Repérage en coordonnées cartésiennes

On appelle $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ les vecteurs unitaires d'un repère cartésien orthonormé direct centré en O. Ils permettent de positionner n'importe quel point dans l'espace. Par exemple, le point M peut se repérer par rapport au point O par le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, où x, y et z sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

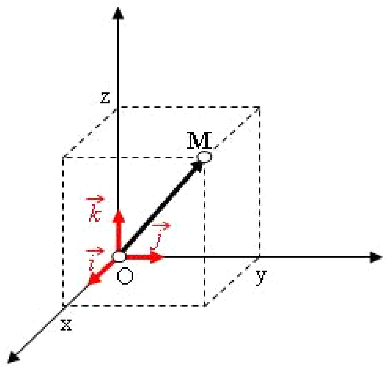

FIG. 1 – Coordonnées cartésiennes

Définitions :
- Repère orthonormé direct : Repère dont les vecteurs de base sont orthogonaux les uns aux autres et indiqués les uns par rapport aux autres dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
- Repère cartésien : Repère fixe lié à une origine et disposant de vecteurs de base unitaires qui permettent de repérer un point vis à vis de l'origine.

Exercice 1 : Repérage d'un objet

Choisissez tous ensemble un objet dans la salle. Demandez à deux personnes de se placer à deux endroits différents dans la salle et de donner 3 nombres permettant de repérer l'objet.

Par groupe de quatre, réfléchissez à la marche à suivre pour mettre les deux personnes d'accord si elles ne le sont pas, essayer d'envisager toutes les possibilités.

Après quinze minutes, confrontez les résultats obtenus par les différents groupes. L'enseignant doit ensuite vous indiquer quelle est la démarche habituelle des scientifiques.

Exercice 2 Le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère cartésien orthonormé direct. Le cube ci-dessous est centré à l'origine O. Ses arêtes valent 2 unités et sont parallèles aux vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.

Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y, z des points A, H, r, p, n, c, I, t.

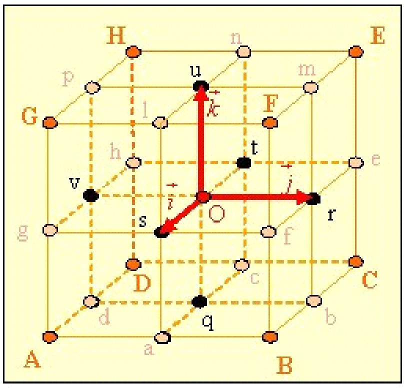

FIG. 2 –

Exercice 3 Le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère cartésien orthonormé direct à deux dimensions. Le cercle ci-dessous est centré à l'origine O, son diamètre vaut 2 unités. Les points O, B et D sont alignés. Les valeurs des angles sont : $\alpha = 30°$, $\beta = -45°$, $\gamma = -120°$ et $\delta = 135°$.

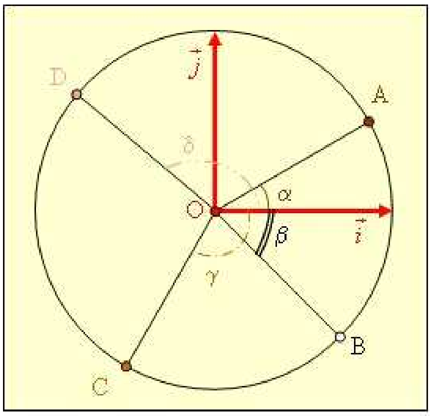

FIG. 3 –

Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y des points A, B, C, D.

Exercice 4 Le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère cartésien orthonormé direct. Le cylindre ci-dessous est centré à l'origine O, son diamètre vaut 2 unités et sa longueur 1 unité. Les points A, B, C et D sont définis par les mêmes angles qu'à l'exercice 2 dans le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y, z des points A', B', C', D'.

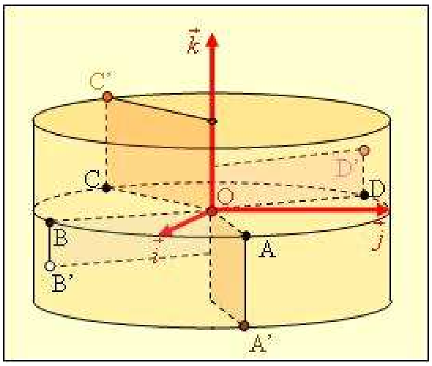

FIG. 4 –

Exercice 5 Le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère cartésien orthonormé direct. La sphère ci-dessous est centrée à l'origine O, son diamètre vaut 2 unités. Les points A, B, C et D sont définis par les mêmes angles qu'à l'exercice 2 dans le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Les angles (latitudes) entre le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et les vecteurs $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$, $\overrightarrow{OD'}$ qui définissent les points A', B', C' et D' sont respectivement : $\lambda_A = 50°$, $\lambda_B = -35°$, $\lambda_C = 20°$ et $\lambda_D = -25°$

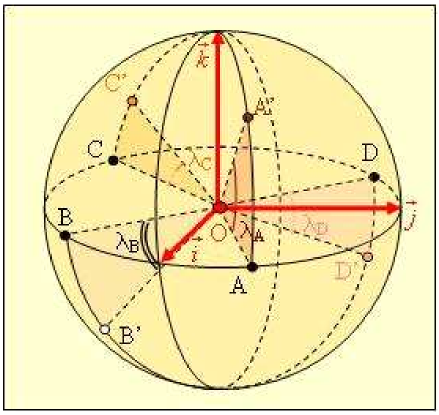

FIG. 5 –

Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y, z des points A', B', C', D'.

Dérivées et intégrales

Définitions :

- Soit $y = f(x)$ une fonction définie et continue au voisinage d'un point $x = x_0$. A un accroissement Δx (positif ou négatif) de la variable correspond un accroissement Δy de la fonction tel que : $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. On appelle **dérivée** de la fonction $f(x)$ au point d'abscisse x_0 la limite, si elle existe, du rapport de l'accroissement Δy de la fonction à l'accroissement Δx de la variable lorsque ce dernier tend vers zéro :
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
- Quelques règles à respecter :
Si $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, alors :

  $(u + v)' = u' + v'$

  $(uv)' = u'v + uv'$

  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- Interprétation géométrique de la dérivée : Soient les points $\mathrm{M}(x, f(x))$ et $\mathrm{M}'(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ appartenant au graphe (C) de f et la tangente MT à la courbe au point M. A l'accroissement Δx de la variable x correspond l'accroissement Δy de la fonction représenté par HM'.

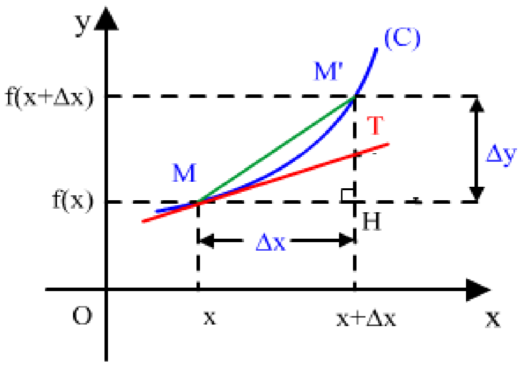

FIG. 6 – Interprétation géométrique de la dérivée

- Soit f une fonction bornée sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ (a et b désignant deux réels tels que $a \leq b$). Soit F une primitive de f. On appelle **intégrale définie** de $f(x)$ sur $[a, b]$, le nombre I égal à $F(b) - F(a)$. On note
$$I = \int_a^b f(x)dx$$
Le nombre I représente la somme des surfaces de la zone comprise entre la courbe (C) représentative de la fonction f, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe $\mathrm{O}x$,

avec un signe "+" si la courbe est au-dessus de l'axe Ox, avec un signe "-" si (C) est en-dessous (cf. graphe ci-dessous, $I = A - A'$).

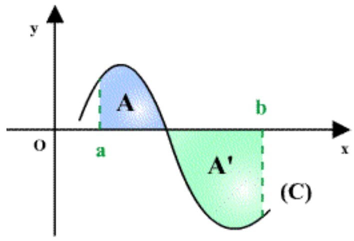

FIG. 7 – Fonction positive et négative sur un intervalle $[a, b]$

Exercice 1 Le graphe ci-dessous permet de connaître la position s(t) d'un marcheur en fonction du temps sur sa trajectoire. Il fait un aller-retour sur le même chemin mais, en fonction du dénivelé, marche plus ou moins vite.

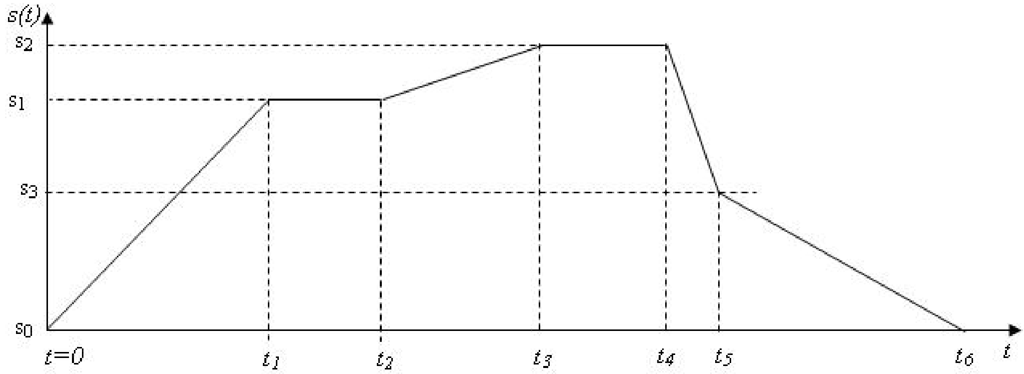

FIG. 8 –

Vous prendrez les valeurs suivantes pour les applications numériques :
$t_1 = 1$h, $t_2 = 1$h 30min, $t_3 = 2$h 14min, $t_4 = 2$h 48min, $t_5 = 3$h, $t_6 = 4$h 10min
$s_0 = 0$m, $s_1 = 4$km, $s_2 = 4$km 850m et $s_3 = 2$km 330m.

Pour les intervalles de temps suivants : de t_0 à t_1, de t_1 à t_2, de t_2 à t_3, de t_3 à t_4, de t_4 à t_5 et de t_5 à t_6,

1. Déterminez la vitesse du marcheur.
2. Déterminez les équations de droites en considérant que $s(t)$ est donné en km et t en h. $s(t) = at + b$, donnez a et b. Puis calculez la dérivée de $s(t)$ par rapport au temps.
3. Que constatez-vous sur la valeur de la vitesse et la valeur absolue de la dérivée ?

Exercice 2 Le schéma ci-dessous montre un ressort vertical sur lequel une masse a été accrochée. Quelqu'un comprime le ressort de 3 cm puis le lâche. Le ressort se met alors à osciller autour de sa position d'équilibre.

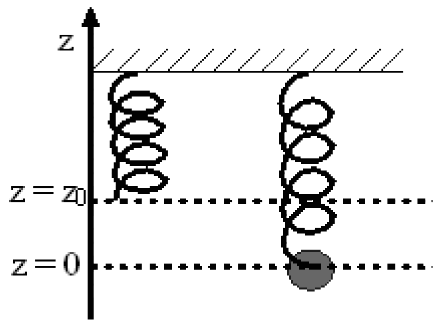

FIG. 9 –

Le graphe ci-dessous permet de connaître la position z de la masse au bout du ressort en fonction du temps.

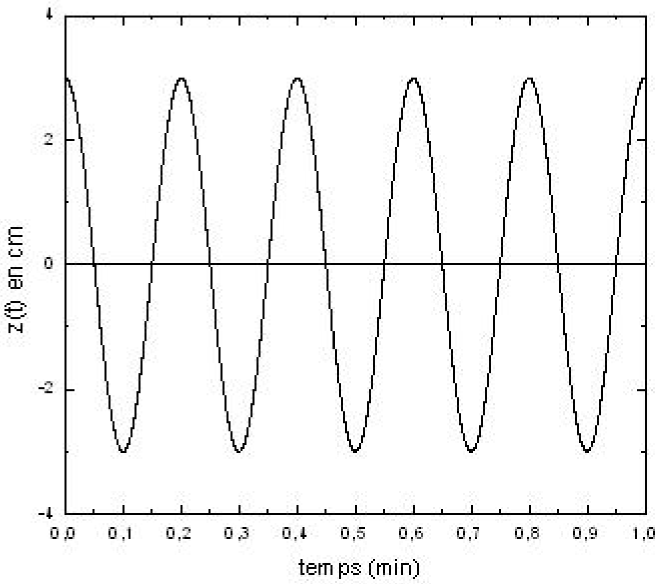

FIG. 10 –

1. Déterminer l'équation qui permet de décrire la position de la masse en fonction du temps en considérant z en cm et t en min.
2. Déduisez-en la vitesse qui anime cette masse en fonction du temps.
3. Application numérique : Quelle est la position et la vitesse de la masse après 18 s ? Après 21 s ?

Exercice 3 Une voiture sur l'autoroute accélère de façon constante pour atteindre une vitesse de 130 km/h. Elle reste à cette allure tout le long de son trajet de t_1 à t_2 puis décélère de façon constante lorsqu'elle arrive près du péage. Le graphe ci-dessous représente le profil de vitesse en fonction du temps de la voiture. La vitesse initiale est nulle ($v_0 = 0$ km/h), et la voiture met 1/4 h ($t_1 = 15$ min) pour atteindre les 130 km/h ($v_1 = 130$ km/h).

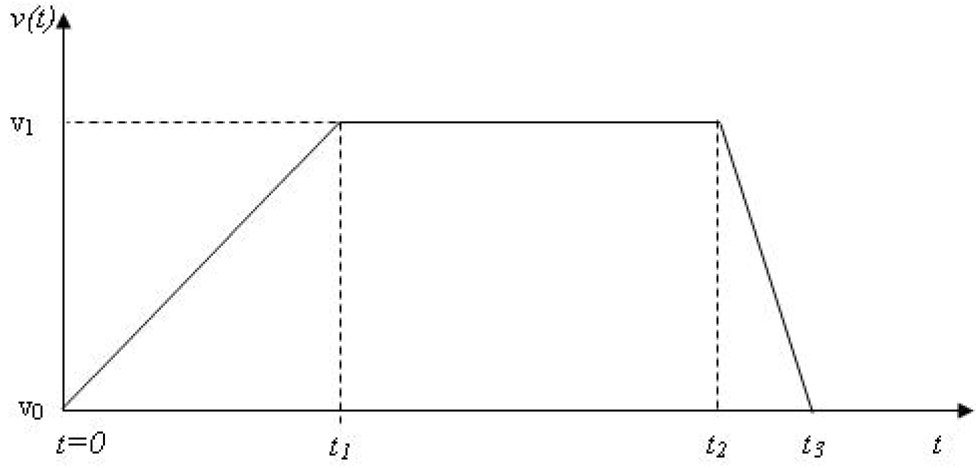

FIG. 11 –

Elle reste ensuite 1 h ($t_2 = 1$ h 15 min) à cette allure puis décélère en 2 min ($t_3 = 1$ h 17 min). Pour les intervalles de temps suivants : de t_0 à t_1, de t_1 à t_2, de t_2 à t_3,

1. Exprimez pour chaque tronçon la vitesse de la voiture en fonction du temps.
2. Déterminez pour chaque tronçon la primitive de cette vitesse en fonction du temps. Déduisez-en la distance totale parcourue.
3. Calculez de façon géométrique l'intégrale de la vitesse entre t_0 et t_3 et comparez avec la distance totale parcourue par la voiture. Conclusion ?

Vecteurs

On peut se représenter un vecteur libre comme une flèche dont l'emplacement dans le plan n'a pas d'importance, seules comptent sa norme, sa direction et son sens. La norme d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ se note $||\overrightarrow{v}||$ et correspond à la longueur du vecteur. Sa direction est donnée par deux angles repérés sur deux plans définissant l'espace. Par exemple, dans le cas d'un repère cartésien orthonormé direct comme ci-dessous (figure 1), le vecteur $\overrightarrow{u}$ est repéré dans le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par l'angle α et dans le plan $(O, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{k})$ par l'angle β, $\overrightarrow{u'}$ étant le projeté de $\overrightarrow{u}$ dans le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On peut aussi expliciter un vecteur dans un repère en donnant

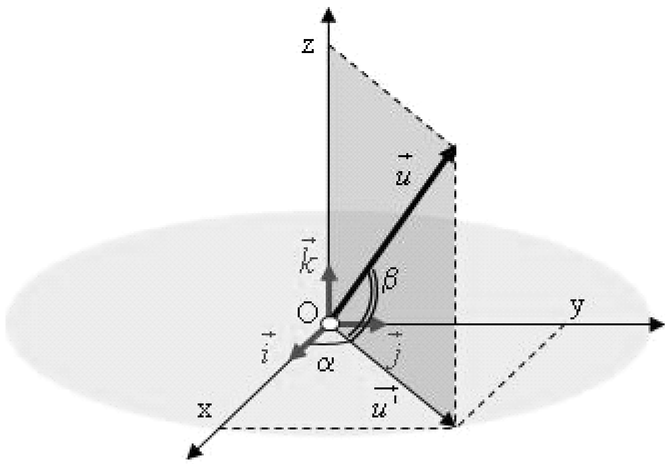

Fig. 12 –

ses composantes selon les 3 dimensions du repère. On peut voir les choses de la manière suivante : si l'origine du vecteur est à l'origine du plan comme indiqué dans la figure 1 alors les composantes du vecteur sont données par les coordonnées du point pointé par le vecteur. Dans ce cas, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ s'expriment de la manière suivante :

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{u'} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$$

Lorsqu'on connaît les composantes d'un vecteur, la relation suivante permet de déterminer sa norme :

$$||\overrightarrow{u'}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Somme de vecteurs Pour additionner deux ou plusieurs vecteurs, il suffit de les mettre les uns à la suite des autres. La relation de Chasles ci-dessous permet de trouver la somme de vecteurs exprimés en bi-points :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

– Pour connaître la norme, il faut passer par le carré du vecteur :

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}$$

– Pour résoudre une somme de deux vecteurs et déterminer la direction de la résultante on peut utiliser la loi des sinus car les trois vecteurs se trouvent dans le même plan. Sur la figure ci-dessous, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, les trois vecteurs forment un triangle et on peut appliquer la loi des sinus :

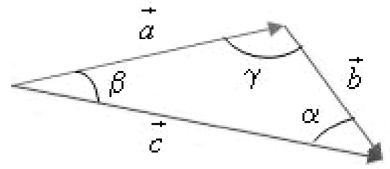

FIG. 13 –

$$\frac{||\overrightarrow{a}||}{\sin\alpha} = \frac{||\overrightarrow{b}||}{\sin\beta} = \frac{||\overrightarrow{c}||}{\sin\gamma}$$

– Pour plusieurs vecteurs, le plus simple est de déterminer les composantes de chaque vecteur en utilisant bien sûr le même système de coordonnées et faire la somme de chaque composante. La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donne le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ re-

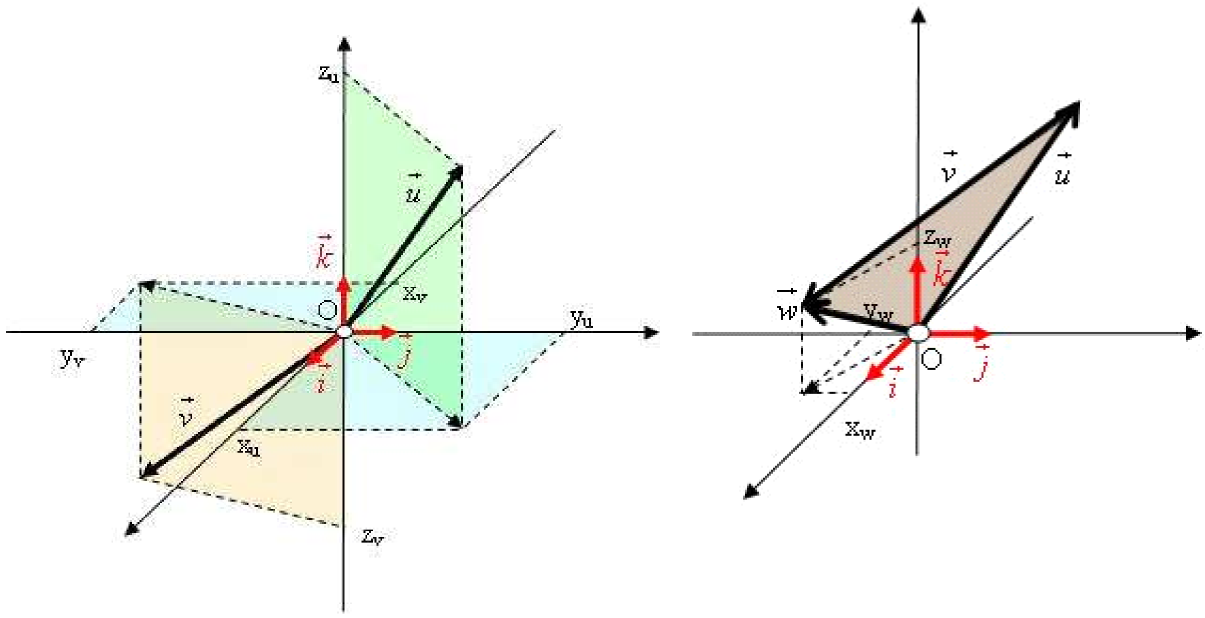

FIG. 14 –

présenté sur la figure 14. Si les composantes des vecteurs sont notées comme ci-dessous,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= x_u\overrightarrow{i} + y_u\overrightarrow{j} + z_u\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{v} &= x_v\overrightarrow{i} + y_v\overrightarrow{j} + z_v\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{w} &= x_w\overrightarrow{i} + y_w\overrightarrow{j} + z_w\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

Alors nous aurons : $x_w = x_u + x_v$, $y_w = y_u + y_v$, $z_w = z_u + z_v$.

Produit scalaire Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, est un nombre (scalaire) égal au produit des normes des deux vecteurs par le cosinus de l'angle qu'ils forment $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$$

En posant x_u, y_u, z_u et x_v, y_v, z_v les composantes respectives de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la base orthonormée $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$), on montre que le produit scalaire de ces deux vecteurs est le nombre défini par la relation :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

Composantes de vecteurs

Exercice 1 Le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère cartésien orthonormé direct. Le cube ci-dessous est centré à l'origine O. Ses arêtes valent 2 unités et sont parallèles aux vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.

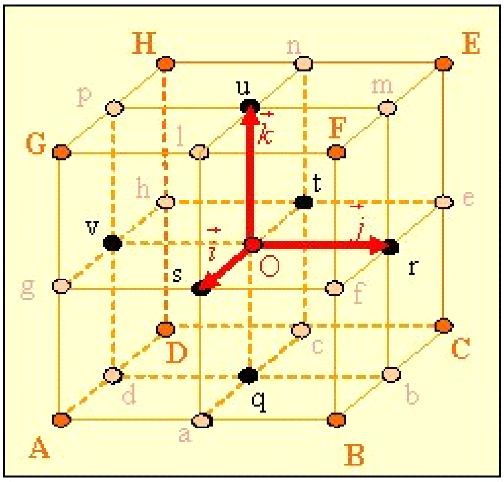

FIG. 15 –

Exprimer les composantes (x, y, z) des vecteurs indiqués ci-après : $\overrightarrow{Ac}$, $\overrightarrow{Ht}$,$\overrightarrow{nl}$, $\overrightarrow{pr}$.

Exercice 2 Le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère cartésien orthonormé direct à deux dimensions. Le cercle ci-dessous est centré à l'origine O, son diamètre vaut 2 unités. Les points O, B et D sont alignés. Les valeurs des angles sont : $\alpha = 30°$, $\beta = -45°$, $\gamma = -120°$ et $\delta = 135°$. Les vecteurs $\overrightarrow{\rho_B}$ et $\overrightarrow{\theta_B}$ sont les vecteurs unitaires de la base polaire associée au point B.

1. Déterminez les composantes (x, y) des vecteurs unitaires de la base polaire associée aux points A, B, C et D. Donnez l'expression générale de ces vecteurs unitaires.

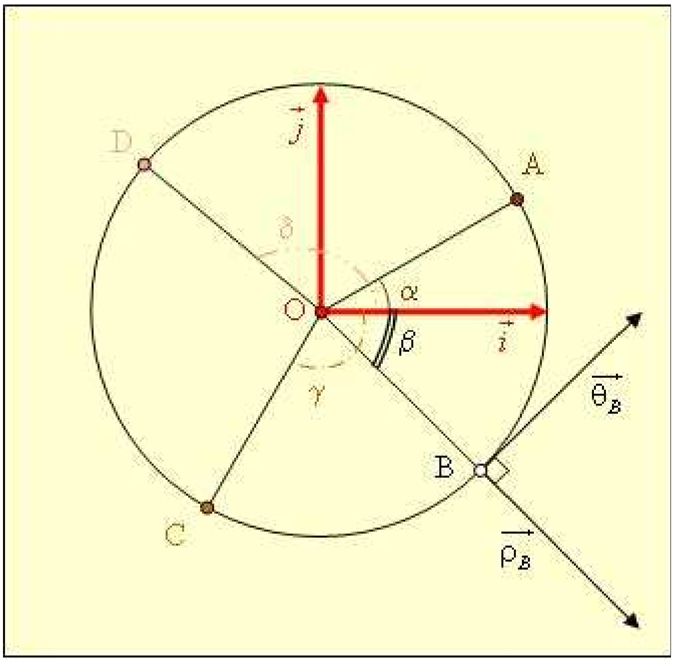

FIG. 16 –

2. Exprimez ensuite les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ en fonction de $\vec{\rho_B}$ et $\vec{\theta_B}$.

Sommes de vecteurs

Exercice 1 Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère cartésien orthonormé direct. Le cube (voir fig. 15) est centré à l'origine O. Ses arêtes valent 2 unités et sont parallèles aux vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Exprimer les composantes (x, y, z) des vecteurs indiqués ci-après :

$$\vec{u} = \overrightarrow{Ac} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{pr}$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{Ht} + 3\overrightarrow{nl} + \overrightarrow{Aa}$$
$$\vec{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{Ft} + \frac{3}{2}\overrightarrow{va} + 4\overrightarrow{qH}$$

Exercice 2 C'est le premier jour d'Escartefigues dans son rôle de capitaine de ferry-boat (ferry-boîte !) ! Le courant de l'eau a une vitesse de 4 nœuds (8 km/h) parallèle au Vieux-Port. Escartefigues choisit de mettre la barre perpendiculaire au Vieux-Port pour "aller droit en face" chez César et il fixe sa vitesse à 4 nœuds ! En fait, il se retrouve au Pharo (ou presque !) en 3 min, pourquoi ?

1. Déterminez la vitesse du bateau par rapport à la côte.
2. Déterminez l'angle que fait le bateau par rapport à la côte.

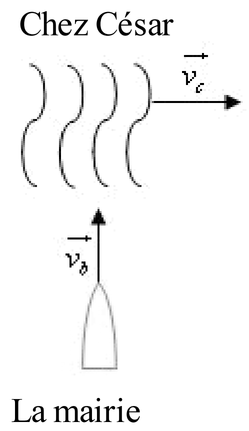

FIG. 17 –

3. Concluez.

Exercice 3 Maintenant, Escartefigues connaît bien son métier de capitaine de ferry-boat ! Il calcule que : Comme l'eau a un courant de 2 nœuds parallèle au Vieux-Port, il faut qu'il incline sa barre à 120^o par rapport à la côte pour pouvoir conduire à 4 nœuds (vitesse limite dans un port) et arriver en face de la mairie, chez César ! Pourquoi ?

Produit scalaire

Exercice 1 Le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère cartésien orthonormé direct. Le cube (voir fig. 15) est centré à l'origine O. Ses arêtes valent 2 unités et sont parallèles aux vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.

1. Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{Ac}.\overrightarrow{cb}$, $\overrightarrow{dc}.\overrightarrow{cb}$, $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{pr}.\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{On}$, $\overrightarrow{Fu}.\overrightarrow{uq}$, $\overrightarrow{se}.\overrightarrow{ge}$, $\overrightarrow{hs}.\overrightarrow{eq}$.
2. Déterminer les angles suivant : $(\widehat{\overrightarrow{Ac}, \overrightarrow{cb}})$, $(\widehat{\overrightarrow{dc}, \overrightarrow{cb}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DG}})$, $(\widehat{\overrightarrow{pr}, \overrightarrow{AE}})$, $(\widehat{\overrightarrow{GO}, \overrightarrow{On}})$, $(\widehat{\overrightarrow{Fu}, \overrightarrow{uq}})$, $(\widehat{\overrightarrow{se}, \overrightarrow{ge}})$, $(\widehat{\overrightarrow{hs}, \overrightarrow{eq}})$,
3. Calculer la norme des vecteurs : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{Ac} + \overrightarrow{cb}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{dc} + \overrightarrow{cb}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{On}$, $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{Fu} + \overrightarrow{uq}$, $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{se} + \overrightarrow{ge}$, $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{hs} + \overrightarrow{eq}$.