E}[J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)] - \mathbb{E}[J(\square_{n+1}, X, \bar{\mathbf{A}}_{n+1} X)]). \quad (2.4.28)$$

This motivates the definition of

$$D_n := \sum_{X \in \mathcal{B}} \mathbb{E}[J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}_n X)].$$

Proposition 2.24 asserts that

$$D_n \leq C 3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

Setting

$$\tilde{D}_n := 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \sum_{k=0}^n 3^{\frac{\alpha}{2}k} D_k,$$

we deduce that

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n &\leq C 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \sum_{m=0}^n 3^{-\frac{\alpha}{2}m} \left( 1 + \sum_{k=0}^m 3^{\alpha k} \tau_k \right) \\ &\leq C 3^{-\frac{\alpha}{2}n} + C 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \sum_{k=0}^n \sum_{m=k}^n 3^{-\frac{\alpha}{2}m} 3^{\alpha k} \tau_k \\ &\leq C 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \left( 1 + \sum_{k=0}^n 3^{\frac{\alpha}{2}k} \tau_k \right). \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

Since  $D_0 \leq C$ , we also have

$$\tilde{D}_n - \tilde{D}_{n+1} \geq 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \sum_{k=0}^n 3^{\frac{\alpha}{2}k} (D_k - D_{k+1}) - C 3^{-\frac{\alpha}{2}n}.$$

Combining this with (2.4.28) yields

$$\tilde{D}_n - \tilde{D}_{n+1} \geq C^{-1} 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \sum_{k=0}^n 3^{\frac{\alpha}{2}k} \tau_k - C 3^{-\frac{\alpha}{2}n}.$$

From this and (2.4.29), we obtain that there exists an exponent  $\beta(d, \Lambda) \in (0, \frac{\alpha}{2})$  such that

$$\tilde{D}_{n+1} \leq 3^{-\beta} \tilde{D}_n + C 3^{-\frac{\alpha}{2}n},$$

introducing  $v_n := 3^{\beta n} \tilde{D}_n$  and multiplying the previous identity by  $3^{(\beta+1)n}$  gives

$$v_{n+1} \leq v_n + C 3^{(\beta-\frac{\alpha}{2})n}.$$

Summing this inequality over  $n$  yields  $v_n \leq v_0 + \frac{C}{1 - (3^{\beta - \frac{\alpha}{2}})^{-1}}$ , i.e.  $v$  is bounded, that is,

$$\tilde{D}_n \leq C3^{-\beta n}.$$

By (2.4.28), we also obtain

$$\tau_n \leq C3^{-\beta n}.$$

By the definition of  $\bar{\mathbf{A}}_n$ , we have

$$|\bar{\mathbf{A}}_n - \bar{\mathbf{A}}_{n+1}| \leq C\tau_n,$$

so that, setting

$$\bar{\mathbf{A}} := \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{A}}_n, \quad (2.4.30)$$

we get

$$|\bar{\mathbf{A}}_n - \bar{\mathbf{A}}| \leq \sum_{m=n}^{\infty} |\bar{\mathbf{A}}_m - \bar{\mathbf{A}}_{m+1}| \leq C \sum_{m=n}^{\infty} \tau_m \leq C3^{-\beta n}.$$

Combining the last displays with (2.4.10) yields

$$\sup_{X \in B_1} \mathbb{E} [J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}X)] \leq C3^{-\beta n}.$$

By an application of Lemma 2.22, we can verify that the matrix  $\bar{\mathbf{A}}$  defined in (2.4.30) coincides with that defined in (2.4.1). The proof is therefore complete.  $\square$

### 2.4.3 Control of the fluctuations of $J$

In this subsection, we prove Theorem 2.21. In view of Lemma 2.22, the main point is to obtain a control on the fluctuations of  $J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}X)$ , which we obtain using subadditivity.

**Proof** (Proof of Theorem 2.21). *Step 1.* In this first step, we show that there exists an exponent  $\beta(d, \Lambda) > 0$  and a constant  $C(d, \Lambda) > 0$  such that, for every  $X \in B_1(\mathbb{R}^{2d})$  and  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ , we have

$$3^{-(2+d)(n-m)} \log \mathbb{E} \left[ \exp \left( C^{-1} 3^{(2+d)(n-m)} J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}X) \right) \right] \leq C3^{-\beta m}. \quad (2.4.31)$$

For  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ , recall that the cube  $\square_n$  is partitioned into into a union of  $2^{d+1}$  “checkerboard” subsets, see (2.4.16), to ensure that for each  $i \in \{1, \dots, 2^{1+d}\}$ ,

$$z, z' \in \mathcal{Z}^{(i)} \implies \text{dist}(z + \square_n, z' + \square_n) \geq 1.$$

In particular, for each fixed  $i \in \{1, \dots, 2^{1+d}\}$ , the random variables  $(z + \square_n)_{z \in \mathcal{Z}_m^{(i)}}$  are independent. By subadditivity, for each  $X \in B_1(\mathbb{R}^{2d})$  and  $t > 0$ , we have

$$\log \mathbb{E} \left[ \exp \left( t 3^{(2+d)(n-m)} J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}X) \right) \right] \leq \log \mathbb{E} \left[ \exp \left( t \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} J(z + \square_m, X, \bar{\mathbf{A}}X) \right) \right],$$

and by Hölder’s inequality and independence, the latter is bounded by

$$\begin{aligned} &\leq 2^{-(1+d)} \sum_{i=1}^{2^{1+d}} \log \mathbb{E} \left[ \exp \left( t 2^{1+d} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m^{(i)}} J(z + \square_m, X, \bar{\mathbf{A}}X) \right) \right] \\ &\leq 2^{-(1+d)} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \log \mathbb{E} \left[ \exp \left( t 2^{1+d} J(z + \square_m, X, \bar{\mathbf{A}}X) \right) \right]. \end{aligned}$$

By stationarity, the summands above do not depend on  $z \in \mathcal{Z}_m$ . Since

$$J(\square_m, X, \bar{\mathbf{A}}X) \leq C(d, \Lambda),$$

we can choose  $t(d, \Lambda) > 0$  sufficiently small and use the elementary inequalities

$$\begin{cases} \exp(s) \leq 1 + 2s & \text{for all } 0 \leq s \leq 1, \\ \log(1 + s) \leq s & \text{for all } s \geq 0 \end{cases}$$

to obtain that

$$\log \mathbb{E} \left[ \exp \left( C^{-1} 3^{(2+d)(n-m)} J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}X) \right) \right] \leq C 3^{(2+d)(n-m)} \mathbb{E} \left[ J(\square_m, X, \bar{\mathbf{A}}X) \right].$$

Inequality (2.4.31) then follows by an application of Proposition 2.23.

*Step 2.* Set

$$\rho_n := \sup_{X \in B_1} J(\square_n, X, \bar{\mathbf{A}}X).$$

In this step, we show that there exists an exponent  $\beta(d, \Lambda) > 0$  and, for every  $s \in (0, 2 + d)$ , a constant  $C(s, d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\rho_n \leq C 3^{-\beta(2+d-s)n} + \mathcal{O}_1(C 3^{-sn}). \quad (2.4.32)$$

By (2.4.27) and Hölder's inequality, the relation (2.4.31) can be improved to

$$3^{-(2+d)(n-m)} \log \mathbb{E} \left[ \exp \left( C^{-1} 3^{(2+d)(n-m)} \rho_n \right) \right] \leq C 3^{-\beta m}. \quad (2.4.33)$$

By Chebyshev's inequality, for every  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\rho_n \geq t] &\leq \exp \left( -C^{-1} 3^{(2+d)(n-m)} t \right) \mathbb{E} \left[ \exp \left( C^{-1} 3^{(2+d)(n-m)} \rho_n \right) \right] \\ &\leq \exp \left( -C^{-1} 3^{(2+d)(n-m)} t + C 3^{(2+d)(n-m)-\beta m} \right). \end{aligned}$$

Replacing  $t$  by  $C 3^{-\beta m} + t$  gives

$$\mathbf{P}[\rho_n \geq C 3^{-\beta m} + t] \leq \exp \left( -C^{-1} 3^{(2+d)(n-m)} t \right).$$

Choosing

$$m := \left\lfloor \frac{2 + d - s}{2 + d} n \right\rfloor$$

yields

$$\mathbf{P}[\rho_n \geq C 3^{-\beta \frac{2+d-s}{2+d} n} + t] \leq \exp \left( -C^{-1} 3^{sn} t \right).$$

By (2.1.19), this is (2.4.32), up to a redefinition of  $\beta(d, \Lambda) > 0$ .

*Step 3.* We now combine Lemma 2.22, (2.4.33) and the elementary inequality

$$\forall a, b > 0, \quad (a + b)^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} b \quad (2.4.34)$$

to get

$$\begin{aligned} \sup_{X, X^* \in B_1} \left| J(\square_n, X, X^*) - \left( \frac{1}{2} X \cdot \bar{\mathbf{A}}X + \frac{1}{2} X^* \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} X^* - X \cdot X^* \right) \right| \\ \leq 3^{-\frac{\beta}{2}(2+d-s)n} + \mathcal{O}_1 \left( C 3^{-\left(s - \frac{\beta}{2}\right)(2+d-s)n} \right). \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

For every  $s' \in (0, 2 + d)$ , if we set

$$s := \frac{2s' + \beta(2 + d)}{2 + \beta} \in (0, 2 + d),$$

then the right side of (2.4.35) can be rewritten as

$$3^{-\frac{\beta}{2+\beta}(2+d-s')n} + \mathcal{O}_1(C3^{-s'n}).$$

We thus obtained (2.4.3), up to a redefinition of  $\beta(d, \Lambda) > 0$ .  $\square$

**Proposition 2.28.** *There exist  $C(d, \Lambda) < \infty$  and a matrix  $\bar{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  satisfying*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi \cdot \bar{\mathbf{a}} \xi \geq \frac{1}{C} |\xi|^2 \quad \text{and} \quad |\bar{\mathbf{a}} \xi| \leq C |\xi|, \quad (2.4.36)$$

such that, for every  $p, q \in \mathbb{R}^d$ , we have the equivalence

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - p \cdot q = 0 \iff q = \bar{\mathbf{a}} p. \quad (2.4.37)$$

**Proof.** *Step 1.* We show that, for every  $p, q \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\bar{A}(p, q) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \geq p \cdot q. \quad (2.4.38)$$

By Lemma 2.4, we have for every  $S = (\nabla u, \mathbf{g}) \in \mathcal{C}_0(I \times U)$  and  $p, q \in \mathbb{R}^d$  that

$$\int A(p + \nabla u, q + \mathbf{g}, \cdot) \geq \int (p + \nabla u) \cdot (q + \mathbf{g}) = p \cdot q.$$

By the definition of  $\mu$  in (2.2.5), we deduce that

$$\mu(I \times U, p, q) \geq p \cdot q,$$

and thus (2.4.38) follows from (2.4.1).

*Step 2.* We show that, for every  $q^*, p^* \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} q^* \\ p^* \end{pmatrix} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} \begin{pmatrix} q^* \\ p^* \end{pmatrix} \geq q^* \cdot p^*. \quad (2.4.39)$$

Fix  $p^* \in \mathbb{R}^d$ . For every  $u \in \ell_{p^*} + H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  and  $\mathbf{g} \in L^2(I \times U; \mathbb{R}^d)$  satisfying  $-\nabla \cdot \mathbf{g} = -\partial_t u$ , we have  $(\nabla u, \mathbf{g}) \in \mathcal{C}(I \times U)$  as well as

$$\int_{I \times U} \nabla u = p^*$$

and

$$\int_{I \times U} (p^* - \nabla u) \cdot \mathbf{g} = \frac{1}{|I|} \int_U (u - \ell_p)^2 \geq 0.$$

Therefore, for every  $q^* \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned} \mu^*(I \times U, q^*, p^*) &\geq \int_{I \times U} (-A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot) + q^* \cdot \nabla u + p^* \cdot \mathbf{g}) \\ &\geq \int_{I \times U} (-A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot) + q^* \cdot p^* + \nabla u \cdot \mathbf{g}) \\ &= q^* \cdot p^* - \int_{I \times U} (A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot) - \nabla u \cdot \mathbf{g}). \end{aligned}$$



By the solvability of the Cauchy-Dirichlet problem (Proposition 2.34), for every  $p^* \in \mathbb{R}^d$ ,

$$0 = \inf \left\{ \int_{I \times U} (A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot) - \nabla u \cdot \mathbf{g}) \right. \\ \left. : u \in \ell_{p^*} + H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U), \mathbf{g} \in L^2(I \times U; \mathbb{R}^d), -\nabla \cdot \mathbf{g} = -\partial_t u \right\}.$$

Combining the above yields

$$\mu^*(I \times U, q^*, p^*) \geq q^* \cdot p^*.$$

According to Theorem 2.21, we have the  $\mathbf{P}$ -a.s. limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(\square_n, X^*) = \frac{1}{2} X^* \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} X^*.$$

We therefore obtain (2.4.39).

*Step 3.* We argue that, for every  $p \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\inf_{q \in \mathbb{R}^d} (\bar{A}(p, q) - p \cdot q) = 0. \quad (2.4.40)$$

We have already shown in (2.4.38) that the infimum on the left is nonnegative. The infimum is attained, by the quadratic growth of  $q \mapsto \bar{A}(p, q)$ . To see that it is equal to zero, we fix  $p \in \mathbb{R}^d$  and select  $q \in \mathbb{R}^d$  achieving the infimum. Then

$$\bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ p \end{pmatrix}.$$

Let  $q^* \in \mathbb{R}^d$  denote the “\*” in the previous line, so that

$$\bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^* \\ p \end{pmatrix}. \quad (2.4.41)$$

Then using (2.4.41), we find that

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} q^* \\ p \end{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}^{-1} \begin{pmatrix} q^* \\ p \end{pmatrix} = \sup_{p', q' \in \mathbb{R}^d} \left( \begin{pmatrix} q^* \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} \cdot \bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} \right) \\ = \begin{pmatrix} q^* \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

By the previous inequality and (2.4.39), we discover that

$$p \cdot q^* \leq \begin{pmatrix} q^* \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = p \cdot q^* + p \cdot q - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Rearranging, this yields  $\bar{A}(p, q) \leq p \cdot q$ , which in view of (2.4.38) allows us to deduce that  $\bar{A}(p, q) = p \cdot q$  and completes the proof of (2.4.40).

*Step 4.* We define  $\bar{\mathbf{a}}$  to be the matrix associated to the linear mapping taking  $p$  to the  $q$  achieving the infimum in (2.4.40). That the infimum is achieved at a unique minimum point is a consequence of the uniform convexity of  $q \mapsto \bar{A}(p, q)$ . That this mapping is linear is due to the fact that  $q \mapsto \bar{A}(p, q)$  is quadratic. The bounds (2.4.36) are a consequence of (2.4.2). This completes the proof of the proposition.  $\square$

## 2.5 Quantitative homogenization of the Cauchy-Dirichlet problem

In this section, we demonstrate the passage from the convergence of  $J$  to the homogenization of the parabolic operator. In particular, we complete the proof of Theorem 2.1 on the quantitative homogenization of the Cauchy-Dirichlet problem. The argument is completely deterministic in the sense that the only probabilistic ingredient is the appeal to Theorem 2.21. The argument proceeds in four steps : (i) we show that convergence of  $J$  implies convergence of  $S$  and  $\mathbf{A}S$  in  $H^{-1}$ ; (ii) we use Remark 2.9 to show that there are “finite-volume correctors” which can be found hiding in  $S$  and  $\mathbf{A}S$  and we obtain estimates on them; (iii) we use the finite-volume correctors and a quantitative version of the standard two-scale expansion argument to pass from estimates on the correctors to estimates on the homogenization error for a general Cauchy-Dirichlet problem.

### 2.5.1 Convergence of $J$ maximizers

In this subsection, we use the multiscale Poincaré inequality (Proposition 2.15) to obtain information about the weak convergence of  $S(\square_n, X, X^*)$  as  $n \rightarrow \infty$ . It is useful to define the quantity

$$\mathcal{E}(V) := \sup_{X, X^* \in B_1} |J(V, X, X^*) - \bar{J}(X, X^*)|,$$

which keeps track of the convergence of  $J$ . We also denote, given  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$\bar{S}(X, X^*) := \bar{\mathbf{A}}^{-1} X^* - X.$$

Note that  $\bar{S} = \nabla_{X^*} \bar{J}$  and therefore, by (2.2.29) and the fact that  $J$  and  $\bar{J}$  are quadratic, we have, for every  $X, X^* \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \bar{S}(X, X^*) - \int_V S(\cdot, V, X, X^*) \right| &= |\nabla_{X^*} \bar{J}(X, X^*) - \nabla_{X^*} J(V, X, X^*)| \\ &\leq C(|X| + |X^*|) \mathcal{E}(V). \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Similarly,

$$\begin{aligned} \left| \bar{\mathbf{A}} \bar{S}(X, X^*) - \int_V \mathbf{A}S(\cdot, V, X, X^*) \right| &= |\nabla_X \bar{J}(X, X^*) - \nabla_X J(V, X, X^*)| \\ &\leq C(|X| + |X^*|) \mathcal{E}(V). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

That is, we can control the spatial averages of  $S(\cdot, V, X, X^*)$  and  $\mathbf{A}S(\cdot, V, X, X^*)$  in terms of the random variable  $\mathcal{E}(V)$ . The combination of this observation and Proposition 2.15 yields the following result.

**Proposition 2.29** (Weak convergence of  $(S, \mathbf{A}S)$ ). *There exists  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $X, X^* \in B_1$  and  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\begin{aligned} 3^{-n} \|S(\cdot, \square_n, X, X^*) - \bar{S}(X, X^*)\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_n)} \\ \leq C 3^{-n} + C \sum_{m=0}^{n-1} 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

and

$$\begin{aligned} & 3^{-n} \left\| \mathbf{A}S(\cdot, \square_n, X, X^*) - \overline{\mathbf{A}}\overline{S}(X, X^*) \right\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_n)} \\ & \leq C3^{-n} + C \sum_{m=0}^{n-1} 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

**Proof.** We fix  $X, X^* \in B_1$  and, since it plays no role in the argument, we drop explicit display of the dependence on  $(X, X^*)$ . According to Proposition 2.15,

$$\begin{aligned} \left\| S(\cdot, \square_n) - \overline{S} \right\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_n)} & \leq C \left\| S(\cdot, \square_n) - \overline{S} \right\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \\ & \quad + C \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |(S(\cdot, \square_n))_{z+\square_m} - \overline{S}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

To estimate the first term on the right side, we just observe that

$$\left\| S(\cdot, \square_n) - \overline{S} \right\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq \left\| S(\cdot, \square_n) \right\|_{\underline{L}^2(\square_n)} + |\overline{S}| \leq C.$$

We next estimate the second term. By the triangle inequality, (2.5.1) and Lemma 2.25,

$$\begin{aligned} & \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |(S(\cdot, \square_n))_{z+\square_m} - \overline{S}|^2 \\ & \leq 2 \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \left( |(S(\cdot, z + \square_m))_{z+\square_m} - \overline{S}|^2 + \left\| S(\cdot, \square_n) - S(\cdot, z + \square_m) \right\|_{\underline{L}^2(z+\square_m)}^2 \right) \\ & \leq C \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \mathcal{E}(z + \square_m) + C \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (J(z + \square_m) - J(\square_n)) \\ & \leq C \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m) + \mathcal{E}(\square_n)). \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |(S(\cdot, \square_n))_{z+\square_m} - \overline{S}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( C\mathcal{E}(\square_n) + |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Combining the above yields (2.5.3). The estimate (2.5.4) is obtained similarly, we just need to use (2.5.2) instead of (2.5.1).  $\square$

We next give an estimate of the random variable appearing on the right side of (2.5.3) and (2.5.4), which is a straightforward consequence of Theorem 2.21. This is the only place in this section where Theorem 2.21 or any other stochastic ingredient is used.

**Proposition 2.30.** *There exists  $\beta(d, \Lambda)$  and, for every  $s \in (0, 2 + d)$ , a constant  $C(s, d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\sum_{m=0}^{n-1} 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 3^{-n\beta(2+d-s)} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ns}). \quad (2.5.5)$$

**Proof.** Fix  $s' := \frac{1}{3}(2s + 2 + d)$  and  $s'' := \frac{1}{3}(s + 2(2 + d))$  so that  $s < s' < s'' < 2 + d$  with equally sized gaps between these numbers. By Theorem 2.21 and (2.1.20), we have

$$|\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \leq C 3^{-m\beta(2+d-s'')} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ms''}).$$

Using the elementary inequality (2.4.34), we deduce that

$$\left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 3^{-m\beta(2+d-s'')/2} + \mathcal{O}_1(C 3^{m\beta(2+d-s'')/2 - ms''}).$$

Redefining  $\beta$  to be smaller if necessary, we get

$$\left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 3^{-m\beta(2+d-s')} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ms'}).$$

As the left side of the previous line is bounded by  $C$ , we can apply [4, Lemma A.3] to obtain

$$\left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 3^{-m\beta(2+d-s')} + \mathcal{O}_{d+2}(C 3^{-ms'/(d+2)}).$$

Since  $s'/(d+2) \leq 1 - c$ , we may apply (2.1.20) again to obtain

$$\sum_{m=0}^{n-1} 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 3^{-n\beta(2+d-s')} + \mathcal{O}_{d+2}(C 3^{-ns'/(d+2)}).$$

We conclude by observing that, for any nonnegative random variable  $X$ ,

$$X \leq C 3^{-n\beta(2+d-s')} + \mathcal{O}_{d+2}(C 3^{-ns'/(d+2)}) \implies X \leq C 3^{-n\beta(2+d-s)} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ns}), \quad (2.5.6)$$

where  $\beta(d, \Lambda)$  in the second statement may be smaller than in the first. To see this, we compute

$$\begin{aligned} X &\leq X + 3^{-n\beta(2+d-s)(1+d)} \leq 3^{n\beta(2+d-s)(1+d)} \left( X + 3^{-n\beta(2+d-s)} \right)^{2+d} \\ &\leq C 3^{n\beta(2+d-s)(1+d)} \left( X^{2+d} + 3^{-n\beta(2+d-s')(2+d)} \right) \\ &\leq C 3^{n\beta(2+d-s)(1+d)} \left( C 3^{-n\beta(2+d-s)(2+d)} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ns'}) \right) \\ &\leq C 3^{-n\beta(2+d-s)} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ns}), \end{aligned}$$

provided that  $\beta$  is small enough that  $\beta(2+d-s)(2+d) \leq s' - s$ . It suffices to require  $\beta \leq 1/3(2+d)$ . This completes the proof of (2.5.6) and of the proposition.  $\square$

### 2.5.2 Construction of finite-volume correctors

We next give the construction of the (finite-volume) correctors. The usage of the term “corrector” in stochastic homogenization is typically reserved for a function with stationary, mean-zero gradient which is the difference of a solution of the equation in the full space and an affine function. For our purposes, it is more convenient to work with a finite-volume approximation of the corrector which will be defined on a large cylinder  $\square_n$ , because this is what comes most easily and naturally out of the estimates we have already proved above. These correctors will be obtained in a simple way from  $S(\cdot, X, X^*)$  and  $\mathbf{A}S(\cdot, X, X^*)$  and Remark 2.9; the estimates we need for them will be easy consequences of (2.5.3) and (2.5.4). The fact that these correctors are not stationary functions defined in the whole space does not create any complication in the proof of Theorem 2.1.

The corrector with slope  $e \in \mathbb{R}^d$  on the cylinder  $\square_n$  with  $n \in \mathbb{N}$  will be denoted by  $\phi_{e,n}$ . We define it from the maximizers of  $J(\square_n, X, 0)$ , studied in the previous section. We first must make an appropriate choice of  $X$ , depending on  $e$ . This is a linear algebra exercise using Proposition 2.28. We set

$$X_e := - \begin{pmatrix} e \\ \bar{\mathbf{a}}e \end{pmatrix}$$

and observe from (2.4.37) that we have

$$\bar{\mathbf{A}}X_e = - \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}e \\ e \end{pmatrix}. \quad (2.5.7)$$

To check the previous line, we note (see Proposition 2.28) that the map

$$q \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e \\ q \end{pmatrix} \cdot \bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} e \\ q \end{pmatrix} - e \cdot q \quad \text{attains its minimum at } q = \bar{\mathbf{a}}e$$

and the map

$$p \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p \\ \bar{\mathbf{a}}e \end{pmatrix} \cdot \bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} p \\ \bar{\mathbf{a}}e \end{pmatrix} - p \cdot \bar{\mathbf{a}}e \quad \text{attains its minimum at } p = e.$$

Differentiating in  $p$  and  $q$ , respectively, gives (2.5.7).

We next take  $u_{e,n} \in H_{\text{par}}^1(\square_{n+1})$  to be the element  $u \in \mathcal{A}(\square_{n+1})$  in the representation of  $S(\cdot, \square_{n+1}, X_e, 0)$  given in Lemma 2.8, with additive constant chosen so that  $(u_{e,n})_{\square_n} = 0$ . Equivalently, in view of Remark 2.9, we can define  $u_{e,n}$  to be the function on  $\square_{n+1}$  with mean zero on  $\square_n$  with gradient given by

$$\nabla u_{e,n} = \frac{1}{2} (\pi_1 S(\cdot, \square_{n+1}, X_e, 0) + \pi_2 \mathbf{A}S(\cdot, \square_{n+1}, X_e, 0)), \quad (2.5.8)$$

where  $\pi_1$  and  $\pi_2$  denote the projections  $\mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^d$  onto the first and second  $d$  variables, respectively (that is,  $\pi_1(x, y) = x$  and  $\pi_2(x, y) = y$  for  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ). Note that, by Remark 2.9, we also have the formula

$$\mathbf{a}\nabla u_{e,n} = \frac{1}{2} (\pi_2 S(\cdot, \square_{n+1}, X_e, 0) + \pi_1 \mathbf{A}S(\cdot, \square_{n+1}, X_e, 0)). \quad (2.5.9)$$

By Proposition 2.29, (2.5.7), (2.5.8) and (2.5.9), we have that

$$\begin{aligned} & 3^{-n} \|\nabla u_{e,n} - e\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_{n+1})} + 3^{-n} \|\mathbf{a}\nabla u_{e,n} - \bar{\mathbf{a}}e\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_{n+1})} \\ & \leq C3^{-n} + C \sum_{m=0}^n 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Since  $u_{e,n} \in \mathcal{A}(\square_{n+1})$ , we have that  $u_{e,n}$  is a solution of

$$\partial_t u_{e,n} - \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla u_{e,n}) = 0 \quad \text{in } \square_{n+1}. \quad (2.5.11)$$

The approximate first-order corrector  $\phi_{e,n}$  is defined by subtracting the affine function  $x \mapsto e \cdot x$  from  $u_{e,n}$  :

$$\phi_{e,n}(x) := u_{e,n}(x) - e \cdot x.$$

Summarizing, we therefore have that  $\phi_{e,n}$  is a solution of

$$\partial_t \phi_{e,n} - \nabla \cdot (\mathbf{a}(e + \nabla \phi_{e,n})) = 0 \quad \text{in } \square_{n+1}, \quad (2.5.12)$$

and satisfies the estimates

$$\begin{aligned} & 3^{-n} \left( \|\nabla \phi_{e,n}\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_{n+1})} + \|\mathbf{a}(e + \nabla \phi_{e,n}) - \bar{\mathbf{a}}e\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_{n+1})} \right) \\ & \leq C3^{-n} + C \sum_{m=0}^n 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

By the previous two displays, Proposition 2.16 and  $(\phi_{e,n})_{\square_n} = 0$ , we also have

$$3^{-n} \|\phi_{e,n}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C3^{-n} + C \sum_{m=0}^n 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5.14)$$

### 2.5.3 The proof of Theorem 2.1

The main step in the proof of Theorem 2.1 is the following proposition. It is a deterministic estimate of the homogenization error in terms of the error in the convergence of the correctors defined in the previous subsection. Since we have already estimated the latter in (2.5.5), (2.5.13) and (2.5.14), this is sufficient to imply the theorem. It is convenient to denote, for every  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(m) := & 3^{-m} \sum_{k=1}^d \left( \|\phi_{e_k, m}\|_{\underline{L}^2(\square_m)} + \|\nabla \phi_{e_k, m}\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_m)} \right. \\ & \left. + \|\mathbf{a}(e_k + \nabla \phi_{e_k, m}) - \bar{\mathbf{a}}e_k\|_{\underline{H}_{\text{par}}^{-1}(\square_m)} \right). \end{aligned}$$

We also set, for each  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbf{a}^\varepsilon(t, x) := \mathbf{a}\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{and} \quad \phi_{e,n}^\varepsilon(t, x) := \varepsilon \phi_{e,n}\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (2.5.15)$$

**Proposition 2.31.** *Fix a bounded interval  $I := (I_-, 0) \subseteq (-\frac{1}{4}, 0)$ , a bounded Lipschitz domain  $U \subseteq \square_0$ , a small parameter  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ , an exponent  $\delta > 0$  and a initial-boundary condition  $f \in W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(I \times U)$ . Let*

$$u^\varepsilon, u \in f + H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$$

respectively denote the solutions of

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nabla \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{in } I \times U, \\ u^\varepsilon = f & \text{on } \partial_\sqcup(I \times U), \end{cases} \quad (2.5.16)$$

and

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{a}} \nabla u) = 0 & \text{in } I \times U, \\ u = f & \text{on } \partial_\square(I \times U). \end{cases} \quad (2.5.17)$$

Let  $n \in \mathbb{N}$  be such that  $3^{-n} \leq \varepsilon < 3^{-(n+1)}$ . Then there exist  $\beta(\delta, d, \Lambda) > 0$  and  $C(I, U, \delta, d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $r \in (0, 1)$ , we have the estimate

$$\begin{aligned} \|\nabla u^\varepsilon - \nabla u\|_{\tilde{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} + \|\mathbf{a}^\varepsilon \nabla u^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}} \nabla u\|_{\tilde{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} + \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(I \times U)} \\ \leq C \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(I \times U)} \left( r^\beta + \frac{1}{r^{3+(2+d)/2}} \mathcal{E}'(n) \right). \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

**Proof.** With  $n$  fixed as in the statement of the proposition, we let  $\phi_e = \phi_{e,n}$  denote, for each  $e \in \mathbb{R}^d$ , the (finite-volume) corrector defined in the previous subsection (we will not display its dependence on  $n$ ). We also use the notation  $\phi_e^\varepsilon = \phi_{e,n}^\varepsilon$  as in (2.5.15).

We will argue that  $u^\varepsilon$  is close to its modified two-scale expansion suitably cut off near the boundary. The latter is defined by

$$\begin{aligned} w^\varepsilon(t, x) &:= u(t, x) + \varepsilon \zeta_r(t, x) \sum_{k=1}^d \partial_{x_k} u(t, x) \phi_{e_k} \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \\ &= u(t, x) + \zeta_r(t, x) \sum_{k=1}^d \partial_{x_k} u(t, x) \phi_{e_k}^\varepsilon(t, x), \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

where  $r \in (0, 1)$  is the free parameter (representing a mesoscopic scale) given in the proposition, and we denote

$$U_r := \{x \in U : \text{dist}(x, \partial U) > r\} \quad \text{and} \quad I_r := (I_- + r^2, I_+),$$

where the cutoff function  $\zeta_r$  is selected so that

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_r \leq 1, & \zeta_r = 1 \text{ in } I_{2r} \times U_{2r}, \\ \zeta_r \equiv 0 \text{ in } (I \times U) \setminus (I_r \times U_r), \\ \forall k, l \in \mathbb{N}, & |\nabla^k \partial_t^l \zeta_r| \leq C_{k+2l} r^{-(k+2l)}. \end{cases} \quad (2.5.20)$$

Note that the constant  $C_m$  here depends on  $(I, U, d)$  in addition to  $\bar{m} \in \mathbb{N}$ .

*Step 0.* We record some standard estimates from the deterministic regularity theory for uniformly parabolic equations that are needed below. The global Meyers estimate (see Proposition 2.39) gives us  $\delta_0(U, d, \Lambda) > 0$  such that  $\delta \leq \delta_0$  implies that

$$\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^{2+\delta}(I \times U)} + \|\nabla u\|_{L^{2+\delta}(I \times U)} \leq C \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(I \times U)}. \quad (2.5.21)$$

We henceforth assume without loss of generality that  $\delta \leq \delta_0$  so that (2.5.21) holds. We also need pointwise derivative estimates for constant-coefficient parabolic equations. These can be found for instance in [19, Section 2.3.3.c] (note that estimates for the operator  $\partial_t - \nabla \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla$  are implied by estimates for the heat equation, by a simple affine change of variables), and they yield, for every  $m, l \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|\partial_t^l \nabla^m u\|_{L^\infty(I_r \times U_r)} &\leq C_{m+2l} r^{-m-2l} r^{-(2+d)/2} \|u\|_{L^2(I \times U)} \\ &\leq C_{m+2l} r^{-m-2l} r^{1-(2+d)/2} \|\nabla u\|_{L^2(I \times U)}. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Here  $C_k$  depends only on  $(d, \Lambda)$  in addition to  $k \in \mathbb{N}$ .

The main step in the proof is to obtain an estimate on  $\|u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{H_{\text{par}}^1(I \times U)}$ , which is stated below in (2.5.25).

*Step 1.* We plug  $w^\varepsilon$  into the heterogeneous equation and estimate the error. The claim is that we can write  $(\partial_t - \nabla \cdot \mathbf{a}^\varepsilon \nabla) w^\varepsilon$  in the form

$$(\partial_t - \nabla \cdot \mathbf{a}^\varepsilon \nabla) w^\varepsilon = \partial_t F + G$$

where  $F \in H_{\text{par}, \square}^1(I \times U)$  and  $G \in L^2(I; H^{-1}(U))$  satisfy the estimates

$$\|F\|_{L^2(I; H^1(U))} + \|G\|_{L^2(I; H^{-1}(U))} \leq C \left( r^{\frac{\delta}{4+2\delta}} + r^{-3-(2+d)/2} \mathcal{E}'(n) \right) \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(I \times U)}. \quad (2.5.23)$$

We begin by computing

$$\begin{cases} \nabla w^\varepsilon = \zeta_r \sum_{k=1}^d (e_k + \nabla \phi_{e_k}^\varepsilon) \partial_{x_k} u + \sum_{k=1}^d \phi_{e_k}^\varepsilon \nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u) + (1 - \zeta_r) \nabla u, \\ \partial_t w^\varepsilon = \partial_t u + \zeta_r \sum_{k=1}^d \partial_t \phi_{e_k}^\varepsilon \partial_{x_k} u + \sum_{k=1}^d \phi_{e_k}^\varepsilon \partial_t (\zeta_r \partial_{x_k} u). \end{cases}$$

According to (2.5.11), the map  $\widehat{u}_e^\varepsilon(t, x) := e \cdot x + \phi_e^\varepsilon(t, x)$  is a solution of the equation

$$\partial_t \widehat{u}_e^\varepsilon - \nabla \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon \nabla \widehat{u}_e^\varepsilon) = 0 \quad \text{in } I \times U.$$

Therefore we find that

$$\begin{aligned} \partial_t w^\varepsilon - \nabla \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon) &= \partial_t u + \sum_{k=1}^d \phi_{e_k}^\varepsilon \partial_t (\zeta_r \partial_{x_k} u) - \sum_{k=1}^d \nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u) \cdot \mathbf{a}^\varepsilon (e_k + \nabla \phi_{e_k}^\varepsilon) \\ &\quad - \nabla \cdot \left( \mathbf{a}^\varepsilon \left( \sum_{k=1}^d \phi_{e_k}^\varepsilon \nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u) + (1 - \zeta_r) \nabla u \right) \right). \end{aligned}$$

Since  $u$  satisfies the homogenized equation, we have furthermore that

$$\partial_t u = \nabla \cdot \bar{\mathbf{a}} \nabla u = \sum_{k=1}^d \nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u) \cdot \bar{\mathbf{a}} e_k + \nabla \cdot ((1 - \zeta_r) \bar{\mathbf{a}} \nabla u),$$

and this gives us the identity

$$\begin{aligned} \partial_t w^\varepsilon - \nabla \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon) &= \sum_{k=1}^d \phi_{e_k}^\varepsilon \partial_t (\zeta_r \partial_{x_k} u) - \sum_{k=1}^d \nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u) \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon (e_k + \nabla \phi_{e_k}^\varepsilon) - \bar{\mathbf{a}} e_k) \\ &\quad - \nabla \cdot \left( \mathbf{a}^\varepsilon \sum_{k=1}^d \phi_{e_k}^\varepsilon \nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u) \right) - \nabla \cdot ((\mathbf{a}^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}}) (1 - \zeta_r) \nabla u). \end{aligned}$$

According to Lemma 2.20, we can find  $v \in L^2(I; H_0^1(U))$  and  $v^* \in L^2(I; H^{-1}(U))$  such that

$$f^* := - \sum_{k=1}^d \nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u) \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon (e_k + \nabla \phi_{e_k}^\varepsilon) - \bar{\mathbf{a}} e_k) = \partial_t v + v^* \quad (2.5.24)$$

and

$$\|v\|_{L^2(I; H^1(U))} + \|v^*\|_{L^2(I; H^{-1}(U))} \leq C \|f^*\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)}.$$



The lemma allows us to take  $v$  and  $v^*$  to vanish in a neighborhood of the parabolic boundary of  $I \times U$ . Since the left side of (2.5.24) belongs to  $L^2(I; H^{-1}(U))$ , we have also that  $v \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$ . Therefore we obtain that

$$\partial_t w^\varepsilon - \nabla \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon) = \partial_t F + G$$

where

$$F := v$$

and

$$G := v^* + \sum_{k=1}^d \phi_{e_k}^\varepsilon \partial_t (\zeta_r \partial_{x_k} u) - \nabla \cdot \left( \mathbf{a}^\varepsilon \sum_{k=1}^d \phi_{e_k}^\varepsilon \nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u) \right) - \nabla \cdot ((\mathbf{a}^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}}) (1 - \zeta_r) \nabla u).$$

It is clear that

$$\begin{aligned} & \|F\|_{L^2(I; H^1(U))} + \|G\|_{L^2(I; H^{-1}(U))} \\ & \leq C \sum_{k=1}^d \|\phi_{e_k}^\varepsilon \partial_t (\zeta_r \partial_{x_k} u)\|_{L^2(I \times U)} + C \sum_{k=1}^d \|\nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u) \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon (e_k + \nabla \phi_{e_k}^\varepsilon) - \bar{\mathbf{a}} e_k)\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ & \quad + C \left\| \mathbf{a}^\varepsilon \sum_{k=1}^d \phi_{e_k}^\varepsilon \nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u) \right\|_{L^2(I \times U)} + C \|(\mathbf{a}^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}}) (1 - \zeta_r) \nabla u\|_{L^2(I \times U)} \\ & = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \end{aligned}$$

We will now show that each of the four terms  $T_i$  can be estimated by the right side of (2.5.23), using the definition of  $\mathcal{E}'(n)$  and the bounds (2.5.20), (2.5.21) and (2.5.22). For  $T_1$ , we use (2.5.20) and (2.5.22) to find that, for each  $e \in \partial B_1$ ,

$$\begin{aligned} \|\phi_{e_k}^\varepsilon \partial_t (\zeta_r \partial_{x_k} u)\|_{L^2(I \times U)} & \leq C \|\partial_t (\zeta_r \partial_{x_k} u)\|_{L^\infty(I \times U)} \|\phi_e^\varepsilon\|_{L^2(I \times U)} \\ & \leq C r^{-3-(2+d)/2} \mathcal{E}'(n) \|f\|_{H_{\text{par}}^1(I \times U)}. \end{aligned}$$

For  $T_2$ , we have

$$\begin{aligned} & \|\nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u) \cdot (\mathbf{a}^\varepsilon (e + \nabla \phi_e^\varepsilon) - \bar{\mathbf{a}} e)\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ & \leq C \|\nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u)\|_{W^{1, \infty}(I \times U)} \|\mathbf{a}^\varepsilon (e + \nabla \phi_e^\varepsilon) - \bar{\mathbf{a}} e\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ & \leq C r^{-3-(2+d)/2} \mathcal{E}'(n) \|f\|_{H_{\text{par}}^1(I \times U)}. \end{aligned}$$

For  $T_3$ , we use (2.5.20) and (2.5.22) again to get

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}^\varepsilon \phi_e^\varepsilon \nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u)\|_{L^2(I \times U)} & \leq C \|\nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u)\|_{L^\infty(I \times U)} \|\phi_e^\varepsilon\|_{L^2(I \times U)} \\ & \leq C r^{-2-(2+d)/2} \mathcal{E}'(n) \|f\|_{H_{\text{par}}^1(I \times U)}. \end{aligned}$$

Finally, for  $T_4$ , we use (2.5.20), (2.5.21) and Hölder's inequality to get

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{a}^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}}) (1 - \zeta_r) \nabla u\|_{L^2(I \times U)} & \leq C |\{x \in I \times U : \zeta_r(x) \neq 1\}|^{\frac{\delta}{4+2\delta}} \|\nabla u\|_{L^{2+\delta}(I \times U)} \\ & \leq C r^{\frac{\delta}{4+2\delta}} \|f\|_{W_{\text{par}}^{1, 2+\delta}(I \times U)}. \end{aligned}$$

This completes the proof of (2.5.23).

*Step 2.* We deduce that

$$\|u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{L^2(I; H^1(U))} \leq C \left( r^{\frac{\delta}{4+2\delta}} + r^{-3-(2+d)/2} \mathcal{E}'(n) \right) \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(I \times U)}. \quad (2.5.25)$$

This is an immediate consequence of the estimate (2.5.23) proved in the previous step, the fact that  $u^\varepsilon - w^\varepsilon, F \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  and the estimate (2.7.12) proved in the appendix.

At this point, we have succeeded in comparing  $u^\varepsilon$  to  $w^\varepsilon$ . What is left is to compare  $w^\varepsilon$  to  $u$  by showing that the second term on the right side of (2.5.19) is small. This is relatively straightforward to obtain from (2.5.13) and (2.5.14).

*Step 3.* We show that

$$\begin{aligned} \|u - w^\varepsilon\|_{L^2(I \times U)} + \|\nabla u - \nabla w^\varepsilon\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} + \|\bar{\mathbf{a}} \nabla u - \mathbf{a}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ \leq C \left( r^{\frac{\delta}{4+2\delta}} + r^{-3-(2+d)/2} \mathcal{E}'(n) \right) \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(I \times U)}. \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

We use the formula

$$\begin{aligned} \nabla w^\varepsilon(t, x) - \nabla u(t, x) \\ = \varepsilon \sum_{k=1}^d \nabla (\zeta_r \partial_{x_k} u)(t, x) \phi_{e_k} \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \zeta_r(t, x) \sum_{k=1}^d \partial_{x_k} u(t, x) \nabla \phi_{e_k} \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

to get

$$\begin{aligned} \|\nabla u - \nabla w^\varepsilon\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ \leq \|\nabla (\zeta_r \nabla u)\|_{L^\infty(I \times U)} \varepsilon \sum_{k=1}^d \|\phi_{e_k}\|_{\underline{L}^2(Q_{\varepsilon^{-1}})} + C \|\zeta_r \nabla u\|_{W^{1,\infty}(I \times U)} \|\nabla \phi_{e_k} \left( \frac{\cdot}{\varepsilon^2}, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right)\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ \leq C r^{-2} \|f\|_{H_{\text{par}}^1(I \times U)} \mathcal{E}'(n). \end{aligned}$$

For the fluxes, we find it convenient to use coordinates. We have

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon)_i(t, x) &= \sum_{j,k=1}^d \zeta_r(t, x) \mathbf{a}_{ij}^\varepsilon(t, x) \partial_{x_k} u(t, x) (\delta_{jk} + \partial_{x_j} \phi_{e_k} \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon} \right)) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{j,k=1}^d \mathbf{a}_{ij}^\varepsilon(t, x) \partial_{x_j} (\zeta_r \partial_{x_k} u)(t, x) \phi_{e_k} \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon)_i(t, x) - (\bar{\mathbf{a}} \nabla u)_i(t, x) \\ = \sum_{j,k=1}^d \zeta_r(t, x) \partial_{x_k} u(t, x) (\mathbf{a}_{ij}^\varepsilon(t, x) (\delta_{jk} + \partial_{x_j} \phi_{e_k} \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon} \right)) - \bar{\mathbf{a}}_{ik}) \\ + \sum_{j,k=1}^d (1 - \zeta_r(t, x)) \bar{\mathbf{a}}_{ik} \partial_{x_k} u(t, x) + \varepsilon \sum_{j,k=1}^d \mathbf{a}_{ij}^\varepsilon(t, x) \partial_{x_j} (\zeta_r \partial_{x_k} u)(t, x) \phi_{e_k} \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

We can easily estimate the last two terms on the right side using (2.5.20), (2.5.21), (2.5.22) and the Hölder inequality. We have

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^d \|(1-\zeta_r) \bar{\mathbf{a}}_{ik} \partial_{x_k} u\|_{L^2(I \times U)} &\leq C \|\nabla u\|_{L^2((I \times U) \setminus (I_r \times U_r))} \\ &\leq Cr^{\frac{\delta}{4+2\delta}} \|\nabla u\|_{L^{2+\delta}(I \times U)} \leq Cr^{\frac{\delta}{4+2\delta}} \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(I \times U)} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{j,k=1}^d \|\mathbf{a}_{ij}^\varepsilon \partial_{x_j} (\zeta_r \partial_{x_k} u) \phi_{e_k} \left( \frac{\cdot}{\varepsilon^2}, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right)\|_{L^2(I \times U)} &\leq C \|\nabla (\zeta_r \nabla u)\|_{L^\infty(I \times U)} \varepsilon \sum_{k=1}^d \|\phi_{e_k}\|_{\underline{L}^2(Q_{1/2})} \\ &\leq Cr^{-2-(2+d)/2} \|f\|_{H_{\text{par}}^1(I \times U)} \mathcal{E}'(n). \end{aligned}$$

For the first term, we have

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^d \|\zeta_r \partial_{x_k} u (\mathbf{a}_{ij}^\varepsilon (\delta_{jk} + \partial_{x_j} \phi_{e_k} \left( \frac{\cdot}{\varepsilon^2}, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right)) - \bar{\mathbf{a}}_{ik})\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ \leq C \sum_{j,k=1}^d \|\zeta_r \partial_{x_k} u\|_{W^{1,\infty}(I \times U)} \|\mathbf{a}_{ij}^\varepsilon (\delta_{jk} + \partial_{x_j} \phi_{e_k} \left( \frac{\cdot}{\varepsilon^2}, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right)) - \bar{\mathbf{a}}_{ik}\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ \leq Cr^{-3} \|f\|_{H_{\text{par}}^1(I \times U)} \sum_{k=1}^d \|\mathbf{a}^\varepsilon (e_k + \nabla \phi_{e_k}) - \bar{\mathbf{a}} e_k\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(Q_{1/2})} \\ \leq Cr^{-3-(2+d)/2} \|f\|_{H_{\text{par}}^1(I \times U)} \mathcal{E}'(n). \end{aligned}$$

Combining the previous four displays, we obtain

$$\|\mathbf{a}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}} \nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \leq C \left( r^{\frac{\delta}{4+2\delta}} + r^{-3-(2+d)/2} \mathcal{E}'(n) \right) \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(I \times U)}.$$

Finally, for the estimate of  $w^\varepsilon - u$ , we have

$$\begin{aligned} \|w^\varepsilon - u\|_{L^2(I \times U)} &\leq C \|\nabla u\|_{L^\infty((I \times U) \setminus (I_r \times U_r))} \varepsilon \sum_{k=1}^d \|\phi_{e_k} \left( \frac{\cdot}{\varepsilon^2}, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right)\|_{L^2(I \times U)} \\ &\leq Cr^{-1-(2+d)/2} \|f\|_{H_{\text{par}}^1(I \times U)} \mathcal{E}'(n). \end{aligned}$$

This completes the proof of (2.5.26).

*Step 4.* We summarize and conclude the argument. According to (2.5.25), (2.5.26) and the triangle inequality, we have

$$\begin{aligned} \|\nabla u^\varepsilon - \nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} &\leq \|\nabla u^\varepsilon - \nabla w^\varepsilon\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} + \|\nabla w^\varepsilon - \nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ &\leq C \|u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{L^2(I; H^1(U))} + \|\nabla w^\varepsilon - \nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ &\leq C \left( r^{\frac{\delta}{4+2\delta}} + r^{-3-(2+d)/2} \mathcal{E}'(n) \right) \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(I \times U)}. \end{aligned}$$

Similarly, for the fluxes we have

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}^\varepsilon \nabla u^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}} \nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} &\leq \|\mathbf{a}^\varepsilon \nabla u^\varepsilon - \mathbf{a}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} + \|\mathbf{a}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}} \nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ &\leq C \|u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{L^2(I; H^1(U))} + \|\mathbf{a}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}} \nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} \\ &\leq C \left( r^{\frac{\delta}{4+2\delta}} + r^{-3-(2+d)/2} \mathcal{E}'(n) \right) \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(I \times U)}, \end{aligned}$$

and, for the homogenization error, we have

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(I \times U)} &\leq \|u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{L^2(I \times U)} + \|w^\varepsilon - u\|_{L^2(I \times U)} \\ &\leq C \left( r^{\frac{\delta}{4+2\delta}} + r^{-3-(2+d)/2} \mathcal{E}'(n) \right) \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,2+\delta}(I \times U)}. \end{aligned}$$

This completes the proof of the proposition.  $\square$

To complete the proof of Theorem 2.1, we just need to estimate the random variables on the right side of (2.5.18) using Proposition 2.30 and the estimates (2.5.13) and (2.5.14) for the correctors.

**Proof** (Proof of Theorem 2.1). Fix  $s \in (0, 2+d)$  and put  $s' := \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}(2+d)$  and  $s'' := \frac{1}{2}s' + \frac{1}{2}(2+d)$ . Thus  $s < s' < s'' < 2+d$  and the gaps are at least of size  $\frac{1}{4}(2+d-s)$ . Observe that (2.5.13) and (2.5.14) imply that

$$\mathcal{E}'(n) \leq C 3^{-n} + C \sum_{m=0}^{n-1} 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathcal{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Thus, by Proposition 2.30,

$$\mathcal{E}'(n) \leq C 3^{-n\beta(2+d-s'')} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ns''}).$$

Thus

$$3^{ns'} \left( \mathcal{E}'(n) - C 3^{-n\beta(2+d-s'')} \right)_+ \leq \mathcal{O}_1(C 3^{-n(s'-s)}).$$

By (2.1.20),

$$\mathcal{X} := \sum_{n \in \mathbb{N}} 3^{ns'} \left( \mathcal{E}'(n) - C 3^{-n\beta(2+d-s'')} \right)_+ \leq \mathcal{O}_1(C).$$

Proposition 2.31 yields therefore that, for every  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$  and  $r \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \|\nabla u^\varepsilon - \nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} + \|\mathbf{a}^\varepsilon \nabla u^\varepsilon - \bar{\mathbf{a}} \nabla u\|_{\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)} + \|u^\varepsilon - u\|_{\underline{L}^2(I \times U)} \\ \leq C \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,p}(I \times U)} \left( r^\beta + \frac{1}{r^{3+(2+d)/2}} \left( \varepsilon^{\beta(2+d-s'')} + \varepsilon^{s'} \mathcal{X}' \right) \right). \end{aligned}$$

We now select  $r \in (0, 1)$  as small as possible (it must be no larger than a positive power of  $\varepsilon$ ) such that  $r^{-3-(2+d)/2} \varepsilon^{s'} \leq \varepsilon^s$  and  $r^{-3-(2+d)/2} \leq \varepsilon^{-\beta(2+d-s'')/2}$ . We can take for example

$$r := \varepsilon^{\beta(2+d-s'')/(3+(2+d)/2)} \vee \varepsilon^{(s'-s)/(3+(2+d)/2)}.$$

Recalling that  $2+d-s'' \geq \frac{1}{4}(2+d-s)$  and  $s'-s \geq \frac{1}{4}(2+d-s)$ , we obtain the theorem.  $\square$

## 2.6 Regularity theory

In this section, we sketch the proof of Theorem 2.2, following along the lines of the argument given in the proof of [4, Theorem 3.6] in the elliptic case. We do not give full details, since this would involve an almost verbatim repetition of the proof of the latter.

We begin by reformulating Theorem 2.1 in a slightly different way in terms of *caloric approximation* which is more convenient for its application in this section. The next statement can be compared to its elliptic analogue in [4, Proposition 3.2].

**Proposition 2.32** (Caloric approximation). *Fix  $s \in (0, 2+d)$ . There exist an exponent  $\alpha(d, \Lambda) > 0$ , a constant  $C(s, d, \Lambda) < \infty$ , and a random variable  $\mathcal{X}_s : \Omega \rightarrow [1, \infty]$  satisfying the estimate*

$$\mathcal{X}_s = \mathcal{O}_s(C), \quad (2.6.1)$$

such that the following holds : for every  $R \geq \mathcal{X}_s$  and weak solution  $u \in H_{\text{par}}^1(Q_R)$  of

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla u) = 0 \quad \text{in } Q_R, \quad (2.6.2)$$

there exists a solution  $\bar{u} \in H_{\text{par}}^1(Q_{R/2})$  of the equation

$$\partial_t \bar{u} - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{a}} \nabla \bar{u}) = 0 \quad \text{in } Q_{R/2}$$

such that

$$\|u - \bar{u}\|_{\underline{L}^2(Q_{R/2})} \leq CR^{-\alpha(2+d-s)} \|u - (u)_{Q_R}\|_{\underline{L}^2(Q_R)}. \quad (2.6.3)$$

**Proof.** This is a simple application of Theorem 2.1 combined with the parabolic Meyers estimate. The argument is almost the same as in the elliptic case presented in [4, Proposition 3.2], we just need to replace the elliptic interior Meyers estimate with its parabolic analogue proved in Proposition 2.38 below. The latter gives us  $\delta(d, \Lambda) > 0$  and  $C(d, \Lambda) > 0$  such that, for every  $u \in H_{\text{par}}^1(Q_R)$  satisfying (2.6.2), we have that  $\nabla u \in L^{2+\delta}(Q_{R/2})$  and the estimate

$$\|\nabla u\|_{\underline{L}^{2+\delta}(Q_{R/2})} \leq \frac{C}{R} \|u - (u)_{Q_R}\|_{\underline{L}^2(Q_R)}. \quad (2.6.4)$$

Following the proof of [4, Proposition 3.2], using (2.6.4), substituting Theorem 2.1 in place of [4, Theorem 2.16] and making obvious changes to the notation, we obtain the proposition.  $\square$

We next state a parabolic counterpart of [4, Lemma 3.5].

**Lemma 2.33.** *Fix  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $K \geq 1$  and  $X \geq 1$ . Let  $R \geq 2X$  and  $u \in L^2(Q_R)$  have the property that, for every  $r \in [X, R]$ , there exists  $w_r \in H_{\text{par}}^1(Q_{r/2})$  which is a solution of*

$$\partial_t w_r - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{a}} \nabla w_r) = 0 \quad \text{in } Q_{r/2}$$

and satisfies

$$\|u - w_r\|_{\underline{L}^2(Q_{r/2})} \leq Kr^{-\alpha} \|u - (u)_{Q_r}\|_{\underline{L}^2(Q_r)}. \quad (2.6.5)$$

Then, for every  $k \in \mathbb{N}$ , there exists  $\theta(\alpha, k, d, \Lambda) \in (0, \frac{1}{2})$  and  $C(\alpha, k, d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $r \in [X, R]$ ,

$$\begin{aligned} & \inf_{p \in \bar{\mathcal{A}}_k(Q_\infty)} \|u - p\|_{\underline{L}^2(Q_{\theta r})} \\ & \leq \frac{1}{4} \theta^{k+1-\alpha/2} \inf_{p \in \bar{\mathcal{A}}_k(Q_\infty)} \|u - p\|_{\underline{L}^2(Q_r)} + CKr^{-\alpha} \|u - (u)_{Q_r}\|_{\underline{L}^2(Q_r)}. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

**Proof.** The proof is essentially the same as that of [4, Lemma 3.5]. We just have to substitute balls for parabolic cylinders and use Proposition 2.32 in place of its elliptic version. These changes cause no additional complexity in the proof.  $\square$

With Lemma 2.33 in hand, the proof of Theorem 2.2 is now completed in the same way as the one of [4, Theorem 3.6], by following the argument almost verbatim and making only obvious modifications. We refer to [4] for the details.

## 2.7 Appendix A : Variational structure of uniformly parabolic equations

The aim of this appendix is to show that the solution of the parabolic equation (2.2.1) can be obtained as the minimizer of a uniformly convex functional. We will prove this result in the more general context of uniformly monotone operators, since this causes no modification to the proof. Although our statement differs in detail, it is close to the main result of [23] (see also the monograph [22]). The proof we give is also relatively close to that of [23]; we hope that the reader will appreciate the short and self-contained presentation in this appendix. The fact that a parabolic equation can be cast as the first variation of a uniformly convex integral functional was first discovered in [13, 14].

Let  $I := (0, T) \subseteq \mathbb{R}$  and  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  be a bounded Lipschitz domain. For a given right-hand side  $w^*$  and boundary condition (both of which will be made precise below), we study the solvability of the parabolic equation

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{a}(\nabla u, \cdot)) = w^* \quad \text{in } I \times U, \quad (2.7.1)$$

where the dot “ $\cdot$ ” represents the time-space variable in  $I \times U \subseteq \mathbb{R}^{1+d}$ , and  $\mathbf{a} \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1+d}; \mathbb{R}^d)$  is Lipschitz and uniformly monotone in its first argument. That is, we assume that there exists a constant  $\lambda < \infty$  such that, for every  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^d$  and  $z \in \mathbb{R}^{1+d}$ ,

$$\begin{cases} |\mathbf{a}(p_1, z) - \mathbf{a}(p_2, z)| \leq \lambda |p_1 - p_2|, \\ (\mathbf{a}(p_1, z) - \mathbf{a}(p_2, z)) \cdot (p_1 - p_2) \geq \lambda^{-1} |p_1 - p_2|^2. \end{cases} \quad (2.7.2)$$

As a first step, we introduce a variational representation of the mapping  $p \mapsto \mathbf{a}(p, z)$ , for each  $z \in \mathbb{R}^{1+d}$ . This idea is often attributed to Fitzpatrick [20], although it actually appeared in the work of Krylov [34] several years earlier.

By [7, Theorem 2.9], there exists  $A \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1+d})$  satisfying the following properties, for  $\Lambda := 2\lambda + 1$  and for each  $z \in \mathbb{R}^{1+d}$ :

— the mapping

$$(p, q) \mapsto A(p, q, z) - \frac{1}{2\Lambda} (|p|^2 + |q|^2) \quad \text{is convex}; \quad (2.7.3)$$

— the mapping

$$(p, q) \mapsto A(p, q, z) - \frac{\Lambda}{2} (|p|^2 + |q|^2) \quad \text{is concave}; \quad (2.7.4)$$

— for every  $p, q \in \mathbb{R}^d$ , we have

$$A(p, q, z) \geq p \cdot q, \quad (2.7.5)$$

and

$$A(p, q, z) = p \cdot q \iff q = \mathbf{a}(p, z). \quad (2.7.6)$$

In the particular case when  $p \mapsto \mathbf{a}(p, z)$  is linear, we can define the mapping  $(p, q) \mapsto A(p, q, z)$  according to (2.2.3), see Lemma 2.4. Another familiar example is when  $\mathbf{a}(\cdot, z)$  is the gradient of a uniformly convex Lagrangian  $L(p, z)$ , that is,  $\mathbf{a}(\cdot, z) = \nabla_p L(\cdot, z)$  where  $p \mapsto L(p, z)$  is uniformly convex. In this case, we can take

$$A(p, q, z) := L(p, z) + L^*(q, z),$$

where  $L^*$  is the Legendre-Fenchel transform of  $L$ . We remark that the choice of  $A$  is in general not unique.

We define the function space

$$Z(I \times U) := \left\{ (u, u^*) : u \in L^2(I; H^1(U)) \text{ and } (u^* - \partial_t u) \in L^2(I; H^{-1}(U)) \right\},$$

with norm

$$\|(u, u^*)\|_{Z(I \times U)} := \|u\|_{L^2(I; H^1(U))} + \|u^* - \partial_t u\|_{L^2(I; H^{-1}(U))}.$$

The function space  $H_{\text{par}}^1(I \times U)$  is defined in (2.1.9)-(2.1.10). We denote by  $H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  the closure in  $H_{\text{par}}^1(I \times U)$  of the set of smooth functions with compact support in  $(0, T] \times U$ . For every  $(u, u^*) \in Z(I \times U)$ , we set

$$\mathcal{J}[u, u^*] := \inf \left\{ \int_{I \times U} (A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot) - \nabla u \cdot \mathbf{g}) : -\nabla \cdot \mathbf{g} = u^* - \partial_t u \right\}. \quad (2.7.7)$$

In the infimum above, we understand that  $\mathbf{g} \in L^2(I \times U; \mathbb{R}^d)$ , and the last condition is interpreted as

$$\forall \phi \in L^2(I; H_0^1(U)), \quad \int_{I \times U} \nabla \phi \cdot \mathbf{g} = \int_{I \times U} \phi (u^* - \partial_t u). \quad (2.7.8)$$

Note that the set of candidates for  $\mathbf{g}$  is not empty ; indeed, denoting by  $\Delta_U^{-1}$  the solution operator for the Laplacian in  $U$  with a null Dirichlet boundary condition, we verify that

$$\mathbf{g} = \nabla \Delta_U^{-1} (u^* - \partial_t u)$$

is a suitable candidate, by the assumption of  $u^* - \partial_t u \in L^2(I; H^{-1}(U))$ .

The goal of this appendix is to prove the following proposition.

**Proposition 2.34.** *For each  $(w, w^*) \in Z(I \times U)$ , the mapping*

$$\begin{cases} w + H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \mathcal{J}[u, w^*] \end{cases} \quad (2.7.9)$$

*is uniformly convex. Moreover, its minimum is zero, and the associated minimizer is the unique  $u \in w + H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  solution of (2.7.1), in the sense that*

$$\forall \phi \in L^2(I; H_0^1(U)), \quad \int_{I \times U} \nabla \phi \cdot \mathbf{a}(\nabla u, \cdot) = \int_{I \times U} \phi (w^* - \partial_t u).$$

**Remark 2.35.** By the inclusion

$$H_{\text{par}}^1(I \times U) \times L^2(I; H^{-1}(U)) \subseteq Z(I \times U), \quad (2.7.10)$$

Proposition 2.34 ensures in particular the solvability of the parabolic equation (2.7.1) for every right-hand side  $w^* \in L^2(I; H^{-1}(U))$  and every boundary condition  $w \in H_{\text{par}}^1(I \times U)$ ; the solution thus obtained then belongs to  $H_{\text{par}}^1(I \times U)$ .

More generally, for every  $w^*$  of the form

$$w^* = \partial_t f + v, \quad f \in L^2(I; H_0^1(U)), \quad v \in L^2(I; H^{-1}(U)), \quad (2.7.11)$$

we have that  $(f, w^*) \in Z(I \times U)$  and hence Proposition 2.34 yields the existence of a unique solution  $u \in f + H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  of (2.7.1) which satisfies the estimate

$$\|u - f\|_{H_{\text{par}}^1(I \times U)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(I; H^1(U))} + \|w^* - \partial_t f\|_{L^2(I; H^{-1}(U))} \right). \quad (2.7.12)$$

In other words, we have identified a mapping

$$\partial_t f + v \mapsto f + P(f, v), \quad (2.7.13)$$

where  $f \in L^2(I; H_0^1(U))$ ,  $v \in L^2(I; H^{-1}(U))$ , and  $P$  is a bounded linear operator from  $L^2(I; H_0^1(U)) \times L^2(I; H^{-1}(U))$  to  $H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$ . If we moreover restrict our attention, say, to the set of functions  $f$  which vanish in a neighborhood of  $\{0\} \times U$ , then this mapping provides with a notion of solution of (2.7.1) with null Dirichlet boundary condition on the parabolic boundary of  $I \times U$ . This additional regularity assumption on the behavior of  $f$  near the initial time can of course be weakened as desired.

Note that every  $w^*$  of the form (2.7.11) belongs to  $\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)$ , but the latter space is strictly larger than the set of such  $w^*$ . This may at first glance appear at odds with Lemma 2.20, however that lemma required that  $u^*$  belong to  $L^2(I \times U)$ . This hypothesis rules out certain singular distributions which belong to  $\widehat{H}_{\text{par}}^{-1}(I \times U)$  but cannot be written in the form (2.7.11).

**Remark 2.36.** One may wonder if, in analogy with the elliptic setting, one can identify a reflexive subspace  $E$  of the space of distributions such that the standard heat operator  $(\partial_t - \Delta)$  maps  $E$  to its dual  $E^*$  surjectively. This is however not possible, as we now explain briefly. Observe first that by Proposition 2.34, the heat operator is a bijective mapping from  $H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  to  $L^2(I; H^{-1}(U))$ , and that  $L^2(I; H^{-1}(U))$  is strictly smaller than the dual of  $H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$ . Indeed, the dual of  $H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  contains all elements of the form  $\partial_t v$ , for  $v \in L^2(I; H_0^1(U))$ . Hence, the space  $E$  should be strictly between the spaces  $H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  and  $L^2(I; H_0^1(U))$ . Using the decomposition of the solution operator in (2.7.13), one can then verify that such a space  $E$  does not exist.

Before turning to the proof of Proposition 2.34, we first recall the following continuity result for elements of a space intermediate between  $H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  and  $H_{\text{par}}^1(I \times U)$  where the null boundary condition is only imposed in the space direction. We refer to [40, Section III.1.4] for a proof.

**Lemma 2.37.** *Let  $u \in L^2(I; H_0^1(U))$  be such that  $\partial_t u \in L^2(I; H^{-1}(U))$ . There exists  $\tilde{u} \in C(\bar{I}; L^2(U))$  such that, for almost every  $t \in I$ , we have  $u(t, \cdot) = \tilde{u}(t, \cdot)$ .*

From now on, whenever a function  $u$  satisfies the conditions of Lemma 2.37, we identify it with its continuous representative.

**Proof** (Proof of Proposition 2.34). We decompose the proof into four steps.

*Step 1.* We show that the mapping in (2.7.9) is uniformly convex. We will in fact prove the stronger statement that the mapping

$$(u, \mathbf{g}) \mapsto \int_{I \times U} (A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot) - \nabla u \cdot \mathbf{g}), \quad (2.7.14)$$

defined over all pairs  $(u, \mathbf{g})$  in the set

$$\{(u, \mathbf{g}) \in (w + H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)) \times L^2(I \times U; \mathbb{R}^d) \quad \text{and} \quad -\nabla \cdot \mathbf{g} = w^* - \partial_t u\}, \quad (2.7.15)$$



is uniformly convex. We first show that the mapping

$$(u, \mathbf{g}) \mapsto - \int_{I \times U} \nabla u \cdot \mathbf{g}$$

is convex over the set defined in (2.7.15). By (2.7.8) (with  $u^*$  replaced by  $w^*$ ), we have

$$\begin{aligned} - \int_{I \times U} \nabla u \cdot \mathbf{g} &= - \int_{I \times U} \nabla w \cdot \mathbf{g} + \int_{I \times U} (w - u)(w^* - \partial_t u) \\ &= - \int_{I \times U} \nabla w \cdot \mathbf{g} + \int_{I \times U} (w - u)(w^* - \partial_t w) + \frac{1}{2} \|(u - w)(T, \cdot)\|_{L^2(U)}^2. \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

This expression is clearly convex in the pair  $(u, \mathbf{g})$ . We now complete this step by showing that the mapping

$$(u, \mathbf{g}) \mapsto \int_{I \times U} A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot)$$

is uniformly convex over the set defined in (2.7.15). By (2.7.3), for every  $(u, \mathbf{g})$  in the set defined in (2.7.15) and

$$(v, \mathbf{h}) \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U) \times L^2(I \times U; \mathbb{R}^d) \quad \text{s.t.} \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = \partial_t v, \quad (2.7.17)$$

we have

$$\frac{1}{2} A(\nabla(u + v), \mathbf{g} + \mathbf{h}, \cdot) + \frac{1}{2} A(\nabla(u - v), \mathbf{g} - \mathbf{h}, \cdot) - A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot) \geq \frac{1}{2\Lambda} (|\nabla v|^2 + |\mathbf{h}|^2).$$

Moreover, by (2.7.17),

$$\begin{aligned} \|\partial_t v\|_{L^2(I; H^{-1}(U))} &= \sup \left\{ \int_{I \times U} \phi \partial_t v : \phi \in L^2(I; H_0^1(U)), \|\nabla \phi\|_{L^2(I \times U)} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{I \times U} \nabla \phi \cdot \mathbf{h} : \phi \in L^2(I; H_0^1(U)), \|\nabla \phi\|_{L^2(I \times U)} \leq 1 \right\} \\ &\leq \|\mathbf{h}\|_{L^2(I \times U)}. \end{aligned}$$

We have thus shown that

$$\begin{aligned} \int_{I \times U} \left( \frac{1}{2} A(\nabla(u + v), \mathbf{g} + \mathbf{h}, \cdot) + \frac{1}{2} A(\nabla(u - v), \mathbf{g} - \mathbf{h}, \cdot) - A(\nabla u, \mathbf{g}, \cdot) \right) \\ \geq \frac{1}{4\Lambda} \left( \|\nabla v\|_{L^2(I \times U)}^2 + \|\partial_t v\|_{L^2(I; H^{-1}(U))}^2 + \|\mathbf{h}\|_{L^2(I \times U)}^2 \right), \end{aligned}$$

so the proof of uniform convexity is complete.

*Step 2.* By the result of the previous step, there exists a unique pair  $(u_0, \mathbf{g}_0)$  in the set defined by (2.7.15) which minimizes the functional in (2.7.14). In order to complete the proof, it suffices to show that

$$\int_{I \times U} (A(\nabla u_0, \mathbf{g}_0, \cdot) - \nabla u_0 \cdot \mathbf{g}_0) = 0. \quad (2.7.18)$$

Indeed, by (2.7.5), the identity (2.7.18) implies that

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{a}(\nabla u_0, \cdot) \quad \text{a.e. in } I \times U,$$

and moreover, by (2.7.15),

$$\nabla \cdot \mathbf{g}_0 = w^* - \partial_t u_0,$$

so that  $u_0$  indeed solves

$$\partial_t u_0 - \nabla \cdot (\mathbf{a}(\nabla u_0, \cdot)) = w^*$$

in the weak sense. Our goal is therefore to show (2.7.18). The fact that the left side of (2.7.18) is non-negative is immediate from (2.7.5). There remains to show that this quantity is non-positive, that is,

$$\inf_{u \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)} \mathcal{J}[w + u, w^*] \leq 0. \quad (2.7.19)$$

In order to do so, we consider the perturbed convex minimization problem defined for every  $u^* \in L^2(I; H^{-1}(U))$  by

$$G(u^*) := \inf_{u \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)} \left( \mathcal{J}[w + u, w^* + u^*] + \int_{I \times U} u u^* \right).$$

Note that (2.7.19) is equivalent to the statement that  $G(0) \leq 0$ . By the computation in (2.7.16), for every  $u^* \in L^2(I; H^{-1}(U))$  and

$$(u, \mathbf{g}) \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U) \times L^2(I \times U; \mathbb{R}^d) \quad \text{s.t.} \quad -\nabla \cdot \mathbf{g} = w^* + u^* - \partial_t(w + u), \quad (2.7.20)$$

we have

$$\begin{aligned} & \int_{I \times U} (A(\nabla(w + u), \mathbf{g}, \cdot) - \nabla(w + u) \cdot \mathbf{g}) + \int_{I \times U} u u^* \\ &= \int_{I \times U} (A(\nabla(w + u), \mathbf{g}, \cdot) - \nabla w \cdot \mathbf{g} - u(w^* - \partial_t w)) + \frac{1}{2} \|u(T, \cdot)\|_{L^2(U)}^2, \end{aligned} \quad (2.7.21)$$

and hence the function  $G$  is convex over  $L^2(I; H^{-1}(U))$ . Moreover, one can check that it is also locally bounded above, which implies that  $G$  is lower semi-continuous, by convexity (see e.g. [18, Lemma I.2.1 and Corollary I.2.2]). Denoting by  $G^*$  the convex dual of  $G$ , defined for every  $v \in L^2(I; H_0^1(U))$  by

$$G^*(v) := \sup_{u^* \in L^2(I; H^{-1}(U))} \left( -G(u^*) + \int_{I \times U} v u^* \right),$$

and by  $G^{**}$  its bidual, we deduce that  $G = G^{**}$  (see [18, Proposition I.4.1]), and in particular,

$$G(0) = G^{**}(0) = \sup_{v \in L^2(I; H_0^1(U))} (-G^*(v)).$$

The statement (2.7.19) is therefore equivalent to

$$\forall v \in L^2(I; H_0^1(U)), \quad G^*(v) \geq 0. \quad (2.7.22)$$

The proof of this fact occupies the next two steps.

*Step 3.* For each  $v \in L^2(I; H_0^1(U))$ , we have  $G^*(v) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . In this step, we show that

$$G^*(v) < +\infty \quad \implies \quad \partial_t v \in L^2(I; H^{-1}(U)). \quad (2.7.23)$$

We note that

$$G^*(v) = \sup \left\{ \int_{I \times U} ((v - u) u^* - A(\nabla(w + u), \mathbf{g}, \cdot) + \nabla(w + u) \cdot \mathbf{g}) : \right. \\ \left. u^* \in L^2(I; H^{-1}(U)), (u, \mathbf{g}) \text{ satisfy (2.7.20)} \right\}. \quad (2.7.24)$$

Specifying to  $u^* = \partial_t u$  and to a fixed  $\mathbf{g} \in L^2(I \times U; \mathbb{R}^d)$  satisfying  $-\nabla \cdot \mathbf{g} = w^* - \partial_t w$  (which can be constructed as the gradient of the solution of a Dirichlet problem) yields the lower bound

$$G^*(v) \geq \sup \left\{ \int_{I \times U} (v \partial_t u - A(\nabla(w+u), \mathbf{g}, \cdot) + \nabla(w+u) \cdot \mathbf{g}) - \frac{1}{2} \|u(T, \cdot)\|_{L^2(U)}^2 : \right. \\ \left. u \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U) \right\}.$$

The assumption of  $G^*(v) < \infty$  thus implies that

$$\sup \left\{ \int_{I \times U} v \partial_t u : u \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U), \|\nabla u\|_{L^2(I \times U)} \leq 1, \|u(T, \cdot)\|_{L^2(U)} \leq 1 \right\} < \infty.$$

Denoting the supremum above by  $C < \infty$ , we infer that for every smooth test function  $u$  with compact support in  $I \times U$ ,

$$\left| \int_{I \times U} u \partial_t v \right| \leq C \|\nabla u\|_{L^2(I \times U)}.$$

By density, we deduce that  $\partial_t v$  can be identified with an element of the dual of  $L^2(I; H_0^1(U))$ . Since this dual space is  $L^2(I; H^{-1}(U))$ , the proof of (2.7.23) is complete.

*Step 4.* In this step, we show that

$$v \in L^2(I; H_0^1(U)) \quad \text{and} \quad \partial_t v \in L^2(I; H^{-1}(U)) \quad \implies \quad G^*(v) \geq 0. \quad (2.7.25)$$

Together with (2.7.23), this would complete the proof of (2.7.22) and therefore of the proposition.

The fact that  $G^*(v) \geq 0$  would follow immediately from (2.7.24) if we could choose  $u = v$  and then ensure the equality of the last two terms under the integral. The difficulty we face is that the function  $u$  is allowed to range in  $H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$ , while the function  $v$  does not belong to this space in general, due to the boundary condition at the initial time. We therefore wish to argue that this constraint on  $u$  can be relaxed.

Replacing  $u^*$  by  $u^* + \partial_t u$  in the supremum in (2.7.24), we can rewrite  $G^*(v)$  as

$$G^*(v) = \sup \left\{ \int_{I \times U} ((v-u)(u^* + \partial_t u) - A(\nabla(w+u), \mathbf{g}, \cdot) + \nabla(w+u) \cdot \mathbf{g}) \right\}, \quad (2.7.26)$$

where the supremum is taken over every  $u^* \in L^2(I; H^{-1}(U))$ ,  $u \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)$  and  $\mathbf{g} \in L^2(I \times U; \mathbb{R}^d)$  satisfying

$$-\nabla \cdot \mathbf{g} = w^* + u^* - \partial_t w. \quad (2.7.27)$$

Integrating by parts, we can rewrite the term involving  $\partial_t u$  on the right side of (2.7.26) as

$$\int_{I \times U} (v-u) \partial_t u = - \int_{I \times U} u \partial_t v + \int_U u(T, \cdot) v(T, \cdot) - \frac{1}{2} \|u(T, \cdot)\|_{L^2(U)}^2.$$

The functional under the supremum in (2.7.26) can thus be decomposed into the sum of

$$I_1(u, u^*, \mathbf{g}) := \int_{I \times U} ((v-u)u^* - u \partial_t v - A(\nabla(w+u), \mathbf{g}, \cdot) + \nabla(w+u) \cdot \mathbf{g}) \quad (2.7.28)$$

and

$$I_2(u(T, \cdot)) := \int_U u(T, \cdot) v(T, \cdot) - \frac{1}{2} \|u(T, \cdot)\|_{L^2(U)}^2. \quad (2.7.29)$$

Moreover, for each given  $u^* \in L^2(I; H^{-1}(U))$  and  $\mathbf{g} \in L^2(I \times U; \mathbb{R}^d)$ , the mapping  $u \mapsto I_1(u, u^*, \mathbf{g})$  is continuous for the topology of  $L^2(I; H^1(U))$ . For any given  $b \in H_0^1(U)$ , and  $\tilde{u} \in L^2(I; H_0^1(U))$ , one can find elements of the space

$$\{u \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U) : u(T, \cdot) = b\}$$

which approximate  $\tilde{u}$  with arbitrary precision, for the topology of  $L^2(I; H^1(U))$ . Hence, for each given  $u^* \in L^2(I; H^{-1}(U))$  and  $\mathbf{g} \in L^2(I \times U; \mathbb{R}^d)$ , we have

$$\begin{aligned} & \sup \{I_1(u, u^*, \mathbf{g}) + I_2(u(T, \cdot)) : u \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)\} \\ & \geq \sup \{I_1(u, u^*, \mathbf{g}) + I_2(b) : u \in L^2(I; H_0^1(U)) \text{ and } b \in H_0^1(U)\}. \end{aligned}$$

Moreover, the mapping  $b \mapsto I_2(b)$  is continuous for the topology of  $L^2(U)$ , and thus we have in fact

$$\begin{aligned} & \sup \{I_1(u, u^*, \mathbf{g}) + I_2(u(T, \cdot)) : u \in H_{\text{par}, \sqcup}^1(I \times U)\} \\ & = \sup \{I_1(u, u^*, \mathbf{g}) + I_2(b) : u \in L^2(I; H_0^1(U)) \text{ and } b \in L^2(U)\}. \end{aligned}$$

Selecting  $u = v$  and  $b = v(T, \cdot)$ , we have thus shown that

$$G^*(v) \geq \sup \left\{ \frac{1}{2} \|v(T, \cdot)\|_{L^2(U)}^2 + \int_{I \times U} (-v \partial_t v - A(\nabla(w+v), \mathbf{g}, \cdot) + \nabla(w+v) \cdot \mathbf{g}) \right\},$$

where the supremum is taken over every  $u^* \in L^2(I; H^{-1}(U))$  and  $\mathbf{g} \in L^2(I \times U; \mathbb{R}^d)$  satisfying (2.7.27). Note that

$$\frac{1}{2} \|v(T, \cdot)\|_{L^2(U)}^2 - \int_{I \times U} v \partial_t v = \frac{1}{2} \|v(0, \cdot)\|_{L^2(U)}^2 \geq 0.$$

Selecting  $u^*$  such that

$$-\nabla \cdot (\mathbf{a}(\nabla(w+v), \cdot)) = w^* + u^* - \partial_t w,$$

and then

$$\mathbf{g} = \mathbf{a}(\nabla(w+v), \cdot)$$

ensures that the constraint (2.7.27) is satisfied, and by (2.7.6), that

$$\int_{I \times U} (A(\nabla(w+v), \mathbf{g}, \cdot) - \nabla(w+v) \cdot \mathbf{g}) = 0.$$

The proof of (2.7.25) is therefore complete.  $\square$

## 2.8 Appendix B : Meyers-type estimates

In this appendix, we present local and global versions of the Meyers improvement of integrability estimate for gradients of solutions of linear, uniformly parabolic equations with measurable coefficients.

The interior Meyers estimate in the parabolic case was first proved in [26]. We follow their argument to obtain Proposition 2.38, below, which is included for completeness and since the same ideas are needed to prove the global version in Proposition 2.39. The statement of the latter will certainly not come as a surprise to experts, but we do not believe it has appeared before.

Global versions of the Meyers estimate in the parabolic setting have been previously considered in [37], but the statement of Proposition 2.39 is stronger than the results of [37] since we do not require any additional regularity of the boundary condition in time—a modest technical improvement, but it gives a more natural statement and one which is useful for the application in this chapter.

In what follows, we use the same notation for parabolic cylinders as in Section 2.6, see (2.1.7). That is, for  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , we denote

$$\tilde{I}_r := (-r^2, 0], \quad Q_r(t, x) := (t, x) + \tilde{I}_r \times B_r, \quad \text{and} \quad Q_r := Q_r(0, 0).$$

We fix a coefficient field  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t, x)$  satisfying (2.1.2) for every  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , and consider the linear parabolic equation

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{a}(t, x) \nabla u) = u^*. \quad (2.8.1)$$

We remark that the argument we present only makes mild use of linearity and can be adapted to give similar estimates for solutions of nonlinear parabolic equations like the ones considered in Appendix 2.7.

We first present the interior Meyers estimate. Recall that the space  $W_{\text{par}}^{1,p}$  is defined in (2.1.13) and (2.1.14).

**Proposition 2.38** (Interior Meyers estimate [26, Theorem 2.1]). *Fix  $r > 0$ ,  $p \geq 2$  and suppose that  $u \in H_{\text{par}}^1(Q_{2r})$  and  $u^* \in L^p(I_{2r}; W^{-1,p}(B_{2r}))$  satisfy equation (2.8.1) in  $Q_{2r}$ . There exist an exponent  $\delta(d, \Lambda) > 0$  and a constant  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that  $u \in W_{\text{par}}^{1,p \wedge (2+\delta)}(Q_r)$  and we have the estimate*

$$\|\nabla u\|_{\underline{L}^{p \wedge (2+\delta)}(Q_r)} \leq C \left( \|\nabla u\|_{\underline{L}^2(Q_{2r})} + \|u^*\|_{\underline{L}^{p \wedge (2+\delta)}(I_{2r}; \underline{W}^{-1,p \wedge (2+\delta)}(B_{2r}))} \right). \quad (2.8.2)$$

We next give a global statement of the Meyers estimate with respect to a Cauchy-Dirichlet initial-boundary condition.

**Proposition 2.39** (Global Meyers estimate). *Fix  $p \geq 2$ . Let  $U \in \mathbb{R}^d$  be a bounded Lipschitz domain,  $I \subseteq \mathbb{R}$  a bounded interval and set  $V := I \times U$ . Fix  $f \in W_{\text{par}}^{1,p}(V)$ ,  $u^* \in L^p(I; W^{-1,p}(V))$  and suppose that*

$$u \in f + H_{\text{par}, \sqcup}^1(V)$$

*is the unique solution of the Cauchy-Dirichlet problem*

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla u) = u^* & \text{in } V, \\ u = f & \text{on } \partial_{\sqcup} V. \end{cases}$$

*There exist  $\delta(V, d, \Lambda) > 0$  and a constant  $C(V, d, \Lambda) < \infty$  such that  $u \in W_{\text{par}}^{1,p \wedge (2+\delta)}(V)$  and we have the estimate*

$$\|u\|_{W_{\text{par}}^{1,p \wedge (2+\delta)}(V)} \leq C \left( \|f\|_{W_{\text{par}}^{1,p \wedge (2+\delta)}(V)} + \|u^*\|_{L^{p \wedge (2+\delta)}(I; W^{-1,p \wedge (2+\delta)}(V))} \right). \quad (2.8.3)$$

The Meyers estimates are consequences of the Caccioppoli inequality, the most basic regularity estimate for divergence-form equations.

**Lemma 2.40** (parabolic Caccioppoli inequality). *Suppose that  $u \in H_{\text{par}}^1(Q_{2r})$  and  $u^* \in L^2(I_{2r}; H^{-1}(B_{2r}))$  satisfy*

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla u) = u^* \quad \text{in } Q_{2r}.$$

*Then there exists  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that*

$$\|\nabla u\|_{L^2(Q_r)} \leq Cr^{-1} \|u\|_{L^2(Q_{2r})} + C \|u^*\|_{L^2(I_{2r}; H^{-1}(B_{2r}))} \quad (2.8.4)$$

and

$$\sup_{s \in I_r} \|u(s, \cdot)\|_{L^2(B_r)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(Q_{2r})} + C \|u^*\|_{L^2(I_{2r}; H^{-1}(B_{2r}))}. \quad (2.8.5)$$

**Proof.** We take  $\eta_r \in C_c^\infty(Q_{2r})$  to be a test function satisfying

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta \equiv 1 \text{ on } Q_r, \quad |\partial_t \eta| + |\nabla \eta|^2 \leq Cr^{-2}.$$

We test the weak formulation

$$\forall \phi \in L^2(I_{2r}; H_0^1(B_{2r})), \quad \int_{Q_{2r}} \phi (u^* - \partial_t u) = \int_{Q_{2r}} \nabla \phi \cdot \mathbf{a} \nabla u$$

with the function  $\phi := \eta_r^2 u \in L^2(I_{2r}; H_0^1(B_{2r}))$ . We estimate the right side from below by

$$\begin{aligned} \int_{Q_{2r}} \nabla \phi \cdot \mathbf{a} \nabla u &\geq \frac{1}{\Lambda} \int_{Q_{2r}} \eta_r^2 |\nabla u|^2 - C \int_{Q_{2r}} \eta_r |\nabla \eta_r| |u| |\nabla u| \\ &\geq \frac{1}{2\Lambda} \int_{Q_{2r}} \eta_r^2 |\nabla u|^2 - C \int_{Q_{2r}} |\nabla \eta_r|^2 |u|^2 \\ &\geq \frac{1}{2\Lambda} \int_{Q_{2r}} \eta_r^2 |\nabla u|^2 - Cr^{-2} \int_{Q_{2r}} |u|^2 \end{aligned}$$

and the left side from above by

$$\begin{aligned} \int_{Q_{2r}} \eta_r^2 u (u^* - \partial_t u) &\leq - \int_{Q_{2r}} \partial_t \left( \frac{1}{2} \eta_r^2 u^2 \right) + \int_{Q_{2r}} \eta_r |\partial_t \eta_r| u^2 \\ &\quad + \int_{-4r^2}^0 \|(\eta_r^2 u)(t, \cdot)\|_{H^1(B_{2r})} \|u^*(t, \cdot)\|_{H^{-1}(B_{2r})} dt \\ &\leq -\frac{1}{2} \int_{B_{2r}} \eta_r^2(0, x) u^2(0, x) dx + Cr^{-2} \int_{Q_{2r}} u^2 \\ &\quad + C \|\eta_r^2 u\|_{L^2(I_{2r}; H^1(B_{2r}))} \|u^*\|_{L^2(I_{2r}; H^{-1}(B_{2r}))}. \end{aligned}$$

Using that

$$\|\eta_r^2 u\|_{L^2(I_{2r}; H^1(B_{2r}))} \leq Cr^{-1} \|u\|_{L^2(I_{2r} \times B_{2r})} + C \|\eta_r \nabla u\|_{L^2(I_{2r} \times B_{2r})},$$

we get

$$\begin{aligned} C \|\eta_r^2 u\|_{L^2(I_{2r}; H^1(B_{2r}))} \|u^*\|_{L^2(I_{2r}; H^{-1}(B_{2r}))} \\ \leq r^{-2} \|u\|_{L^2(I_{2r} \times B_{2r})}^2 + \frac{1}{4\Lambda} \|\eta_r \nabla u\|_{L^2(I_{2r} \times B_{2r})}^2 + C \|u^*\|_{L^2(I_{2r}; H^{-1}(B_{2r}))}^2. \end{aligned}$$

Combining the above, we get that

$$\frac{1}{2} \int_{B_{2r}} \eta_r^2(0, x) u^2(0, x) dx + \frac{1}{4\Lambda} \int_{Q_{2r}} \eta_r^2 |\nabla u|^2 \leq Cr^{-2} \int_{Q_{2r}} |u|^2 + C \|u^*\|_{L^2(I_{2r}; H^{-1}(B_{2r}))}^2.$$

This yields (2.8.4).

By repeating the above computation, using instead the test function  $\phi := \eta_r^2 u \mathbf{1}_{\{t < s\}}$  for fixed  $s \in I_{2r}$ , and estimating the right side of the weak formulation from below differently, namely

$$\begin{aligned} \int_{Q_{2r}} \nabla \phi \cdot \mathbf{a} \nabla u &\geq -C \|\eta_r \nabla u\|_{L^2(Q_{2r})}^2 - C \|\nabla \eta_r \nabla u\|_{L^2(Q_{2r})} \|u \eta_r\|_{L^2(Q_{2r})} \\ &\geq -C \|\nabla u\|_{L^2(Q_{2r})}^2 - \frac{1}{16} r^{-2} \int_{Q_{2r}} \eta_r^2 u^2 \\ &\geq -C \|\nabla u\|_{L^2(Q_{2r})}^2 - \frac{1}{4} \sup_{t \in I_{2r}} \int_{B_{2r}} \eta_r^2(t, x) u^2(t, x) dx, \end{aligned}$$

we get the bound

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{B_{2r}} \eta_r^2(s, x) u^2(s, x) dx \\ \leq C \|\nabla u\|_{L^2(Q_{2r})}^2 + \frac{1}{4} \sup_{t \in I_{2r}} \int_{B_{2r}} \eta_r^2(t, x) u^2(t, x) dx + C \|u^*\|_{L^2(I_{2r}; H^{-1}(B_{2r}))}^2. \end{aligned}$$

Taking the supremum over  $s \in I_{2r}$  and rearranging, we get (2.8.5).  $\square$

In the following statement, what is important is that  $q < 2$ . It is convenient to use the Sobolev exponent  $q := 2_*$ , although the choice  $q = 1$  in  $d = 2$  causes technical problems so in that case we just take  $q \in (\frac{5}{4}, \frac{7}{4})$ .

**Lemma 2.41** (Reverse Hölder inequality). *Suppose that  $u \in H_{\text{par}}^1(Q_{4r})$  and  $u^* \in L^2(I_{4r}; H^{-1}(B_{4r}))$  satisfy*

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{a}(x) \nabla u) = u^* \quad \text{in } Q_{4r}.$$

*Denote  $q := 2_* = 2d/(2+d)$  if  $d > 2$  or let  $q$  be any element of  $(\frac{5}{4}, \frac{7}{4})$  if  $d = 2$ . Then there exists  $C(d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $\alpha > 0$ ,*

$$\|\nabla u\|_{\underline{L}^2(Q_r)}^2 \leq \frac{C}{\alpha} \|\nabla u\|_{\underline{L}^q(Q_{4r})}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{\underline{L}^2(Q_{4r})}^2 + C \|u^*\|_{\underline{L}^2(I_{4r}; \underline{H}^{-1}(B_{4r}))}^2, \quad (2.8.6)$$

**Proof.** By subtracting a constant, we may suppose that  $(u)_{Q_{2r}} = 0$ . Let  $\xi \in C_c^\infty(B_r)$  with  $\int_{B_r} \xi = 1$  and  $|\nabla \xi| \leq Cr^{-1}$ . Denote

$$v(t, x) := u(t, x) - w(t), \quad w(t) := \int_{B_r} \xi(y) u(t, y) dy.$$

Then  $v$  satisfies

$$\partial_t v - \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla v) = u^* - \partial_t w.$$

Applying (2.8.5) to  $v$ , we find that

$$\begin{aligned} \int_{Q_{2r}} |v|^2 &\leq \left( \sup_{s \in I_{2r}} \int_{B_{2r}} |v(s, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \int_{I_{2r}} \left( \int_{B_{2r}} |v(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq C \left( \|\nabla u\|_{L^2(Q_{4r})} + \|u^* - \partial_t w\|_{L^2(I_{4r}; H^{-1}(B_{4r}))} \right) \int_{I_{2r}} \left( \int_{B_{2r}} |v(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Denote by  $q'$  the Hölder conjugate exponent to  $q$  and notice that  $q' = 2^*$  in  $d > 2$  and  $q' < \infty$  in  $d = 2$ . Using the Hölder and Sobolev inequalities, we find that

$$\begin{aligned} & \int_{I_{2r}} \left( \int_{B_{2r}} |v(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ & \leq \int_{I_{2r}} \left( \int_{B_{2r}} |v(t, x)|^q dx \right)^{\frac{1}{2q}} \left( \int_{B_{2r}} |v(t, x)|^{q'} dx \right)^{\frac{1}{2q'}} dt \\ & \leq Cr^{1+d(\frac{1}{4}-\frac{1}{2q})} \int_{I_{2r}} \left( \int_{B_{2r}} |\nabla v(t, x)|^q dx \right)^{\frac{1}{2q}} \left( \int_{B_{2r}} |\nabla v(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} dt \\ & \leq Cr^{1+d(\frac{1}{4}-\frac{1}{2q})} \|\nabla v\|_{L^q(Q_{2r})}^{\frac{1}{2}} \left( \int_{I_{2r}} \left( \int_{B_{2r}} |\nabla v(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{(2q)'}{4}} dt \right)^{\frac{1}{(2q)'}}. \end{aligned}$$

As  $(2q)'/4 \leq \frac{1}{2} < 1$ , we can use Hölder's inequality in time and then (2.8.4) and Lemma 2.10 to get

$$\begin{aligned} & \left( \int_{I_{2r}} \left( \int_{B_{2r}} |\nabla v(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{(2q)'}{4}} dt \right)^{\frac{2}{(2q)'}} \\ & \leq Cr^{\frac{2}{(2q)'}-\frac{1}{2}} \left( \int_{I_{2r}} \int_{B_{2r}} |\nabla v(t, x)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq Cr^{\frac{2}{(2q)'}-\frac{1}{2}} \left( \|\nabla u\|_{L^2(Q_{4r})} + \|u^* - \partial_t w\|_{L^2(I_{4r}; H^{-1}(B_{4r}))} \right). \end{aligned}$$

Let  $\kappa := d\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2q}\right) + \frac{1}{(2q)'} + \frac{3}{4}$ . Combining the above, we get

$$\|v\|_{L^2(Q_{2r})}^2 \leq Cr^\kappa \|\nabla v\|_{L^q(Q_{2r})}^{\frac{1}{2}} \left( \|\nabla u\|_{L^2(Q_{4r})} + \|u^* - \partial_t w\|_{L^2(I_{4r}; H^{-1}(B_{4r}))} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Combining (2.8.4) and the previous inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(Q_r)}^2 & \leq Cr^{\kappa-2} \|\nabla v\|_{L^q(Q_{2r})}^{\frac{1}{2}} \left( \|\nabla v\|_{L^2(Q_{4r})} + \|u^* - \partial_t w\|_{L^2(I_{4r}; H^{-1}(B_{4r}))} \right)^{\frac{3}{2}} \\ & \quad + C \|u^* - \partial_t w\|_{L^2(I_{4r}; H^{-1}(B_{4r}))}^2. \end{aligned}$$

Normalizing the norms, we find that this is the same as

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{\underline{L}^2(Q_r)}^2 & \leq \|\nabla v\|_{\underline{L}^q(Q_{2r})}^{\frac{1}{2}} \left( \|\nabla v\|_{\underline{L}^2(Q_{4r})} + \|u^* - \partial_t w\|_{\underline{L}^2(I_{4r}; \underline{H}^{-1}(B_{4r}))} \right)^{\frac{3}{2}} \\ & \quad + C \|u^* - \partial_t w\|_{\underline{L}^2(I_{4r}; \underline{H}^{-1}(B_{4r}))}^2. \end{aligned}$$

Applying Young's inequality, we obtain, for every  $\alpha > 0$ ,

$$\|\nabla v\|_{\underline{L}^2(Q_r)}^2 \leq \frac{C}{\alpha} \|\nabla v\|_{\underline{L}^q(Q_{4r})}^2 + \alpha \|\nabla v\|_{\underline{L}^2(Q_{4r})}^2 + C \|u^* - \partial_t w\|_{\underline{L}^2(I_{4r}; \underline{H}^{-1}(B_{4r}))}^2. \quad (2.8.7)$$

It is not difficult to show, by using the equation and the definition of  $w$ , that

$$\|\partial_t w\|_{\underline{L}^2(I_{4r}; \underline{H}^{-1}(B_{4r}))} \leq C \left( \|\nabla u\|_{\underline{L}^1(Q_{4r})} + \|u^*\|_{\underline{L}^2(I_{4r}; \underline{H}^{-1}(B_{4r}))} \right).$$



Combining the previous two displays yields

$$\|\nabla v\|_{\underline{L}^2(Q_r)}^2 \leq \frac{C}{\alpha} \|\nabla v\|_{\underline{L}^q(Q_{4r})}^2 + \alpha \|\nabla v\|_{\underline{L}^2(Q_{4r})}^2 + C \|u^*\|_{\underline{L}^2(I_{4r}; \underline{H}^{-1}(B_{4r}))}^2.$$

Since  $\nabla v = \nabla u$ , this completes the argument.  $\square$

To complete the proof of the interior Meyers estimate, we need the following version of Gehring's lemma for parabolic cylinders which states that a reverse Hölder inequality implies an improvement of integrability. This result is standard and so we do not give the proof here. See for instance [25, Proposition 5.1], where the statement is given in cubes rather than parabolic cylinders (which makes no difference in its proof).

**Lemma 2.42** (Gehring-type lemma). *Assume that  $R > 0$ ,  $q > 1$ ,  $F \in L^1(Q_{4R})$ ,  $G \in L^q(Q_{4R})$ ,  $m \in (0, 1)$  and  $A \in [1, \infty)$ . Suppose that, for every  $(t, x) \in Q_R$  and  $r \in (0, \frac{1}{2}R]$ ,*

$$\|F\|_{L^1(Q_r(t,x))} \leq A \left( \|F^m\|_{\underline{L}^1(Q_{4r}(t,x))}^{\frac{1}{m}} + \|G\|_{L^1(Q_{4r}(t,x))} \right) + \varepsilon \|F\|_{L^1(Q_{4r}(t,x))}.$$

*Then there exists  $\varepsilon_0(d, m) \in (0, \frac{1}{2}]$  such that  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  implies the existence of an exponent  $\delta(\varepsilon, A, m, q, d) \in (0, \frac{1}{2}]$  and  $C(\varepsilon, A, m, d) < \infty$  such that  $F \in L^{1+\delta}(Q_R)$  and*

$$\|F\|_{L^{1+\delta}(Q_R)} \leq C \left( \|F\|_{L^1(Q_{4R})} + \|G\|_{L^{1+\delta}(Q_{4R})} \right).$$

The statement of Proposition 2.38 can now be obtained as a consequence of Lemmas 2.41 and 2.42 and a routine covering argument. Indeed, any element of  $W^{-1,p}(U)$  can be represented as the divergence of an element of  $L^p(U; \mathbb{R}^d)$  by the Riesz representation theorem (see [1, Theorem 3.9]). This allows us to obtain the estimate (2.8.2). The statement that  $\partial_t u$  belongs to  $L^{p \wedge (2+\delta)}(I_r; W^{-1,p \wedge (2+\delta)}(B_r))$ , with an appropriate estimate, follows from (2.8.2) and the equation (2.8.1).

We next give a sketch of the proof of Proposition 2.39, which requires us to first revisit the proof of the Caccioppoli inequality to obtain a global version.

**Lemma 2.43** (global Caccioppoli inequality). *Let  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  be a bounded Lipschitz domain and denote  $V := I_2 \times U$ . Suppose that  $f \in H_{\text{par}}^1(V)$ ,  $u \in f + H_{\text{par}, \square}^1(V)$  and  $u^* \in L^2(I_2; H^{-1}(U))$  satisfy*

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{a}(x) \nabla u) = u^* \quad \text{in } V.$$

*Then there exists  $C(V, d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $r \in (0, 1)$  and  $(t, x) \in I_1 \times U$ ,*

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - f)\|_{L^2(Q_r(t,x) \cap V)} &\leq Cr^{-1} \|u - f\|_{L^2(Q_{2r}(t,x) \cap V)} \\ &\quad + C \|\nabla f\|_{L^2(Q_{2r}(t,x) \cap V)} + C \|u^*\|_{L^2((t+I_{2r}) \cap I_2; H^{-1}(B_{2r}(x) \cap U))} \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

and

$$\begin{aligned} \sup_{s \in (t+I_{2r}) \cap I_2} \|(u - f)(s, \cdot)\|_{L^2(B_r(x) \cap U)} &\leq C \|\nabla(u - f)\|_{L^2(Q_{2r}(t,x) \cap V)} \\ &\quad + C \|\nabla f\|_{L^2(Q_{2r}(t,x) \cap V)} + C \|u^*\|_{L^2((t+I_{2r}) \cap I_2; H^{-1}(B_{2r}(x) \cap U))}. \end{aligned} \quad (2.8.9)$$

**Proof.** By replacing  $u$  by  $\tilde{u} := u - f$  and  $u^*$  by  $\tilde{u}^* := u^* - (\partial_t - \nabla \cdot \mathbf{a} \nabla) f$ , we may assume without loss of generality that  $f = 0$ . The lemma is then obtained by repeating the argument of Lemma 2.40 and making obvious adjustments to the notation.  $\square$

Following the proof of Lemma 2.41, we obtain a global version of the reverse Hölder inequality.

**Lemma 2.44** (Reverse Hölder inequality). *Let  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  be a bounded Lipschitz domain and denote  $V := I_2 \times U$ . Suppose that  $f \in H_{\text{par}}^1(V)$ ,  $u \in f + H_{\text{par}, \square}^1(V)$  and  $u^* \in L^2(I_2; H^{-1}(U))$  satisfy*

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{a}(x) \nabla u) = u^* \quad \text{in } V.$$

*Denote  $q := 2_* = 2d/(2+d)$  if  $d > 2$  or let  $q$  be any element of  $(\frac{5}{4}, \frac{7}{4})$  if  $d = 2$ . Then there exists  $C(V, d, \Lambda) < \infty$  such that, for every  $r \in (0, 1)$ ,  $(t, x) \in I_1 \times U$  and  $\alpha > 0$ ,*

$$\begin{aligned} & \|\nabla(u - f)\|_{\underline{L}^2(Q_r(t, x) \cap V)}^2 \\ & \leq \frac{C}{\alpha} \|\nabla(u - f)\|_{\underline{L}^q(Q_{4r}(t, x) \cap V)}^2 + \alpha \|\nabla(u - f)\|_{\underline{L}^2(Q_{4r}(t, x) \cap V)}^2 \\ & \quad + \alpha \|\nabla f\|_{\underline{L}^2(Q_{4r}(t, x) \cap V)}^2 + C \|u^*\|_{\underline{L}^2(t+I_{4r} \cap I_2; \underline{H}^{-1}(B_{4r}(x) \cap U))}^2. \end{aligned}$$

**Proof.** The argument is omitted, since it is an easy adaptation of the proof of Lemma 2.41.  $\square$

Proposition 2.39 is now a straightforward consequence of Lemmas 2.42 and 2.44.



## Chapitre 3

# Quantitative stochastic homogenization for the corrector of elliptic discrete equations

### 3.1 Introduction

#### 3.1.1 Notations

We consider the random conductance model on the lattice  $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}_d)$  in dimension  $d \geq 2$ , where  $\mathcal{E}_d$  is the set of *edges*, that is, unordered pairs  $\{x, y\}$  with  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  satisfying  $|x - y| = 1$ . We are given  $\lambda \in (0, 1)$  and a random function

$$\mathbf{a} : \mathcal{E}_d \longrightarrow [\lambda, 1].$$

The quantity  $\mathbf{a}(\{x, y\})$  is called the *conductance* of the edge  $\{x, y\} \in \mathcal{E}_d$  and we assume that  $\{\mathbf{a}(e)\}_{e \in \mathcal{E}_d}$  is an i.i.d. ensemble. We are interested in the elliptic finite difference equation

$$-\nabla \cdot \mathbf{a} \nabla u = 0 \quad \text{in } \mathbb{Z}^d, \tag{3.1.1}$$

where  $-\nabla \cdot \mathbf{a} \nabla$  is the elliptic operator defined for functions  $u : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  by

$$(-\nabla \cdot \mathbf{a} \nabla u)(x) := \sum_{y \sim x} \mathbf{a}(\{x, y\}) (u(x) - u(y)). \tag{3.1.2}$$

We can give an interpretation of the operator  $-\nabla \cdot \mathbf{a} \nabla$  in terms of random walk in random conductance. By attaching a clock to each edge  $e \in \mathcal{E}_d$ , that rings after exponential waiting time of expectation  $\mathbf{a}^{-1}(e)$ , we consider  $(X_t)_{t \geq 0}$  the continuous-time Markov process starting at the vertex 0, such that, when  $X(t)$  is located in a vertex  $x \in \mathbb{Z}^d$ , the random walk stays in this vertex until the first ring of the  $2d$  clocks of the form  $(x, x \pm e_i)$  and then immediately jumps to the endpoint of the corresponding edge. We notice that the generator of this Markov chain is  $-\nabla \cdot \mathbf{a} \nabla$ . In the following, we define vector fields and Dirichlet forms. For  $U \subseteq \mathbb{Z}^d$ , we define  $\mathcal{E}^+(U)$  as :

$$\mathcal{E}^+(U) := \bigcup_{i=1}^d \{(x, x + e_i), x \in U\}.$$

We also define  $U^+$  as :

$$U^+ := U \cup \bigcup_{i=1}^d (e_i + U).$$

We define  $\partial U$  as the subset of  $U$  of all the vertices which admit a neighbor in  $\mathbb{Z}^d$  which is not an element of  $U$ . That is :

$$\partial U := \{x \in U, \exists y \text{ such that } y \notin U \text{ and } |x - y| = 1\}.$$

We let  $\mathcal{E} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}^d, x \sim y\}$  denote the set of oriented nearest-neighbor pairs and  $\mathcal{E}(U) := \{(x, y) : x, y \in U, x \sim y\}$  the edges lying in a subset  $U \subseteq \mathbb{Z}^d$ . The function

$$G : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

is said to be a vector field if it is antisymmetric, in the sense that  $G(x, y) = -G(y, x)$  for every  $(x, y) \in \mathcal{E}(U)$ . If  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ , then  $\nabla u$  is the vector field satisfying

$$(\nabla u)(x, y) := u(x) - u(y)$$

and  $\mathbf{a}\nabla u$  is the vector field defined by

$$(\mathbf{a}\nabla u)(x, y) := \mathbf{a}(\{x, y\})(u(x) - u(y)).$$

If  $q \in \mathbb{R}^d$ , we also denote the affine function  $\ell_q$  given by  $x \mapsto q \cdot x$  and we let  $q$  denote the constant vector field which equals  $\nabla \ell_q$ , that is

$$q(x, y) := q \cdot (x - y).$$

The space of vector fields on  $U$  is endowed with the following inner product :

$$\langle F | G \rangle_{\underline{L}^2(\mathcal{E}(U))} := \frac{1}{2|U|} \sum_{x, y \in U, x \sim y} F(x, y)G(x, y),$$

and an inner product  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\underline{L}^2(U)}$  on the space of functions  $\mathcal{E}^+(U) \rightarrow \mathbb{R}$ , defined by

$$\langle f | g \rangle_{\underline{L}^2(U)} := \frac{1}{|U|} \sum_{\substack{x \in U \\ 1 \leq i \leq d}} f(x, x + e_i)g(x, x + e_i).$$

We denote by  $\langle F \rangle_{\mathcal{E}(U)}$  and  $\langle F \rangle_{\mathcal{E}^+(U)}$  the unique vectors in  $\mathbb{R}^d$  such that, for every  $p \in \mathbb{R}^d$ ,

$$p \cdot \langle F \rangle_{\mathcal{E}(U)} = \langle p | F \rangle_{\underline{L}^2(\mathcal{E}(U))} \text{ and } p \cdot \langle F \rangle_{\mathcal{E}^+(U)} = \langle p | F \rangle_{\underline{L}^2(U)}.$$

We also denote, for  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , the average of  $u$  on  $U$  by  $\langle u \rangle_U$ , precisely

$$\langle u \rangle_U = \frac{1}{|U|} \sum_{x \in U} u(x).$$

With these conventions, for  $\mathbf{a} : \mathcal{E}_d \rightarrow \mathbb{R}$  and  $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$ , we can express the (bilinear) Dirichlet form as

$$\langle \nabla u | \mathbf{a}\nabla v \rangle_{\underline{L}^2(\mathcal{E}(U))} = \frac{1}{2|U|} \sum_{x, y \in U, x \sim y} (u(x) - u(y)) \mathbf{a}(\{x, y\})(v(x) - v(y)).$$

We introduce

$$\mathcal{A}(U) := \{u : U \rightarrow \mathbb{R} : -\nabla \cdot \mathbf{a} \nabla u(x) = 0 \text{ for every } x \in \text{int}(U)\}, \quad (3.1.3)$$

where  $\text{int}(U) = U \setminus \partial U$  is the set of interior vertices of  $U$ , the set of solutions (called  $\mathbf{a}$ -harmonic functions) on a subset  $U \subseteq \mathbb{Z}^d$ . We denote by  $\mathcal{C}_0(U)$  the set of functions  $w : U \rightarrow \mathbb{R}$  with compact support and satisfying  $w = 0$  on  $\partial U$ . Then we can claim

$$u \in \mathcal{A}(U) \iff \langle \nabla w | \mathbf{a} \nabla u \rangle_{\underline{L}^2(\mathcal{E}(U))} = 0 \text{ for every } w \in \mathcal{C}_0(U). \quad (3.1.4)$$

For  $n \in \mathbb{N}$ , we define  $\square_n$  as :

$$\square_n := [-3^n, 3^n]^d \cap \mathbb{Z}^d.$$

The result (3.1.4) gives

$$u \in \mathcal{A}(\square_n^+) \iff \langle \nabla w | \mathbf{a} \nabla u \rangle_{\underline{L}^2(\square_n)} = 0 \text{ for every } w \in \mathcal{C}_0(\square_n^+), \quad (3.1.5)$$

taking  $U = \square_n^+$ , and noticing that the edges of  $\mathcal{E}(\square_n^+)$  which are not contained in  $\mathcal{E}^+(\square_n)$  are always edges linking two vertices of  $\partial \square_n^+$ , subset on which all the function of  $\mathcal{C}_0(\square_n^+)$  vanishes.

The usual inner product on  $L^2(U)$ , as well as the inner product on  $L^2(\mathcal{E}(U))$  will respectively be denoted  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(U)}$  and  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{E}(U))}$ .

We define the  $H^1$  norm as

$$\|u\|_{H^1(U)} = \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{E}(U))},$$

and the  $H^{-1}$  norm by

$$\|u\|_{H^{-1}(U)} = \sup_{\|\phi\|_{H^1(U)}=1} \langle u, \phi \rangle_{L^2(U)}.$$

The norms  $\underline{H}^1(U)$ ,  $\underline{L}^2(U)$  and  $\underline{H}^{-1}(U)$  are respectively the norms  $H^1(U)$ ,  $L^2(U)$  and  $H^{-1}(U)$  divided by the cardinal of  $U$ .

The inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{a}, U}$ , on  $L^2(\mathcal{E}^+(U))$  is given by

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathbf{a}, U} := \frac{1}{|U|} \sum_{e \in \mathcal{E}^+(U)} \mathbf{a}(e) \phi(e) \psi(e).$$

Since  $\mathbf{a}$  is defined on the edges, we only note  $U$  instead of  $\mathcal{E}^+(U)$  to shorten and there is no possible confusion. For  $E$  a subspace of  $L^2(\mathcal{E}^+(U))$ , we denote by  $E^{\perp \mathbf{a}}$  its orthogonal according to the inner product induced by  $\mathbf{a}$ .

We define the sets of potentials

$$L_{\text{pot}}^2(\mathcal{E}^+(U)) = \nabla L^2(U^+) \text{ and } L_{\text{pot},0}^2(\mathcal{E}^+(U)) = \nabla \mathcal{C}_0(U^+).$$

We define  $\mathcal{S}(U)$  as the orthogonal – according to the inner product induced by  $\mathbf{a}$  – of  $L_{\text{pot},0}^2(\mathcal{E}^+(U))$  in  $L_{\text{pot}}^2(\mathcal{E}^+(U))$ . This definition implicitly depends on the random function  $\mathbf{a}$ . We can notice that  $\mathcal{S}(\square_n) = \nabla \mathcal{A}(\square_n^+)$ , using (3.1.5).

### 3.1.2 Statement of the main result

**Theorem 3.1.** *There exists  $\bar{\mathbf{a}}$ , a deterministic scalar, satisfying  $\lambda \leq \bar{\mathbf{a}} \leq 1$  such that for every  $s \in (0, d)$ , there exists an exponent  $\beta(d, \lambda) > 0$  and a constant  $C(s, d, \lambda)$  such that the following result holds. Considering  $u_{e,n}$  the solution of the Dirichlet boundary problem*

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{a} \nabla u_{e,n} = 0 & \text{in } \text{int}(\square_n^+), \\ u_{e,n} = e \cdot x & \text{on } \partial \square_n^+, \end{cases} \quad (3.1.6)$$

we define the corrector with slope  $e \in \mathbb{R}^d$  on the cube  $\square_n^+$ , denoted by  $\phi_{e,n}$  as the difference between  $u_{e,n}$  and the linear function  $\ell_e$ , which is the solution of the homogenized version of (3.1.6), that is the same problem in which  $\mathbf{a}$  is replaced by  $\bar{\mathbf{a}}$ , we have the estimate

$$3^{-n} \|\nabla \phi_{e,n}\|_{\underline{H}^{-1}(\mathcal{E}(\square_n))} \leq C 3^{-n\beta(d-s)} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ns}), \quad (3.1.7)$$

and

$$3^{-n} \|\mathbf{a}(e + \nabla \phi_{e,n}) - \bar{\mathbf{a}}e\|_{\underline{H}^{-1}(\mathcal{E}(\square_n))} \leq C 3^{-n\beta(d-s)} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ns}). \quad (3.1.8)$$

### 3.1.3 Subadditive quantities

In the following, we define the subadditive quantities and gives their first properties. These quantities are inspired by the continuous model.

For every finite subset  $U \subseteq \mathbb{Z}^d$ , and  $p \in \mathbb{R}^d$ , we define

$$\nu(U, p) := \inf_{v \in \ell_p + \mathcal{C}_0(U^+)} \frac{1}{|U|} \sum_{e \in \mathcal{E}^+(U)} \frac{1}{2} \mathbf{a}(e) \nabla v(e)^2. \quad (3.1.9)$$

The function in the optimization problem is uniformly convex on  $L_{\text{pot},0}^2$ , hence admits an unique minimizer, which will be denoted by

$$v(\cdot, U, p) \text{ the unique minimizer in the definition of } \nu(U, p). \quad (3.1.10)$$

We can notice that the definition of  $\nu(U, p)$  can be rewritten as

$$\nu(U, p) = \inf_{\phi \in p + L_{\text{pot},0}^2(\mathcal{E}^+(U))} \frac{1}{2} \|\phi\|_{\mathbf{a},U}^2. \quad (3.1.11)$$

The functional to minimize in the previous definition is uniformly convex again, and we can define

$$\phi(\cdot, U, p) \text{ the unique minimizer in (3.1.11)}. \quad (3.1.12)$$

It is clear that  $\phi(\cdot, U, p) = \nabla v(\cdot, U, p)$ . Moreover, by a variational argument, we obtain

**Proposition 3.2.** *For any  $f \in L_{\text{pot},0}^2(\mathcal{E}^+(U))$*

$$\langle \phi(\cdot, U, p), f \rangle_{\mathbf{a},U} = 0.$$

In other terms,  $\phi(\cdot, U, p)$  belongs to the intersection of  $p + L_{\text{pot},0}^2(\mathcal{E}^+(U))$  and  $L_{\text{pot},0}^2 \perp^{\mathbf{a}}$ , which means that  $\phi(\cdot, U, p)$  is the orthogonal projection (according to the inner product induced by  $\mathbf{a}$ )

of  $p$  on  $L_{\text{pot},0}^2 \stackrel{\text{1a}}{}$ . Since  $p$  is already an element of  $L_{\text{pot}}^2(\mathcal{E}^+(U))$ , as the gradient of the function  $x \mapsto p \cdot x$ , this actually corresponds to the projection on  $\mathcal{S}(U)$  :

$$\phi(\cdot, U, p) = \text{Proj}_{\mathcal{S}(U)}^{\mathbf{a}}(p), \quad (3.1.13)$$

and hence

$$\nu(U, p) = \frac{1}{2} \|\text{Proj}_{\mathcal{S}(U)}^{\mathbf{a}}(p)\|_{\mathbf{a}, U}^2. \quad (3.1.14)$$

This gives another definition of  $\nu(U, p)$ . In the following, we give the properties of  $\nu$  :

**Lemma 3.3** (Basic properties of  $\nu$ ). *Fix  $U \subseteq \mathbb{Z}^d$  a finite subset. The quantity  $\nu(U, p)$  and its minimizer  $\phi(\cdot, U, p) = \nabla v(\cdot, U, p)$  satisfy the following properties :*

— Bounded. For every  $p \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\frac{\lambda}{2}|p|^2 \leq \nu(U, p) \leq \frac{1}{2}|p|^2. \quad (3.1.15)$$

— Uniformly convex in  $p$ . For every  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\frac{\lambda}{8}|p_1 - p_2| \leq \frac{1}{2}\nu(U, p_1) + \frac{1}{2}\nu(U, p_2) - \nu\left(U, \frac{p_1 + p_2}{2}\right) \leq \frac{1}{8}|p_1 - p_2|^2. \quad (3.1.16)$$

— Subadditivity. Let  $U_1, \dots, U_n$  be subset that form a partition of  $U$ , then

$$\nu(U, p) \leq \sum_{i=1}^n \frac{|U_i|}{|U|} \nu(U_i, p). \quad (3.1.17)$$

— Quadratic response. For all  $\phi \in p + L_{\text{pot},0}^2(\mathcal{E}^+(U))$ , we have

$$\frac{\lambda}{2} \|\phi - \phi(\cdot, U, p)\|_{L^2(\mathcal{E}^+(U))}^2 \leq \frac{1}{2} \langle \phi | \mathbf{a} \phi \rangle_{\underline{L}^2(U)} - \nu(U, p) \leq \frac{1}{2} \|\phi - \phi(\cdot, U, p)\|_{L^2(\mathcal{E}^+(U))}^2. \quad (3.1.18)$$

**Proof.** — *Bounded.* For the right inequality, it suffices to use (3.1.9) with  $v = \ell_p$ .

For the left inequality, we notice that for every  $\phi \in L_{\text{pot},0}^2(\mathcal{E}^+(U))$

$$\langle p + \phi | \mathbf{a}(p + \phi) \rangle_{\underline{L}^2(U)} \geq \lambda \langle p + \phi | p + \phi \rangle_{\underline{L}^2(U)} = \lambda \|p + \phi\|_{L^2(\mathcal{E}^+(U))}^2,$$

where the second inequality is a consequence of Jensen's inequality. As an element of  $L_{\text{pot},0}^2(\mathcal{E}^+(U))$ ,  $\phi$  has a zero mean, which gives (3.1.15).

— *Uniformly convex.* Using (3.1.14), we deduce that

$$\frac{1}{2}\nu(U, p_1) + \frac{1}{2}\nu(U, p_2) - \nu\left(U, \frac{p_1 + p_2}{2}\right) = \frac{1}{4} \|\text{Proj}_{\mathcal{S}(U)}^{\mathbf{a}}(p_1 - p_2)\|_{\mathbf{a}, U}^2.$$

By (3.1.14), this is  $\frac{1}{2}\nu(U, p_1 - p_2)$ , which together with (3.1.15) gives (3.1.16).

— *Subadditivity.* Defining  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $v$  coincides with  $v(\cdot, U_i, p)$  on each subset  $U_i$ , and equals 0 on  $U^+ \setminus U$ , gives an element of  $\ell_p + \mathcal{C}_0(U^+)$ , that is why (3.1.9) gives

$$\begin{aligned} \nu(U, p) &\leq \frac{1}{2} \langle p + \nabla v | \mathbf{a}(p + \nabla v) \rangle_{\underline{L}^2(U)} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|U_i|}{|U|} \langle p + \nabla v(\cdot, U_i, p) | \mathbf{a}(p + \nabla v(\cdot, U_i, p)) \rangle_{\underline{L}^2(U_i)}, \end{aligned}$$

which is (3.1.17).



- *Quadratic response.* We compute the expression  $\langle \phi | \mathbf{a}\phi \rangle_{\underline{L}^2(U)}$ , using the fact that  $\phi(\cdot, U, p)$  is  $\mathbf{a}$ -orthogonal to the space  $L_{\text{pot},0}^2(\mathcal{E}^+(U))$  :

$$\begin{aligned} \langle \phi | \mathbf{a}\phi \rangle_{\underline{L}^2(\mathcal{E}^+(U))} &= \langle \phi + (\phi - \phi(\cdot, U, p)) | \mathbf{a}\phi \rangle_{\underline{L}^2(U)} \\ &= \langle \mathbf{a}\phi(\cdot, U, p) | \phi \rangle_{\underline{L}^2(U)} \\ &+ \langle \phi - \phi(\cdot, U, p) | \mathbf{a}(\phi - \phi(\cdot, U, p)) \rangle_{\underline{L}^2(U)} \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \langle \phi | \mathbf{a}\phi \rangle_{\underline{L}^2(U)} - \langle \phi(\cdot, U, p) | \mathbf{a}\phi(\cdot, U, p) \rangle_{\underline{L}^2(U)} \\ = \langle \phi - \phi(\cdot, U, p) | \mathbf{a}(\phi - \phi(\cdot, U, p)) \rangle_{\underline{L}^2(U)}, \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

dividing by 2 and using (3.1.9), we get

$$\frac{1}{2} \langle \phi | \mathbf{a}\phi \rangle_{\underline{L}^2(U)} - \nu(U, p) = \|\phi - \phi(\cdot, U, p)\|_{L^2(\mathcal{E}^+(U))}, \quad (3.1.20)$$

from which (3.1.18) follows. □

### 3.1.4 The dual quantity $\nu^*$

In this subsection, we introduce the dual quantity  $\nu^*$  and give its basic properties.

$$\begin{aligned} \nu^*(U, q) &:= \sup_{u \in \mathcal{C}(U^+)} \frac{1}{|U|} \sum_{e \in \mathcal{E}^+(U)} \left( -\frac{1}{2} \mathbf{a}(e) \nabla u(e)^2 + (q \cdot e) \nabla u(e) \right) \\ &= \sup_{\psi \in L_{\text{pot}}^2(\mathcal{E}^+(U))} \left\langle -\frac{1}{2} \psi + \mathbf{a}^{-1} q | \psi \right\rangle_{\mathbf{a}, U}. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

We define

$$\begin{aligned} u(\cdot, U, q) \in \mathcal{C}(U^+) \text{ and } \psi(\cdot, U, q) \in L_{\text{pot}}^2(\mathcal{E}^+(U)) \\ \text{the two respective minimizers in (3.1.21)}. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

We remark that  $\psi(\cdot, U, q) = \nabla u(\cdot, U, q)$ . With a variational argument, we obtain that  $\psi(\cdot, U, q) - \mathbf{a}^{-1}q$  is orthogonal, according to the inner product induced by  $\mathbf{a}$ , to the space  $L_{\text{pot}}^2(\mathcal{E}^+(U))$ . That is,  $\psi(\cdot, U, q)$  is the projection on  $L_{\text{pot}}^2(\mathcal{E}^+(U))$  of  $\mathbf{a}^{-1}q$ , and given that the latter is an element of  $L_{\text{pot},0}^2(\mathcal{E}^+(U))^{\perp \mathbf{a}}$ , we obtain :

$$\psi(U, q) = \text{Proj}_{\mathcal{S}(U)}^{\mathbf{a}}(\mathbf{a}^{-1}q). \quad (3.1.23)$$

We deduce

$$\nu^*(U, q) = \frac{1}{2} \|\text{Proj}_{\mathcal{S}(U)}^{\mathbf{a}}(\mathbf{a}^{-1}q)\|_{\mathbf{a}, U}^2. \quad (3.1.24)$$

Now, we give some basic properties of  $\nu^*$  (the proofs are almost identical to those for  $\nu$ .)

**Lemma 3.4** (Basic properties of  $\nu^*$ ). *The quantity  $\nu^*(U, q)$  and its maximizer  $\phi(\cdot, U, q)$  satisfy the following properties :*

- Bounded. For every  $q \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\frac{\lambda}{2} |q|^2 \leq \nu^*(U, q) \leq \frac{1}{2} |q|^2. \quad (3.1.25)$$

— Uniformly convex in  $q$ . For every  $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\frac{\lambda}{8}|q_1 - q_2| \leq \frac{1}{2}\nu^*(U, q_1) + \frac{1}{2}\nu^*(U, q_2) - \nu^*(U, \frac{q_1 + q_2}{2}) \leq \frac{1}{8}|q_1 - q_2|^2. \quad (3.1.26)$$

— Subadditivity. Let  $U_1, \dots, U_n$  be subset that form a partition of  $U$ , then

$$\nu^*(U, q) \leq \sum_{i=1}^n \frac{|U_i|}{|U|} \nu^*(U_i, q). \quad (3.1.27)$$

— Quadratic response. For all  $\psi \in L^2_{\text{pot}}(\mathcal{E}^+(U))$ , we have

$$\frac{\lambda}{2} \|\psi - \psi(\cdot, U, p)\|_{L^2(\mathcal{E}^+(U))}^2 \leq \langle \frac{1}{2}\psi | \mathbf{a}\psi \rangle_{\underline{L}^2(U)} - \nu^*(U, q) \leq \frac{1}{2} \|\psi - \psi(\cdot, U, q)\|_{L^2(\mathcal{E}^+(U))}^2. \quad (3.1.28)$$

### 3.1.5 The master quantity $J$ .

After the definition of  $\nu$  and  $\nu^*$ , we introduce the subadditive quantity  $J$ , which links these two quantities. For every  $p, q \in \mathbb{R}^d$ , we set

$$J(U, p, q) := \sup_{S \in \mathcal{S}(U)} \langle S | -\frac{1}{2}\mathbf{a}S - \mathbf{a}p + q \rangle_{\underline{L}^2(U)}. \quad (3.1.29)$$

The following lemma gives an expression of the master quantity  $J$  relying on  $\nu$  and  $\nu^*$  which justify in which sense  $J$  allows us to control the defect in convex duality between them.

**Lemma 3.5.** For every  $p, q \in \mathbb{R}^d$ ,

$$J(U, p, q) = \nu(U, p) + \nu^*(U, q) - p \cdot q. \quad (3.1.30)$$

It is also possible to express the maximizer  $S(\cdot, U, p, q)$  in (3.1.29) as the difference between the maximizer of  $\nu^*(U, q)$  in (3.1.21) and the minimizer of  $\nu(U, p)$  in (3.1.9).

**Proof.** We first argue that, for every  $p, q \in \mathbb{R}^d$ , the maximizer  $S(\cdot, U, p, q)$  is the orthogonal projection—according to the inner product induced by  $\mathbf{a}$ —of  $q - \mathbf{a}^{-1}p$  on the space  $\mathcal{S}(U)$ . By a variational argument, we first remark that for any  $T \in \mathcal{S}(U)$

$$\langle T | -\mathbf{a}S(\cdot, U, p, q) - \mathbf{a}p + q \rangle_{\underline{L}^2(U)} = 0,$$

which can be rewritten as

$$\langle T, S(\cdot, U, p, q) - (\mathbf{a}^{-1}q - p) \rangle_{\mathbf{a}, U} = 0.$$

Since  $S(\cdot, U, p, q) \in \mathcal{S}(U)$  and  $S(\cdot, U, p, q) - (\mathbf{a}^{-1}q - p) \in \mathcal{S}(U)^{\perp \mathbf{a}}$ , we conclude that

$$S(\cdot, U, p, q) = \text{Proj}_{\mathcal{S}(U)}^{\mathbf{a}}(\mathbf{a}^{-1}q - p), \quad (3.1.31)$$

from where, (3.1.13) and (3.1.23) allow us to affirm that  $S(\cdot, U, p, q)$  is the difference between  $\psi(\cdot, U, q)$  and  $\phi(U, p)$ , i.e. the maximizer of  $\nu^*(U, q)$  in (3.1.21) and the minimizer of  $\nu(U, p)$  in (3.1.9). Combining (3.1.31) with (3.1.29) gives

$$J(U, p, q) = \frac{1}{2} \|\text{Proj}_{\mathcal{S}(U)}^{\mathbf{a}}(q - \mathbf{a}^{-1}p)\|_{\mathbf{a}, U}^2. \quad (3.1.32)$$

and expanding this expression together with (3.1.14) and (3.1.24) gives Lemma 3.5.  $\square$

**Lemma 3.6** (Basic properties of  $J$ ). Fix  $U \subseteq \mathbb{Z}^d$  a finite subset. The quantity  $J(U, p, q)$  and its maximizer  $S(\cdot, U, p, q) = \nabla w(\cdot, U, p, q)$  satisfy the following properties :

— Bounded. For every  $p, q \in \mathbb{R}^d$ ,

$$J(U, p, q) \leq \frac{|p|^2 + |q|^2}{2}. \quad (3.1.33)$$

— Uniformly convex in  $p$  and in  $q$ . For every  $p, q \in \mathbb{R}^d$ ,

$$p \mapsto J(U, p, q) \text{ and } q \mapsto J(U, p, q) \text{ both are uniformly convex.} \quad (3.1.34)$$

— Subadditivity. Let  $U_1, \dots, U_n$  be subset that form a partition of  $U$ , then

$$J(U, p, q) \leq \sum_{i=1}^n \frac{|U_i|}{|U|} J(U_i, p, q). \quad (3.1.35)$$

— First variation For each  $p$  and  $q \in \mathbb{R}^d$ , and for every  $T \in \mathcal{S}(U)$ , we have

$$\langle S(\cdot, U, p, q) | \mathbf{a}T \rangle_{\underline{L}^2(U)} = q \cdot \langle \mathbf{a}T \rangle_{\mathcal{E}^+(U)} - p \cdot \langle T \rangle_{\mathcal{E}^+(U)}. \quad (3.1.36)$$

— Quadratic response. For all  $S \in \mathcal{S}(U)$ , we have

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \|S - S(\cdot, U, p, q)\|_{\underline{L}^2(\mathcal{E}^+(U))}^2 &\leq J(U, p, q) - \langle -\frac{1}{2} \mathbf{a}S - \mathbf{a}p + q | S \rangle_{\underline{L}^2(U)} \\ &\leq \frac{1}{2} \|S - S(\cdot, U, p, q)\|_{\underline{L}^2(\mathcal{E}^+(U))}^2. \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

— Formulas for derivatives of  $J$ . For every  $p, q \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\nabla_p J(U, p, q) = -\langle \mathbf{a}S(\cdot, U, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(U)} \quad (3.1.38)$$

and

$$\nabla_q J(U, p, q) = \langle S(\cdot, U, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(U)}. \quad (3.1.39)$$

**Proof.** — *Bounded.* After (3.1.32), we have  $J(U, p, q) \leq \|p - \mathbf{a}^{-1}q\|_{\mathbf{a}, U}^2$ , from what we deduce the result.

— *Uniformly convex.* Using (3.1.16) and (3.1.26) with (3.1.30), we obtain the result.

— *Subadditivity* Using (3.1.17) and (3.1.27) together with (3.1.30) gives the result.

— *First variation.* This is a consequence of remark 3.1.31.

— *Quadratic response.* We use the notation  $\widehat{S}$  instead of  $S(\cdot, U, p, q)$  in order to simplify. We have :

$$\begin{aligned} J(U, p, q) - \langle -\frac{1}{2} \mathbf{a}S - \mathbf{a}p + q | S \rangle_{\underline{L}^2(U)} \\ = \langle -\frac{1}{2} \widehat{S} + (\mathbf{a}^{-1}q - p) | \mathbf{a}\widehat{S} \rangle_{\underline{L}^2(U)} - \langle -\frac{1}{2} S + (\mathbf{a}^{-1}q - p) | \mathbf{a}S \rangle_{\underline{L}^2(U)}, \end{aligned}$$

we compute that

$$\begin{aligned} J(U, p, q) - \langle -\frac{1}{2} \mathbf{a}S - \mathbf{a}p + q | S \rangle_{\underline{L}^2(U)} \\ = \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}^{-1}q - p | \mathbf{a}(S - \widehat{S}) \rangle_{\underline{L}^2(U)} + \frac{1}{2} \langle S + \widehat{S} | \mathbf{a}(S - \widehat{S}) \rangle_{\underline{L}^2(U)}, \end{aligned}$$

and thanks to (3.1.36), we can express the last term as  $\langle \widehat{S} \mathbf{a}(S - \widehat{S}) \rangle_{\underline{L}^2(U)}$ , thus, finally

$$J(U, p, q) - \langle -\frac{1}{2} \mathbf{a}S - \mathbf{a}p + q | S \rangle_{\underline{L}^2(U)} = \langle S - \widehat{S} | \mathbf{a}(S - \widehat{S}) \rangle_{\underline{L}^2(U)},$$

from what we deduce (3.1.37).

— *Derivatives.* From (3.1.32), for any  $p', q' \in \mathbb{R}^d$ , we have

$$J(U, p + p', q + q') = J(U, p, q) + \langle \text{Proj}_{\mathcal{S}(U)}^{\mathbf{a}}(\mathbf{a}^{-1}q - p), \mathbf{a}^{-1}q' - p' \rangle_{\mathbf{a}, U} + o(p', q'),$$

using that  $\text{Proj}_{\mathcal{S}(U)}^{\mathbf{a}}(\mathbf{a}^{-1}q - p) = S(\cdot, U, p, q)$  by (3.1.31), we obtain (3.1.38) and (3.1.39).  $\square$

**Definition 3.7.** We define  $\bar{\mathbf{a}}_U$  to be the symmetric matrix satisfying : for every  $q \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathbb{E}[J(U, 0, q)] = \frac{1}{2} q \cdot \bar{\mathbf{a}}_U^{-1} q. \quad (3.1.40)$$

$\bar{\mathbf{a}}_{\square_n}$  will be shortened in  $\bar{\mathbf{a}}_n$ .

**Remark 3.8.** After (3.1.30), we have

$$\mathbb{E}[J(U, p, q)] = \mathbb{E}[\nu(U, p)] + \frac{1}{2} q \cdot \bar{\mathbf{a}}_U^{-1} q - p \cdot q,$$

thus, for a fixed  $p \in \mathbb{R}^d$ , the mapping

$$q \mapsto \mathbb{E}[J(U, p, q)]$$

which is uniformly convex after (3.1.34), admits its unique minimum when its gradient vanishes, that is for  $q = \bar{\mathbf{a}}_U p$ , in other terms, for every  $p, q \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}[J(U, p, \bar{\mathbf{a}}_U p)] \leq \mathbb{E}[J(U, p, q)]. \quad (3.1.41)$$

Moreover, by uniform convexity of  $q \mapsto \mathbb{E}[J(U, p, q)]$ , we can give an estimate of the difference, so finally

$$\mathbb{E}[J(U, p, \bar{\mathbf{a}}_U p)] \leq \mathbb{E}[J(U, p, q)] \leq \mathbb{E}[J(U, p, \bar{\mathbf{a}}_U p)] + C|q - \bar{\mathbf{a}}_U p|^2. \quad (3.1.42)$$

We can also notice that, when the set  $U$  is stable under the permutation of coordinate  $i$  and  $j$ , since the law of  $\mathbf{a}$  is invariant under this transformation,  $\bar{\mathbf{a}}_U$  is also invariant. The same argument holds for reflection in direction  $i$ , thus, for the set  $U = \square_n$  which possesses these properties, the matrix  $\mathbf{a}_{\square_n}$  is a multiple of identity.

**Remark 3.9.** We also notice, that taking expectation of (3.1.39), we have

$$\nabla_q \mathbb{E}[J(U, p, q)] = \mathbb{E}[\langle S(\cdot, U, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(U)}].$$

Using Remark 3.8, this quantity vanishes when  $q = \bar{\mathbf{a}}_U p$ , that is

$$\mathbb{E}[\langle S(\cdot, U, p, \bar{\mathbf{a}}_U p) \rangle_{\mathcal{E}^+(U)}] = 0.$$

### 3.2 Functional inequalities

In this section, we demonstrate some functional inequalities which will be useful in the following. The two principal results are a “multiscale” discrete version of the Poincaré inequality, and a Caccioppoli-type inequality for elements of  $\mathcal{A}(\square_n)$ .

For a fixed  $n \in \mathbb{N}$ , we define, for every integer  $m \leq n$ , the subset  $\mathcal{Z}_m$ , implicitly depending on  $n$ , as

$$\mathcal{Z}_m := 3^m \mathbb{Z}^d \cap \square_n, \quad (3.2.1)$$

so that  $\square_n$  is the disjoint union of the subcubes  $z + \square_m$  for  $z$  describing the set  $\mathcal{Z}_m$ .

**Proposition 3.10** (Multiscale Poincaré inequality). *There exists  $C(d) < \infty$  such that, for every  $n \geq 1$  and  $f \in L^2(\square_n)$ ,*

$$\|u\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C \|\nabla u\|_{\underline{L}^2(\mathcal{E}^+(\square_n))} + C \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |\langle \nabla u \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Proof** (Proof of Proposition 3.10). Let  $g : \square_n \rightarrow \mathbb{R}^d$  such that  $\|\nabla g\|_{L^2(\mathcal{E}(\square_n))} = 1$ . First, we observe that

$$\sum_{x \in \square_n} f(x) \cdot g(x) = \sum_{x \in \square_n} f(x) (g(x) - \langle g \rangle_{\square_n}).$$

remarking that  $g(x)$  can be replaced by  $\langle g \rangle_{\square_{-1}(x)}$ , where by convention  $\square_{-1} = \{0\}$ , we express it as a telescopic sum :

$$\sum_{x \in \square_n} f(x) g(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{x \in \square_n} f(x) \cdot (\langle g \rangle_{\square_{i-1}(x)} - \langle g \rangle_{\square_i(x)}),$$

which can be rewritten as

$$\sum_{x \in \square_n} f(x) g(x) = \sum_{i=0}^n |\square_i| \sum_{z \in \mathcal{Z}_{i-1}} \langle f \rangle_{z + \square_{i-1}} (\langle g \rangle_{z + \square_{i-1}} - \langle g \rangle_{\square_i(z)}).$$

Applying the Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathcal{Z}_{i-1}} \langle f \rangle_{z + \square_{i-1}} (\langle g \rangle_{z + \square_{i-1}} - \langle g \rangle_{\square_i(z)}) \\ \leq \left( \sum_{y \in \mathcal{Z}_{i-1}} |\langle f \rangle_{y + \square_{i-1}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{y \in \mathcal{Z}_{i-1}} |\langle g \rangle_{y + \square_{i-1}} - \langle g \rangle_{\square_i(y)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Then, we focus on a subcube of size  $3^{i+1}$ , which is an union of  $3^d$  subcubes of size  $3^i$ . Formally,  $z + \square_i = \bigcup_{y \in \mathcal{Z}_{i-1} \cap (z + \square_i)} (y + \square_{i-1})$ . By Jensen’s inequality, we have, for all  $y \in \mathcal{Z}_{i-1} \cap (z + \square_i)$  :

$$|\langle g \rangle_{y + \square_{i-1}} - \langle g \rangle_{\square_i(y)}|^2 \leq \frac{1}{|\square_{i-1}|} \sum_{x \in y + \square_i} |g(x) - \langle g \rangle_{\square_i(y)}|^2.$$

After assembling the sum over all  $y \in \mathcal{Z}_{i-1} \cap (z + \square_i)$ , we use the usual Poincaré inequality to find

$$\sum_{y \in \mathcal{Z}_{i-1} \cap (z + \square_i)} |\langle g \rangle_{y + \square_{i-1}} - \langle g \rangle_{\square_i(y)}|^2 \leq \frac{C 3^{2i}}{|\square_i|} \sum_{e \in \mathcal{E}(z + \square_i)} |\nabla g(e)|^2.$$

We then sum over all  $y \in \mathcal{Z}_{i-1}$  to obtain

$$\sum_{y \in \mathcal{Z}_{i-1}} |\langle g \rangle_{y+\square_{i-1}} - \langle g \rangle_{\square_i(y)}|^2 \leq \frac{C3^{2i}}{|\square_i|} \|\nabla g\|_{L^2(\mathcal{E}(\square_n))}^2.$$

Combining all the previous results, recalling that  $\|\nabla g\|_{L^2(\square_n)}^2 = 1$ ,

$$\sum_{x \in \square_n} f(x)g(x) \leq C \sum_{i=0}^n 3^i \left( |\square_i|^{-1} \sum_{y \in \mathcal{Z}_{i-1}} |\langle f \rangle_{y+\square_{i-1}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

from what we deduce

$$\|f\|_{H^{-1}(\square_n)} \leq \sum_{i=0}^n C3^i \left( |\square_i|^{-1} \sum_{y \in \mathcal{Z}_{i-1}} |\langle f \rangle_{y+\square_{i-1}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

or, to avoid using notation  $\square_{-1}$

$$\|f\|_{H^{-1}(\square_n)} \leq C\|f\|_{L^2(\square_n)} + C \sum_{i=0}^{n-1} 3^i \left( |\square_i|^{-1} \sum_{y \in \mathcal{Z}_i} |\langle f \rangle_{y+\square_i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2.2)$$

To extract Proposition 3.10 from (3.2.2), we need a link between the  $L^2$  norm of a function and its gradient. We apply (3.2.2) for the function  $\vec{\nabla} f : x \mapsto (f(x + e_i) - f(x))_{i=1..d}$  and  $w$ , the unique solution of the Neumann boundary problem

$$\begin{cases} -\Delta w = f & \text{in } \square_n \\ \partial_\nu w = 0 & \text{on } \partial \square_n \\ \langle w \rangle_{\square_n} = 0, \end{cases}$$

the computation

$$\langle \vec{\nabla} f | \vec{\nabla} w \rangle_{\square_n} = \|f\|_{L^2(\square_n)}^2,$$

leads to the inequality

$$\|f\|_{L^2(\square_n)}^2 \leq \|\vec{\nabla} f\|_{H^{-1}(\square_n)} \|\nabla \vec{\nabla} w\|_{L^2(\mathcal{E}(\square_n))}.$$

The first term of the product can be bounded by an application of (3.2.2). For the second term, we notice that

$$\begin{aligned} \|\nabla \vec{\nabla} w\|_{L^2(\mathcal{E}(\square_n))} &= \langle \nabla \vec{\nabla} w | \nabla \vec{\nabla} w \rangle_{L^2(\mathcal{E}(\square_n))} \\ &= -\langle \vec{\nabla} w | \Delta \vec{\nabla} w \rangle_{L^2(\square_n)} \\ &= -\langle \vec{\nabla} w | \vec{\nabla} \Delta w \rangle_{L^2(\square_n)} \\ &= \langle \Delta w | \Delta w \rangle_{L^2(\square_n)} \\ &= \|f\|_{L^2(\square_n)}, \end{aligned}$$

where the second line is obtained because  $\nabla \vec{\nabla} w = 0$  on the boundary of  $\square_n$ , the third is obtained by commutation of  $\nabla$  and  $\vec{\nabla}$ , and the fourth is obtained because  $\partial_\nu w = 0$ . We deduce that

$$\|f\|_{L^2(\square_n)} \leq \|\vec{\nabla} f\|_{H^{-1}(\square_n)},$$

and noticing that for any  $y \in \mathbb{Z}^d$  and  $k \in \mathbb{N}$  and  $f : y + \square_k^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , we have

$$\langle \bar{\nabla} f \rangle_{y + \square_k} = \langle \nabla f \rangle_{\mathcal{E}^+(y + \square_k)},$$

together with (3.2.2) gives

$$\|f\|_{L^2(\square_n)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\mathcal{E}^+(\square_n))} + C \sum_{i=0}^{n-1} 3^i \left( |\square_i|^{-1} \sum_{y \in \mathcal{Z}_i} |\langle \nabla f \rangle_{\mathcal{E}^+(y + \square_i)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dividing by  $|\square_n|^{1/2}$  and noticing that  $\frac{|\square_n|}{|\square_i|} = |\mathcal{Z}_i|$ , finally gives Proposition 3.10.  $\square$

We also prove a Caccioppoli-type inequality for elements of  $\mathcal{A}(\square_n)$ .

**Proposition 3.11** (Caccioppoli inequality). *There exists a constant  $C(d, \lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $u \in \mathcal{A}(\square_{n+1})$  :*

$$\|\nabla u\|_{\underline{L}^2(\mathcal{E}^+(\square_n))} \leq C 3^{-n} \|u\|_{\underline{L}^2(\square_{n+1})}.$$

**Proof** (Proof of Proposition 3.11). Let  $\phi : \square_{n+1}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying the following conditions :

$$\begin{cases} \forall x \in \square_{n+1}^+, 0 \leq \phi(x) \leq 1 \\ \forall x \in \square_n, \phi(x) = 1 \\ \forall x \in \partial \square_{n+1}^+, \phi(x) = 0 \\ \forall x \sim y, |\nabla \phi(x, y)| \leq C 3^{-n} \end{cases}$$

Then, the function  $\phi^2 u$  belongs to the set  $\mathcal{C}_0(\square_{n+1}^+)$ , that is why, after (3.1.4), we have

$$\langle \mathbf{a} \nabla u | \nabla(\phi^2 u) \rangle_{\underline{L}^2(\square_{n+1})} = 0. \quad (3.2.3)$$

For  $e = (x, y) \in \mathcal{E}^+(\square_{n+1})$ , and  $u, v : \square_{n+1}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  we have

$$\nabla(uv)(e) = u(y) \nabla v(e) + \nabla u(e) v(x). \quad (3.2.4)$$

For  $f$  mapping  $\square_{n+1}$  to  $\mathbb{R}$ , we define

$$\begin{cases} \underline{f} : e = (x, y) \mapsto f(y) \\ \bar{f} : e = (x, y) \mapsto f(x). \end{cases}$$

Then, (3.2.4) can be rewritten as

$$\nabla(uv)(e) = \bar{u}(e) \nabla v(e) + \nabla u(e) \underline{v}(e) = \underline{u}(e) \nabla v(e) + \nabla u(e) \bar{v}(e),$$

where the second equality is obtained by symmetry. Then, we have

$$2 \nabla(\phi^2 u) = \left( \underline{\phi}^2 + \bar{\phi}^2 \right) \nabla u + (\bar{u} + \underline{u}) \nabla(\phi^2).$$

Replacing  $\nabla(\phi^2)$  by  $(\underline{\phi} + \bar{\phi}) \nabla \phi$  again, and using (3.2.3), we obtain that

$$\langle \mathbf{a} \nabla u | (\underline{\phi}^2 + \bar{\phi}^2) \nabla u \rangle_{\underline{L}^2(\square_{n+1})} = - \langle \mathbf{a} \nabla u | (\underline{u} + \bar{u})(\underline{\phi} + \bar{\phi}) \nabla \phi \rangle_{\underline{L}^2(\square_{n+1})}.$$

Since  $a(\cdot) \geq \lambda$ , using Young's inequality, we can give a lower bound for the term on the left side

$$\frac{\lambda}{2} \|(\underline{\phi} + \bar{\phi}) \nabla u\|_{L^2(\mathcal{E}^+(\square_{n+1}))}^2 \leq \|(\underline{\phi} + \bar{\phi}) \nabla u\|_{L^2(\mathcal{E}^+(\square_{n+1}))} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(\mathcal{E}^+(\square_{n+1}))} \|\underline{u} + \bar{u}\|_{L^2(\mathcal{E}^+(\square_{n+1}))},$$

either  $\nabla u \equiv 0$ , in which case 3.11 is immediate, or we can divide by the norm on the left side. Using that  $\phi \equiv 1$  on  $\square_n$ , and that  $\|\underline{u} + \bar{u}\|_{L^2(\mathcal{E}^+(\square_{n+1}))}$  is bounded by  $C(d)\|u\|_{L^2(\square_{n+1})}$  we have

$$\|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{E}^+(\square_n))} \leq \frac{C3^{-n}}{\lambda} \|u\|_{L^2(\square_{n+1})}.$$

This completes the proof.  $\square$

### 3.3 Flatness of maximizers

In this section, we prove that the subadditive quantities admit an algebraic rate of convergence.

We let  $\bar{\mathbf{a}}$  be the  $d$ -by- $d$  matrix characterized by the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\nu(\square, p)] = \frac{1}{2} p \cdot \bar{\mathbf{a}} p. \quad (3.3.1)$$

By subadditivity of  $\nu(\cdot, p) = J(\cdot, p, 0)$  and stationarity, we obtain that the left side of (3.3.1) is nonincreasing in  $n$ , which allows us to consider its limit. Moreover, since  $p \mapsto \nu(\square_n, p)$  is quadratic in  $p$  for every value of  $n$ , we deduce that the limit is also quadratic, hence, the existence and unicity of  $\bar{\mathbf{a}}$  is asserted. Despite the intuition that  $\nu^*$  is the dual of  $\nu$ , it is not the case for finite volume, but it will be shown that it is asymptotically the case. Then, it becomes natural to define

$$\bar{J}(p, q) := \frac{1}{2} p \cdot \bar{\mathbf{a}} p + \frac{1}{2} q \cdot \bar{\mathbf{a}}^{-1} q - p \cdot q.$$

The main objective of this section is to demonstrate the following theorem.

**Theorem 3.12** (Convergence of  $J$ ). *There exist an exponent  $\beta(d, \lambda) > 0$  and, for each  $s \in (0, d)$ , a constant  $C(s, d, \lambda) < \infty$  such that, for every  $p, q \in B_1$  and  $n \in \mathbb{N}$ , we have*

$$|J(\square_n, p, q) - \bar{J}(p, q)| \leq C3^{-n\beta(d-s)} + \mathcal{O}_1(C3^{-ns}). \quad (3.3.2)$$

The next lemma, (similar to [4, Lemma 2.7]), claims that it is sufficient to have a control of the quantity  $J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}p)$  to deduce Theorem 3.12. By Lemma 3.5,  $\inf_q J(U, p, q)$  quantifies how the functions  $\nu(U, \cdot)$  and  $\nu^*(U, \cdot)$  are close to be the Legendre-Fenchel transform of each other.

**Lemma 3.13** (Reduction to minimal set). *For each  $\Gamma \geq 1$ , there exists a constant  $C(\Gamma, d, \lambda) < \infty$  such that, for every  $d$ -by- $d$  symmetric matrix  $\widehat{\mathbf{a}}$  satisfying*

$$\Gamma^{-1} I_d \leq \widehat{\mathbf{a}} \leq \Gamma I_2 \quad (3.3.3)$$

and every finite set  $U \subseteq \mathbb{R}^d$ , we have

$$\sup_{p, q \in B_1} \left| J(U, p, q) - \left( \frac{1}{2} p \cdot \widehat{\mathbf{a}} p + \frac{1}{2} q \cdot \widehat{\mathbf{a}}^{-1} q - p \cdot q \right) \right| \leq C \sup_{p \in B_1} (J(U, p, \widehat{\mathbf{a}}p))^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.4)$$

**Proof.** The proof is almost the same as in [4, Lemma 2.7] which is reproved in [3, Lemma 4.2].  $\square$



### 3.3.1 Control of the expectation of $J$

This subsection aims to prove the following proposition.

**Proposition 3.14** (Decay of  $\mathbb{E}[J]$ ). *There exist  $\beta(d, \lambda) > 0$  and  $C(d, \lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $p \in B_1(\mathbb{R}^d)$ ,*

$$\mathbb{E}[J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}p)] \leq C3^{-\beta n}. \quad (3.3.5)$$

The essential argument in the proof of Proposition 3.14 is to establish a link between  $\mathbb{E}[J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}p)]$  and the ‘‘additivity defect’’ of  $\mathbb{E}[J(\cdot, p, q)]$  between successive triadic scales. We introduce

$$\tau_n := \sup_{p, q \in B_1} (\mathbb{E}[J(\square_n, p, q)] - \mathbb{E}[J(\square_{n+1}, p, q)]). \quad (3.3.6)$$

which measures the rate of convergence of  $J$ .

**Proposition 3.15.** *There exist constants  $\alpha > 0$  and  $C(\alpha, d, \lambda) < \infty$ , such that, for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $p \in B_1(\mathbb{R}^d)$ ,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)] &\leq C3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right). \\ \mathbb{E}[|\langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_n)} - \bar{S}_n(p, q)|^2] &\leq C\tau_n. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

In the following, we will explain how Proposition 3.15 allows to deduce Proposition 3.14, by iteration, using an ODE argument. For this reason, we are brought to prove Proposition 3.15. To begin with, we give another formulation of (3.1.37) which will be more useful in the following.

**Lemma 3.16** (Quadratic response). *There exists a constant  $C(d, \lambda) < \infty$  such that given  $U$ , admitting the partition  $U_1, \dots, U_k$ , for every  $p, q \in \mathbb{R}^d$ , we have*

$$\sum_{j=1}^k \frac{|U_j|}{|U|} \|S(\cdot, U, p, q) - S(\cdot, U_j, p, q)\|_{\underline{L}^2(U_j)}^2 \leq C \sum_{j=1}^k \frac{|U_j|}{|U|} (J(U_j, p, q) - J(U, p, q)).$$

**Proof.** We use (3.1.37) on each subdomain  $U_j$ , defining  $T := S(\cdot, U, p, q)$ , we have

$$\frac{1}{C} \sum_{e \in U_j} |T(e) - S(e, U_j, p, q)|^2 \leq |U_j| J(U_j, p, q) - \sum_{e \in U_j} \left( -\frac{1}{2} T \cdot \mathbf{a}T - p \cdot \mathbf{a}T + q \cdot T \right).$$

We conclude by summing over  $j$ . □

In what follows, we establish that the averages of  $S$  on  $\square_n$  are estimated by a weighted sum of the additivity defects of  $J$  on smaller scales. We introduce

$$\bar{S}_n(p, q) := \mathbb{E}[\langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_n)}].$$

**Lemma 3.17.** *There exists  $\alpha(d) < d$ , as close as  $d$  as desired and  $C(\alpha, d, \lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $p, q \in B_1(\mathbb{R}^d)$ , we have*

$$\mathbb{E}[|\langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_n)} - \bar{S}_n(p, q)|^2] \leq C3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right). \quad (3.3.8)$$

**Proof.** Let  $p' \in B_1$ ,  $m \leq n$  and  $z \in \mathcal{Z}_m$ , the first variation (3.1.36) gives

$$\begin{aligned} p' \cdot \langle S(\cdot, \square_n, p, q) - S(\cdot, z + \square_m, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} \\ = \langle S(\cdot, z + \square_m, 0, p') | \mathbf{a}(S(\cdot, \square_n, p, q) - S(\cdot, z + \square_m, p, q)) \rangle_{\underline{L}^2(z + \square_m)}. \end{aligned}$$

Averaging over  $z \in \mathcal{Z}_m$  and using the Cauchy-Schwarz inequality yields

$$\begin{aligned} |\mathcal{Z}_m|^{-1} \cdot \left| p' \cdot \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \langle S(\cdot, \square_n, p, q) - S(\cdot, z + \square_m, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} \right| \\ \leq \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \langle |\mathbf{a}S(\cdot, z + \square_m, 0, p')|^2 \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \cdot \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \langle |S(\cdot, \square_n, p, q) - S(\cdot, z + \square_m, p, q)|^2 \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.9) \end{aligned}$$

The first term on the right side is bounded by a constant  $C(d, \lambda) < \infty$ . We use Lemma 3.16 to bound the second term and obtain

$$\begin{aligned} \left| |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \langle |S(\cdot, \square_n, p, q) - S(\cdot, z + \square_m, p, q)|^2 \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} \right| \\ \leq \frac{C}{|\mathcal{Z}_m|} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (J(z + \square_m, p, q) - J(\square_n, p, q)). \end{aligned}$$

The variance  $\langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_n)}$  can be estimated by a quantity involving those at smaller scales

$$\begin{aligned} \text{Var} [\langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_n)}] \leq (1 + \varepsilon) \text{Var} \left[ 3^{-d(n-m)} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \langle S(\cdot, z + \square_m, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} \right] \\ + (1 + \frac{1}{\varepsilon}) \mathbb{E} [J(\square_m, p, q) - J(\square_n, p, q)]. \end{aligned}$$

By independence, we have

$$\text{Var} \left[ \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \langle S(\cdot, z + \square_m, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} \right] = 3^{d(n-m)} \text{Var} [\langle S(\cdot, \square_m, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_m)}].$$

We can now estimate the variance of the spatial average of  $S$  at scale  $n$  by the variance at smaller scales :

$$\begin{aligned} \text{Var} [\langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_n)}] \leq (1 + \varepsilon) 3^{-d(n-m)} \text{Var} [\langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_n)}] \\ + C_\varepsilon \mathbb{E} [J(\square_m, p, q) - J(\square_n, p, q)]. \quad (3.3.10) \end{aligned}$$

Let  $\alpha$  be such that  $3^{-\alpha} = (1 + \varepsilon)3^{-d}$ . Given that  $\varepsilon$  can be arbitrary close to 0,  $\alpha$  can be arbitrary close to  $d$ .

$$\begin{aligned} \text{Var} [\langle S(\cdot, \square_{n+1}, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_{n+1})}] \leq 3^{-\alpha} \text{Var} [\langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_n)}] \\ + C \mathbb{E} [J(\square_n, p, q) - J(\square_{n+1}, p, q)]. \end{aligned}$$

and, by induction,

$$\text{Var} \left[ \langle S(\cdot, \square_{n+1}, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_{n+1})} \right] \leq 3^{-\alpha n} \text{Var} \left[ \langle S(\cdot, \square_0, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_0)} \right] + C \sum_{i=1}^n 3^{-\alpha i} \tau_i.$$

So finally :

$$\text{Var} \left[ \langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_n)} \right] \leq C \left( 3^{-\alpha n} + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-\alpha(n-k)} \tau_k \right),$$

which is (3.3.8).  $\square$

Assuming that the latter weighted norm of  $(\tau_k)_{k < n}$  is small, we can interpret the last result as a control of how  $S(\cdot, \square_n, p, q)$  is close to a constant. In the following, we make this interpretation more precise, by estimating the  $H^{-1}$  norm of the difference between  $S(\cdot, \square_n, p, q)$  and the expectation of its average.

**Lemma 3.18** (Control of  $w$ ). *There exist  $\alpha(d) > 0$  as close as  $d$  as desired and  $C(\alpha, d, \lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $p, q \in B_1(\mathbb{R}^d)$ ,*

$$\mathbb{E} \left[ \|w(\cdot, \square_n, p, q) - \ell_{\bar{S}_n(p, q)}\|_{\underline{L}^2(\mathcal{E}^+(\square_n))}^2 \right] \leq C 3^{(2-\alpha)n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

**Proof.** The proof of Lemma 3.18 includes three distinct steps.

*Step 1.* First of all, we show the existence of a constant  $C(d, \lambda) < \infty$  such that, for every  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$  and  $p, q \in B^1(\mathbb{R}^d)$ ,

$$|\bar{S}_n(p, q) - \bar{S}_m(p, q)|^2 \leq C \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k. \quad (3.3.11)$$

Indeed, we apply Lemma 3.16 with the subcubes  $(z + \square_m)_{z \in \mathcal{Z}_m}$ , recalling that  $\mathcal{Z}_m$  denotes the centers of the subcubes of size  $m$  in  $\square_n$

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left[ \langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(\square_n)} - |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \langle S(\cdot, z + \square_m, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} \right] \right|^2 \\ & \leq \mathbb{E} \left[ |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \langle |S(\cdot, \square_n, p, q) - S(\cdot, z + \square_m, p, q)|^2 \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} \right] \\ & \leq C (J(\square_n, p, q) - J(\square_m, p, q)) \\ & \leq C \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k, \end{aligned}$$

from what we obtain (3.3.11).

*Step 2.* In this step, we show that there exists a constant  $C(d, \lambda) < \infty$  such that, for every  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \langle |S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} - \bar{S}_n(p, q) \rangle^2 \right] \\ & \leq C \left( 3^{-\alpha m} + \sum_{k=0}^m 3^{\alpha(k-m)} \tau_k + \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k \right). \quad (3.3.12) \end{aligned}$$

To begin with, we use Lemma 3.16, to obtain

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \|S(\cdot, \square_n, p, q) - S(\cdot, z + \square_m, p, q)\|_{\underline{L}^2(z + \mathcal{E}^+(\square_m))}^2 \\ \leq C \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (J(\square_n, p, q) - J(z + \square_m, p, q)). \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Then, we compute the expectation of the previous line, using stationarity and Jensen's inequality, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |\langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} - \langle S(\cdot, z + \square_m, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)}|^2 \right] \\ \leq C |\mathcal{Z}_m| \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Furthermore, by stationarity and Lemma 3.17, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |\langle S(\cdot, z + \square_m, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} - \bar{S}_m(p, q)|^2 \right] \\ \leq C \left( 3^{-\alpha m} + \sum_{k=0}^m 3^{\alpha(k-m)} \tau_k \right). \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

$$\begin{aligned} & |\langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} - \bar{S}_n(p, q)|^2 \\ & \leq 3 |\langle S(\cdot, \square_n, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} - \langle S(\cdot, z + \square_m, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)}|^2 \\ & \quad + 3 |\langle S(\cdot, z + \square_m, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} - \bar{S}_m(p, q)|^2 \\ & \quad + 3 |\bar{S}_n(p, q) - \bar{S}_m(p, q)|^2, \end{aligned}$$

we obtain (3.3.12) by a combination of (3.3.14), (3.3.15) and (3.3.11).

*Step 3.* We now apply the multiscale Poincaré inequality (Proposition 3.10) to the function  $w(\cdot, \square_n, p, q)$ , which admits  $S(\cdot, \square_n, p, q)$  for gradient, using the result of the previous step

$$\|w(\cdot, \square_n, p, q) - \ell_{\bar{S}_n(p, q)}\|_{\underline{L}^2(\mathcal{E}^+(\square_n))}^2 \leq C \left( 1 + \left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right), \quad (3.3.16)$$

where the random variable  $Z_m$  satisfies

$$\mathbb{E}[Z_m] \leq C \left( 3^{-\alpha m} + \sum_{k=0}^m 3^{\alpha(k-m)} \tau_k + \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k \right). \quad (3.3.17)$$

Using Hölder's inequality, we have

$$\left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \right) \left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m \right) \leq C 3^n \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m. \quad (3.3.18)$$

Computing the expectation and using (3.3.17), we get

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \leq C 3^n \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( 3^{-\alpha m} + \sum_{k=0}^m 3^{\alpha(k-m)} \tau_k + \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k \right).$$

Permuting the orders of summation in the last two terms, we find

$$\sum_{m=0}^{n-1} 3^m \sum_{k=0}^m 3^{\alpha(k-m)} \tau_k = \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \sum_{m=k}^{n-1} 3^{(1-\alpha)m} \leq C 3^{(1-\alpha)n} \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k,$$

and

$$\sum_{m=0}^{n-1} 3^m \sum_{k=m}^{n-1} \tau_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^k 3^m \tau_k \leq C \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \tau_k, \quad (3.3.19)$$

which is directly estimated by the previous quantity. Combining this gives

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{m=0}^{n-1} 3^m Z_m^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \leq C 3^{(2-\alpha)n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right),$$

which completes the proof.  $\square$

We next complete the proof of Proposition 3.15 and then of Proposition 3.14.

**Proof** (Proof of Proposition 3.15). In consequence of Lemma 3.18, Proposition 3.11 and (3.9), we obtain

$$\mathbb{E} \left[ \|S(\cdot, \square_n, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)\|_{\underline{L}^2(\mathcal{E}^+(\square_{n-1}))}^2 \right] \leq C 3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

From Lemma 3.16, we deduce

$$\mathbb{E} \left[ \|S(\cdot, \square_{n-1}, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)\|_{\underline{L}^2(\mathcal{E}^+(\square_{n-1}))}^2 \right] \leq C 3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

Moreover, by stationarity, the last inequality implies that for every  $z \in \mathcal{Z}_{n-1}$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \|S(\cdot, z + \square_{n-1}, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)\|_{\underline{L}^2(z + \mathcal{E}^+(\square_{n-1}))}^2 \right] \leq C 3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

We conclude by applying Lemma 3.16 once more and summing over  $z \in \mathcal{Z}_{n-1}$ , recalling that  $(z + \square_{n-1})_{z \in \mathcal{Z}_{n-1}}$  forms a partition of  $\square_n$ .  $\square$

**Proof** (Proof of Proposition 3.14). We denote by  $\mathcal{B}$  canonical basis of  $\mathbb{R}^d$ , and observe that there exists a constant  $C(d) < \infty$  such that if  $p \mapsto B(p)$  is a nonnegative quadratic form over  $\mathbb{R}^d$ , then

$$\sup_{p \in B_1} B(p) \leq C \sum_{p \in \mathcal{B}} B(p). \quad (3.3.20)$$

Indeed, a quadratic form is associated to a nonnegative symmetric matrix with largest eigenvalue bounded by its trace; this trace is equal to the right side above.

By the definition of  $\tau_n$ , see (3.3.6), and Lemma 3.5, we have

$$\tau_n \leq \sup_{p \in B_1} (\mathbb{E}[\nu(\square_n, p)] - \mathbb{E}[\nu(\square_{n+1}, p)]) + \sup_{q \in B_1} (\mathbb{E}[\nu^*(\square_n, q)] - \mathbb{E}[\nu^*(\square_{n+1}, q)]).$$

Since  $p \mapsto \mathbb{E}[\nu(U, p)]$  and  $q \mapsto \mathbb{E}[\nu^*(U, q)]$  are nonnegative quadratic forms, and since this property is stable under linear changes of coordinates, it follows from (3.3.20) that

$$\begin{aligned} \tau_n \leq C \sum_{p \in \mathcal{B}} (\mathbb{E}[\nu(\square_n, p)] - \mathbb{E}[\nu(\square_{n+1}, p)]) \\ + C \sum_{p \in \mathcal{B}} (\mathbb{E}[\nu^*(\square_n, \bar{\mathbf{a}}_n p)] - \mathbb{E}[\nu^*(\square_{n+1}, \bar{\mathbf{a}}_n p)]), \end{aligned}$$

therefore, using Lemma 3.5,

$$\tau_n \leq C \sum_{p \in \mathcal{B}} (\mathbb{E}[J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)] - \mathbb{E}[J(\square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)]).$$

By (3.1.41), we have

$$\mathbb{E}[J(\square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}_{n+1} p)] \leq \mathbb{E}[J(\square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)],$$

hence

$$\tau_n \leq C \sum_{p \in \mathcal{B}} (\mathbb{E}[J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)] - \mathbb{E}[J(\square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}_{n+1} p)]). \quad (3.3.21)$$

For this reason, we introduce the quantity

$$D_n := \sum_{p \in \mathcal{B}} \mathbb{E}[J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)].$$

Proposition 3.15 states that

$$D_n \leq C 3^{-\alpha n} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{\alpha k} \tau_k \right).$$

Defining

$$\tilde{D}_n := 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \sum_{k=0}^n 3^{\frac{\alpha}{2}k} D_k,$$

from what follows

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n &\leq C 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \sum_{m=0}^n 3^{-\frac{\alpha}{2}m} \left( 1 + \sum_{k=0}^m 3^{\alpha k} \tau_k \right) \\ &\leq C 3^{-\frac{\alpha}{2}n} + C 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \sum_{k=0}^n \sum_{m=k}^n 3^{-\frac{\alpha}{2}m} 3^{\alpha k} \tau_k \\ &\leq C 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \left( 1 + \sum_{k=0}^n 3^{\frac{\alpha}{2}k} \tau_k \right). \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Besides,  $D_0 \leq C$  thus

$$\tilde{D}_n - \tilde{D}_{n+1} \geq 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \sum_{k=0}^n 3^{\frac{\alpha}{2}k} (D_k - D_{k+1}) - C 3^{-\frac{\alpha}{2}n}.$$

From where, (3.3.21) allows us to obtain

$$\tilde{D}_n - \tilde{D}_{n+1} \geq C^{-1} 3^{-\frac{\alpha}{2}n} \sum_{k=0}^n 3^{\frac{\alpha}{2}k} \tau_k - C 3^{-\frac{\alpha}{2}n}.$$

From this and (3.3.22), we obtain that there exists an exponent  $\beta(d, \lambda) \in (0, \frac{\alpha}{2})$  such that

$$\tilde{D}_{n+1} \leq 3^{-\beta} \tilde{D}_n + C 3^{-\frac{\alpha}{2}n},$$

introducing  $v_n := 3^{\beta n} \tilde{D}_n$  and multiplying the previous identity by  $3^{(\beta+1)n}$  gives

$$v_{n+1} \leq v_n + C 3^{(\beta-\frac{\alpha}{2})n}.$$

Summing this inequality over  $n$   $v_n \leq v_0 + \frac{C}{1-(3^{\beta-\frac{\alpha}{2}})}$ , i.e.  $v$  is bounded, that is,

$$\tilde{D}_n \leq C3^{-\beta n}.$$

Besides, (3.3.21) gives

$$\tau_n \leq C3^{-\beta n}.$$

By the definition of  $\bar{\mathbf{a}}_n$ , we have

$$|\bar{\mathbf{a}}_n - \bar{\mathbf{a}}_{n+1}| \leq C\tau_n,$$

so that, defining

$$\tilde{\mathbf{a}} := \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{a}}_n, \quad (3.3.23)$$

we get

$$|\bar{\mathbf{a}}_n - \tilde{\mathbf{a}}| \leq \sum_{m=n}^{\infty} |\bar{\mathbf{a}}_m - \bar{\mathbf{a}}_{m+1}| \leq C \sum_{m=n}^{\infty} \tau_m \leq C3^{-\beta n}.$$

Finally, using (3.1.42), we conclude that

$$\sup_{p \in B_1} \mathbb{E} [J(\square_n, p, \tilde{\mathbf{a}}p)] \leq C3^{-\beta n}.$$

we can verify that there is no conflict of notation for the matrix  $\tilde{\mathbf{a}}$ , the definitions (3.3.23) and (3.3.1) being identical. Thus, the proof is completed.  $\square$

### 3.3.2 Control of the fluctuations of $J$

In this subsection, we prove Theorem 3.12. With respect to Lemma 3.13, the main step is to obtain an estimate of the fluctuations of  $J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}p)$ . The main argument of the proof is subadditivity.

**Proof** (Proof of Theorem 3.12). *Step 1.* In this first step, we show that there exists an exponent  $\beta(d, \lambda) > 0$  and a constant  $C(d, \lambda) > 0$  such that, for every  $p \in B_1(\mathbb{R}^d)$  and  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ , we have

$$3^{-d(n-m)} \log \mathbb{E} \left[ \exp \left( C^{-1} 3^{d(n-m)} J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}p) \right) \right] \leq C3^{-\beta m}. \quad (3.3.24)$$

For  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ , recall that the random variables  $J(z + \square_m)_{z \in \mathcal{Z}_m}$  are independent. By subadditivity, for each  $p \in B_1(\mathbb{R}^d)$  and  $t > 0$ , we have

$$\log \mathbb{E} \left[ \exp \left( t 3^{d(n-m)} J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}p) \right) \right] \leq \log \mathbb{E} \left[ \exp \left( t \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} J(z + \square_m, p, \bar{\mathbf{a}}p) \right) \right],$$

which, by independence, equals

$$\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \log \mathbb{E} [\exp (tJ(z + \square_m, p, \bar{\mathbf{a}}p))].$$

By stationarity, there is no dependence on  $z \in \mathcal{Z}_m$  in the expectation appearing in the previous line. Since

$$J(\square_m, p, \bar{\mathbf{a}}p) \leq \frac{1}{2},$$

there exists  $t > 0$  sufficiently small such that the following inequalities hold

$$\begin{cases} \exp(s) \leq 1 + 2s & \text{for all } 0 \leq s \leq 1, \\ \log(1 + s) \leq s & \text{for all } s \geq 0 \end{cases}$$

Then, we deduce that

$$\log \mathbb{E} \left[ \exp \left( t 3^{d(n-m)} J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}p) \right) \right] \leq 2t 3^{d(n-m)} \mathbb{E} [J(\square_m, p, \bar{\mathbf{a}}p)].$$

Finally, we use Proposition 3.14 to obtain inequality (3.3.24).

*Step 2.* We define

$$\rho_n := \sup_{p \in B_1} J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}p).$$

In this step, we show that there exists an exponent  $\beta(d, \lambda) > 0$  and, for every  $s \in (0, d)$ , a constant  $C(s, d, \lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\rho_n \leq C 3^{-\beta(d-s)n} + \mathcal{O}_1(C 3^{-sn}). \quad (3.3.25)$$

Applying Hölder's inequality together with (3.3.20) in (3.3.24), we obtain

$$3^{-d(n-m)} \log \mathbb{E} \left[ \exp \left( C^{-1} 3^{d(n-m)} \rho_n \right) \right] \leq C 3^{-\beta m}. \quad (3.3.26)$$

By Markov's inequality, for every  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\rho_n \geq t] &\leq \exp \left( -C^{-1} 3^{d(n-m)} t \right) \mathbb{E} \left[ \exp \left( C^{-1} 3^{d(n-m)} \rho_n \right) \right] \\ &\leq \exp \left( -C^{-1} 3^{d(n-m)} t + C 3^{d(n-m) - \beta m} \right). \end{aligned}$$

We substitute the value  $C 3^{-\beta m} + t$  into the term  $t$

$$\mathbf{P}[\rho_n \geq C 3^{-\beta m} + t] \leq \exp \left( -C^{-1} 3^{d(n-m)} t \right).$$

We define

$$m := \left\lfloor \frac{d-s}{d} n \right\rfloor$$

which is a good integer in order to have

$$\mathbf{P}[\rho_n \geq C 3^{-\beta \frac{d-s}{d} n} + t] \leq \exp \left( -C^{-1} 3^{sn} t \right).$$

We obtain (3.3.25) thanks to an application of [3, (1.19)], up to a redefinition of  $\beta(d, \lambda) > 0$ .

*Step 3.* Using Lemma 3.13 together with (3.3.26) and the following inequality

$$\forall a, b > 0, \quad (a + b)^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} b \quad (3.3.27)$$

we obtain

$$\begin{aligned} \sup_{p, q \in B_1} \left| J(\square_n, p, q) - \left( \frac{1}{2} p \cdot \bar{\mathbf{a}}p + \frac{1}{2} q \cdot \bar{\mathbf{a}}^{-1} q - p \cdot q \right) \right| \\ \leq 3^{-\frac{\beta}{2}(d-s)n} + \mathcal{O}_1 \left( C 3^{-\left(s - \frac{\beta}{2}(d-s)\right)n} \right). \end{aligned} \quad (3.3.28)$$



For every  $s' \in (0, d)$ , if we set

$$s := \frac{2s' + \beta d}{2 + \beta} \in (0, d),$$

then the right side of (3.3.28) can be rewritten as

$$3^{-\frac{\beta}{2+\beta}(d-s')n} + \mathcal{O}_1\left(C3^{-s'n}\right).$$

We thus obtained (3.3.2), up to a redefinition of  $\beta(d, \lambda) > 0$ .  $\square$

**Proposition 3.19.** *The matrix  $\bar{\mathbf{a}}$  satisfies the equivalence*

$$\frac{1}{2}p \cdot \bar{\mathbf{a}}p + \frac{1}{2}q \cdot \bar{\mathbf{a}}^{-1}q - p \cdot q = 0 \iff q = \bar{\mathbf{a}}p. \quad (3.3.29)$$

Indeed, as a positive symmetric matrix,  $\bar{\mathbf{a}}$  admits a unique symmetric square root, and we have

$$\bar{J}(p, q) = \frac{1}{2}p \cdot \bar{\mathbf{a}}p + \frac{1}{2}q \cdot \bar{\mathbf{a}}^{-1}q - p \cdot q = \frac{1}{2}|\bar{\mathbf{a}}^{1/2}p - \bar{\mathbf{a}}^{-1/2}q|^2.$$

## 3.4 Quantitative homogenization for the Dirichlet Problem

In this section, we first deduce (in subsection 3.4.1) the convergence of  $J$ -maximizers from the convergence of the energy  $J$  itself, using the link between derivatives of the quadratic form  $J$  and average of the maximizers on sub-cubes of intermediate sizes. Proposition 3.10 gives an interesting bound for the maximizers, and we conclude by using the link between  $J$ -maximizers and solutions of the Dirichlet problem.

### 3.4.1 Convergence of $J$ maximizers

In this subsection, we use the multiscale Poincaré inequality (Proposition 3.10) to prove estimate, given  $p, q \in \mathbb{R}^d$ , on the convergence of  $S(\cdot, \square_n, p, q)$  as  $n \rightarrow \infty$ , then deduce those of  $w(\cdot, \square_n, p, q)$ . For convenience, we define

$$\mathfrak{E}(U) := \sup_{p, q \in B_1} |J(U, p, q) - \bar{J}(p, q)|,$$

which measures the rate of convergence of  $J$ . We also introduce the asymptotic average

$$\bar{S}(p, q) := \bar{\mathbf{a}}^{-1}q - p.$$

Note that  $\bar{S} = \nabla_q \bar{J}$  and therefore, by (3.1.39) and the fact that  $J$  and  $\bar{J}$  are quadratic, we have, for every  $p, q \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned} |\bar{S}(p, q) - \langle S(\cdot, U, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(U)}| &= |\nabla_q \bar{J}(p, q) - \nabla_q J(U, p, q)| \\ &\leq C(|p| + |q|) \mathfrak{E}(U). \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

We also have the similar result :

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{a}}\bar{S}(p, q) - \langle \mathbf{a}S(\cdot, U, p, q) \rangle_{\mathcal{E}^+(U)}| &= |\nabla_p \bar{J}(p, q) - \nabla_p J(U, p, q)| \\ &\leq C(|p| + |q|) \mathfrak{E}(U). \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

The two last inequalities provide estimates of the spatial averages of  $S(\cdot, U, p, q)$  and  $\mathbf{a}S(\cdot, U, p, q)$  involving the random variable  $\mathfrak{E}(U)$ . Applying Proposition 3.10 together with this estimate gives the following proposition :

**Proposition 3.20** (Convergence of  $(S, \mathbf{a}S)$ ). *There exists  $C(d, \lambda) < \infty$  such that, for every  $p, q \in B_1$  and  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\begin{aligned} 3^{-n} \|S(\cdot, \square_n, p, q) - \bar{S}(p, q)\|_{\underline{H}^{-1}(\mathcal{E}^+(\square_n))} \\ \leq C 3^{-n} + C \sum_{m=0}^{n-1} 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathfrak{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

and

$$\begin{aligned} 3^{-n} \|\mathbf{a}S(\cdot, \square_n, p, q) - \bar{\mathbf{a}}\bar{S}(p, q)\|_{\underline{H}^{-1}(\mathcal{E}^+(\square_n))} \\ \leq C 3^{-n} + C \sum_{m=0}^{n-1} 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathfrak{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

**Proof.** We fix  $p, q \in B_1$  and in the following, the dependence on these variables will be implicit. According to Proposition 3.10,

$$\begin{aligned} \|S(\cdot, \square_n) - \bar{S}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq C \|S(\cdot, \square_n) - \bar{S}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \\ + C \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |\langle S(\cdot, \square_n) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} - \bar{S}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

We can estimate the first term of the right side using that

$$\|S(\cdot, \square_n) - \bar{S}\|_{\underline{L}^2(\square_n)} \leq \|S(\cdot, \square_n)\|_{\underline{L}^2(\square_n)} + |\bar{S}| \leq C.$$

We then give an estimate of the second term. By the triangle inequality, (3.4.1) and Lemma 3.16,

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |\langle S(\cdot, \square_n) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} - \bar{S}|^2 \\ \leq 2 \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \left( |\langle S(\cdot, z + \square_m) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} - \bar{S}|^2 + \|S(\cdot, \square_n) - S(\cdot, z + \square_m)\|_{\underline{L}^2(\mathcal{E}^+(z + \square_m))}^2 \right) \\ \leq C \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} \mathfrak{E}(z + \square_m) + C \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (J(z + \square_m) - J(\square_n)) \\ \leq C \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathfrak{E}(z + \square_m) + \mathfrak{E}(\square_n)). \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} |\langle S(\cdot, \square_n) \rangle_{\mathcal{E}^+(z + \square_m)} - \bar{S}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( C \mathfrak{E}(\square_n) + |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathfrak{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C \sum_{m=0}^{n-1} 3^m \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathfrak{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Combining the above yields (3.4.3). With the same arguments, using (3.4.2) instead of (3.4.1), we obtain inequality (3.4.4).  $\square$

Now that we have estimates (3.4.3) and (3.4.4), in which the right side is expressed in terms of the quantities  $\mathfrak{E}(z + \square_m)$ , we are led to an estimate of this. This immediately follows from Theorem 3.12. We can notice that except for this argument, we never use any result of probability theory in this section.

**Proposition 3.21.** *There exists  $\beta(d, \lambda)$  and, for every  $s \in (0, d)$ , a constant  $C(s, d, \lambda) < \infty$  such that, for every  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\sum_{m=0}^{n-1} 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathfrak{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 3^{-n\beta(d-s)} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ns}). \quad (3.4.5)$$

**Proof.** Fix  $s' := \frac{1}{3}(d-s)$  and  $s'' := s + \frac{2}{3}(d-s)$  satisfying  $s < s' < s'' < d$  with equally sized gaps between these numbers. By Theorem 3.12 and results on the  $\mathcal{O}_s$ -notation (for example see (2.1.20)), we have

$$|\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathfrak{E}(z + \square_m)) \leq C 3^{-m\beta(d-s'')} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ms''}).$$

We apply inequality (3.3.27) to obtain

$$\left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathfrak{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 3^{-m\beta(d-s'')/2} + \mathcal{O}_1(C 3^{m\beta(d-s'')/2 - ms''}).$$

It follows that there exists a constant  $\beta$ , (which may be smaller than in the previous line) such that

$$\left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathfrak{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 3^{-m\beta(d-s')} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ms'}).$$

Since the left side of the previous inequality is bounded by  $C$ , applying [4, Lemma A.3] we have

$$\left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathfrak{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 3^{-m\beta(d-s')} + \mathcal{O}_d(C 3^{-ms'/d}).$$

Given that  $s'/d \leq 1 - c$ , an other application of [4, Lemma A.4] gives

$$\sum_{m=0}^{n-1} 3^{m-n} \left( |\mathcal{Z}_m|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{Z}_m} (\mathfrak{E}(z + \square_m)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 3^{-n\beta(d-s')} + \mathcal{O}_d(C 3^{-ns'/d}).$$

We conclude that for any nonnegative random variable  $X$ ,

$$X \leq C 3^{-n\beta(d-s')} + \mathcal{O}_d(C 3^{-ns'/d}) \implies X \leq C 3^{-n\beta(d-s)} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ns}), \quad (3.4.6)$$

where in the second occurrence  $\beta(d, \lambda)$  is eventually smaller in the second inequality than in the first. Indeed, we have

$$\begin{aligned} X &\leq X + 3^{-n\beta(d-s)(d-1)} \leq 3^{n\beta(d-s)(d-1)} \left( X + 3^{-n\beta(d-s)} \right)^d \\ &\leq C 3^{n\beta(d-s)(d-1)} \left( X^d + 3^{-n\beta(d-s')d} \right) \\ &\leq C 3^{n\beta(d-s)(d-1)} \left( C 3^{-n\beta(d-s)d} + \mathcal{O}_1(C 3^{-ns'}) \right), \end{aligned}$$

under the assumption that  $\beta$  is sufficiently small to have  $\beta(d-s)(d-1) \leq s' - s$ , which is satisfied for  $\beta \leq 1/3$  we get

$$X \leq C3^{-n\beta(d-s)} + \mathcal{O}_1(C3^{-ns}).$$

Therefore, the proof of (3.4.6) and of the Proposition 3.21 is completed.  $\square$

Combining respectively (3.4.3) and (3.4.4) with Proposition 3.21, we obtain

$$3^{-n} \|S(\cdot, \square_n, p, q) - \bar{S}(p, q)\|_{\underline{H}^{-1}(\mathcal{E}^+(\square_n))} \leq C3^{-n\beta(d-s)} + \mathcal{O}_1(C3^{-ns}),$$

and

$$3^{-n} \|\mathbf{a}S(\cdot, \square_n, p, q) - \bar{\mathbf{a}}\bar{S}(p, q)\|_{\underline{H}^{-1}(\mathcal{E}^+(\square_n))} \leq C3^{-n\beta(d-s)} + \mathcal{O}_1(C3^{-ns}).$$

### 3.4.2 Conclusion

In this subsection, we obtain an homogenization result for the finite-volume correctors. Although the term ‘‘corrector’’ usually means, in stochastic homogenization, the difference between the solution in  $\mathbb{Z}^d$  and an affine function, it will, in our case, denote an approximation of the correctors on finite subsets of  $\mathbb{Z}^d$ , in particular the increasing sequence of triadic cubes  $\square_n$ . Since we already obtained estimates for the convergence of  $S(\square_n, p, 0)$ , which according to Remark 3.1.31 corresponds to the gradient of the solution of the Dirichlet problem under affine boundary condition.

We notice that  $S(\cdot, \square_n, e, 0) = \nabla w(\cdot, \square_n, e, 0)$ , where by (3.1.13),  $S(\cdot, \square_n, e, 0) \in \mathcal{S}(\square_n)$  and  $w(\cdot, \square_n, e, 0) \in \mathcal{A}(\square_n)$ , moreover,  $w(\cdot, \square_n, e, 0) \in \ell_e + \mathcal{C}_0(\square_n^+)$ , and we recall that

$$\phi_{e,n}(x) := w(\cdot, \square_n, e, 0) - e \cdot x.$$

After (3.4.3) and (3.4.4) combined with Proposition 3.21, we conclude that

$$3^{-n} \|\nabla \phi_{e,n}\|_{\underline{H}^{-1}(\mathcal{E}(\square_n))} \leq C3^{-n\beta(d-s)} + \mathcal{O}_1(C3^{-ns}),$$

and

$$3^{-n} \|\mathbf{a}(e + \nabla \phi_{e,n}) - \bar{\mathbf{a}}e\|_{\underline{H}^{-1}(\mathcal{E}(\square_n))} \leq C3^{-n\beta(d-s)} + \mathcal{O}_1(C3^{-ns}).$$

This completes the proof of Theorem 3.1.



# Bibliographie

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.
- [2] M. A. Akcoglu and U. Krengel. Ergodic theorems for superadditive processes. *J. reine angew. Math.*, 323(53-67) :106–127, 1981.
- [3] S. Armstrong, A. Bordas, and J.-C. Mourrat. Quantitative stochastic homogenization and regularity theory of parabolic equations.
- [4] S. Armstrong, T. Kuusi, and J.-C. Mourrat. *Quantitative stochastic homogenization and large-scale regularity*. Preliminary version available at <http://perso.ens-lyon.fr/jean-christophe.mourrat/lecturenotes.pdf> (2017).
- [5] S. Armstrong, T. Kuusi, and J.-C. Mourrat. Mesoscopic higher regularity and subadditivity in elliptic homogenization. *Comm. Math. Phys.*, 347(2) :315–361, 2016.
- [6] S. Armstrong, T. Kuusi, and J.-C. Mourrat. The additive structure of elliptic homogenization. *Invent. Math.*, 208(3) :999–1154, 2017.
- [7] S. N. Armstrong and J.-C. Mourrat. Lipschitz regularity for elliptic equations with random coefficients. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 219(1) :255–348, 2016.
- [8] S. N. Armstrong and C. K. Smart. Quantitative stochastic homogenization of convex integral functionals. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(2) :423–481, 2016.
- [9] G. Bal, J. Garnier, S. Motsch, and V. Perrier. Random integrals and correctors in homogenization. *Asymptotic Analysis*, 59(1-2) :1–26, 2008.
- [10] P. Bella, A. Chiarini, and B. Fehrman. A Liouville theorem for stationary and ergodic ensembles of parabolic systems. Preprint, arXiv :1706.03440.
- [11] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [12] M. Biskup. Recent progress on the random conductance model. *Probab. Surveys*, 8 :294–373, 2011.
- [13] H. Brézis and I. Ekeland. Un principe variationnel associé à certaines équations paraboliques. Le cas indépendant du temps. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 282(17) :Aii, A971–A974, 1976.
- [14] H. Brézis and I. Ekeland. Un principe variationnel associé à certaines équations paraboliques. Le cas dépendant du temps. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 282(20) :Ai, A1197–A1198, 1976.

- [15] G. Dal Maso and L. Modica. Nonlinear stochastic homogenization. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 144 :347–389, 1986.
- [16] G. Dal Maso and L. Modica. Nonlinear stochastic homogenization and ergodic theory. *J. Reine Angew. Math.*, 368 :28–42, 1986.
- [17] A. Dembo and T. Funaki. *Lectures on probability theory and statistics*, volume 1869 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Lectures from the 33rd Probability Summer School held in Saint-Flour, July 6–23, 2003, Edited by Jean Picard.
- [18] I. Ekeland and R. Temam. *Convex analysis and variational problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford ; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976. Translated from the French, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 1.
- [19] L. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [20] S. Fitzpatrick. Representing monotone operators by convex functions. In *Workshop/Miniconference on Functional Analysis and Optimization (Canberra, 1988)*, volume 20 of *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, pages 59–65. Austral. Nat. Univ., Canberra, 1988.
- [21] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, volume 19. Walter de Gruyter, 2010.
- [22] N. Ghoussoub. *Self-dual partial differential systems and their variational principles*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2009.
- [23] N. Ghoussoub and L. Tzou. A variational principle for gradient flows. *Math. Ann.*, 330(3) :519–549, 2004.
- [24] G. Giacomin. Limit theorems for random interface models of Ginzburg-Landau  $\nabla\phi$  type. In *Stochastic partial differential equations and applications (Trento, 2002)*, volume 227 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 235–253. Dekker, New York, 2002.
- [25] M. Giaquinta and G. Modica. Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems. *J. Reine Angew. Math.*, 311/312 :145–169, 1979.
- [26] M. Giaquinta and M. Struwe. On the partial regularity of weak solutions of nonlinear parabolic systems. *Math. Z.*, 179(4) :437–451, 1982.
- [27] A. Gloria, S. Neukamm, and F. Otto. Quantification of ergodicity in stochastic homogenization : optimal bounds via spectral gap on Glauber dynamics. *Invent. Math.*, 199(2) :455–515, 2015.
- [28] A. Gloria and F. Otto. An optimal variance estimate in stochastic homogenization of discrete elliptic equations. *Ann. Probab.*, 39(3) :779–856, 2011.
- [29] A. Gloria and F. Otto. An optimal error estimate in stochastic homogenization of discrete elliptic equations. *Ann. Appl. Probab.*, 22(1) :1–28, 2012.
- [30] A. Gloria and F. Otto. The corrector in stochastic homogenization : Near-optimal rates with optimal stochastic integrability, preprint, 55 pp., arXiv :1510.08290 (October 2015).
- [31] A. Gloria and F. Otto. The corrector in stochastic homogenization : optimal rates, stochastic integrability, and fluctuations, preprint, 114 pp., arXiv :1510.08290v3 (May 2016).
- [32] B. Helffer and J. Sjöstrand. On the correlation for kac-like models in the convex case. *Journal of Statistical Physics*, 74(1) :349–409, Jan 1994.

- [33] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik. *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Translated from the Russian by G. A. Yosifian.
- [34] N. V. Krylov. Some properties of monotone mappings. *Litovsk. Mat. Sb.*, 22(2) :80–87, 1982.
- [35] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.
- [36] G. C. Papanicolaou and S. R. S. Varadhan. Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients. In *Random fields, Vol. I, II (Esztergom, 1979)*, volume 27 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 835–873. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [37] M. Parviainen. Global gradient estimates for degenerate parabolic equations in nonsmooth domains. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 188(2) :333–358, 2009.
- [38] S. Sheffield. Random surfaces. *Astérisque*, (304) :vi+175, 2005.
- [39] J. Sjöstrand. Correlation asymptotics and witten laplacians. *St. Petersburg Math. J.*, 8 :123–147, 1997.
- [40] R. Temam. *Navier-Stokes equations*, volume 2 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, revised edition, 1979. With an appendix by F. Thomasset.
- [41] Y. Velenik. Localization and delocalization of random interfaces. *Probab. Surv.*, 3 :112–169, 2006.
- [42] D. V. Widder. Series expansions of solutions of the heat equation in  $n$  dimensions. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 55 :389–409, 1961.



---

## Homogénéisation stochastique quantitative

---

Cette thèse porte sur l'homogénéisation quantitative d'équations aux dérivées partielles paraboliques, et de problèmes elliptiques discrets.

Dans l'introduction, nous voyons comment de tels problèmes, même lorsque les coefficients sont déterministes, résultent d'un modèle aléatoire. Nous introduisons alors l'homogénéisation : que se passe-t-il lorsque les coefficients eux-mêmes sont aléatoires, est-il possible de considérer qu'un environnement présentant des inhomogénéités sur de très petites échelles se comporte d'une manière proche d'un environnement fictif qui serait homogène ? Nous donnons ensuite une interprétation de cette question en terme de marche aléatoire en conductances aléatoires, puis donnons une idée des outils utilisés dans les preuves des deux chapitres suivants.

Dans le chapitre 2, nous démontrons un résultat d'homogénéisation quantitative pour une équation parabolique — l'équation de la chaleur par exemple — dans un environnement admettant des coefficients aléatoires et dépendant du temps. La méthode utilisée consiste à considérer les solutions d'un tel problème comme optimiseurs de fonctionnelles qui seront définies au préalable, puis d'utiliser la propriété cruciale de sous-additivité de ces quantités, afin d'en déduire une convergence puis un résultat de concentration, qui permettra d'en déduire une vitesse de convergence des solutions vers la solution du problème homogénéisé.

Dans le chapitre 3, nous adaptons ces méthodes pour un problème elliptique sur le graphe  $\mathbb{Z}^d$ .

**Mots-clefs.** Homogénéisation stochastique, équations aux dérivées partielles paraboliques, équations aux dérivées partielles elliptiques, méthodes variationnelles, énergies sous-additives.

---

## Quantitative stochastic homogenization

---

This thesis deals with quantitative stochastic homogenization of parabolic partial differential equations, and discrete elliptic problems.

In the introduction, we see how such problems can come from random models, even when the coefficients are deterministic. Then, we introduce homogenization : what happens if the coefficients themselves are random ? Could we consider that an environment with microscopical random heterogeneities behaves, at big scale, as a fictitious deterministic homogeneous environment ? Then, we give a random walk in random environment interpretation and the sketch of the proofs in the two following chapters.

In chapter 2, we prove a quantitative homogenization result for parabolic PDEs, such as heat equation, in environment admitting time and space dependent coefficients. The method of the proof consists in considering solutions of such problems as minimizers of variational problems. The first step is to express solutions as minimizers, and then to use the capital property of subadditivity of the corresponding quantities, in order to deduce convergence and concentration result. From that, we deduce a rate of convergence of the actual solutions to the homogenized solution.

In chapter 3, we adapt these methods to a discrete elliptic problem on the lattice  $\mathbb{Z}^d$ .

**Keywords.** Stochastic homogenization, parabolic PDE, elliptic PDE, variational methods, subadditive quantities, functional inequalities