Université de Provence	2011–2012

Mathématiques Générales I

Parcours PEIP

Cours : Fonctions réciproques

1 Fonctions réciproques

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow J$ une fonction définie sur I et dont l'image est contenue dans J.

Définition 1. On dit que f est bijective si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Remarque 1. La fonction f est bijective si elle donne une correspondance "un-à-un" entre les points de I et ceux de J.

Définition 2. Si f est bijective, alors on note f^{-1} la fonction dite "réciproque de f", allant de J vers I et définie, pour tout $y \in J$, par $f^{-1}(y) =$l'unique antécédant de y par f dans I, *i.e.* l'unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Remarque 3. Si f n'est pas bijective, alors f^{-1} n'est pas définie car pour certain point $x \in J$, $f^{-1}(x)$ n'existera pas ou alors aura plusieurs candidats.

Proposition 4. *Si f est bijective, alors*
- *f^{-1} est bijective et on a $(f^{-1})^{-1} = f$;*
- *$\forall x \in I, f^{-1}\big(f(x)\big) = x$;*
- *$\forall y \in J, f\big(f^{-1}(y)\big) = y$;*
- *le graphe de f^{-1} correspond au symétrique de celui de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.*

Proposition 5. *Si f est bijective et continue sur I, alors f^{-1} est continue sur J.*

Proposition 6. *Si f est bijective et dérivable en $x_0 \in I$ avec $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 := f(x_0)$, avec ${f^{-1}}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Démonstration. On commence par remarquer que, puisque f est bijective, f^{-1} l'est aussi et donc que, pour tout $y_1 \neq y_2 \in J$, on a $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$.

Maintenant, pour $y \neq y_0$, on s'intéresse au quotient $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$ et à son comportement quand y tend vers y_0. On fait le changement de variable $x = f^{-1}(y)$. Cela donne $y = f(x)$ et lorsque y tend vers y_0, x tend vers $f^{-1}(y_0) = x_0$ car f^{-1} est continue. Or puisque f est dérivable, on sait que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $f'(x_0) \neq 0$ quand x tend vers x_0. On en déduit que $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ converge et tend vers $\frac{1}{f'(x_0)}$ quand y tend vers y_0. □

Corollaire 7. *Si f est bijective et dérivable sur I et que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J avec $\forall y \in J, {f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$.*

Remarque 8. En cas d'oubli, et si l'on connait ses formules de dérivation, la formule de la dérivé de f^{-1} peut se retrouver en dérivant l'égalité $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$.

2 Quelques exemples

2.1 Fonctions trigonométriques réciproques

2.1.1 La fonction arcsin

La fonction sin n'est évidemment par bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pas même de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$ puisque, par exemple, 0 à tous les multiples de 2π comme antécédents. Par contre, elle le devient si on la restreint à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $y\in[-1,1]$, il n'existe bien qu'un unique réel $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x)=y$. La fonction sin est donc une bijection de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dans l'intervalle $[-1,1]$.

Définition 9. On appelle arcsinus, noté $\arcsin\colon [-1,1]\longrightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction réciproque de la fonction sinus.

Proposition 10. *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et sa dérivée vaut*

$$\forall x\in]-1,1[,\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. C'est une conséquence du corollaire 7. En effet, la fonction est dérivable, et sa dérivée, la fonction cosinus, ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. De plus, on a $\arcsin'(x)=\frac{1}{\cos\left(\arcsin(x)\right)}$. Or $\arcsin(x)$ est égal à l'unique réel θ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\sin(\theta)=x$. Mais $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$, donc $\cos(\theta)=\pm\sqrt{1-\sin^2(\theta)}=\pm\sqrt{1-x^2}$. Or la fonction cos est positive entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, donc $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □

Graphe

2.1.2 La fonction arctan

Cette fois, l'image de la fonction tan couvre bien $\mathbb{R}$ tout entier. Par contre, la fonction n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ pour $k\in\mathbb{Z}$. De plus, pour qu'il n'y ait qu'un seul antécédent, il faut se restreindre à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Définition 11. On appelle arctangente, noté $\arctan\colon\mathbb{R}\longrightarrow\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction réciproque de la fonction tangente.

Proposition 12. *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée vaut*

$$\forall x\in\mathbb{R},\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Graphe

2.2 Fonctions hyperboliques réciproques

2.2.1 La fonction argsh

La fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 13. On appelle argsinus hyperbolique, noté $\operatorname{argsh}\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, la fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique.

Proposition 14. *La fonction* argsh *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée vaut*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Proposition 15. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Démonstration. Une première méthode consiste à dériver le membre de droite, observer qu'on obtient la dérivé de argsh et donc que les deux fonctions ne diffèrent que d'une constante puis enfin remarquer que les deux fonctions s'annulent en 0.

On peut cependant également montrer le résultat directement en se rappelant que, $x_0 \in \mathbb{R}$ étant fix'é, $y := \operatorname{argsh}(x_0)$ est l'unique solution de l'équation $\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x_0$. Cette dernière est équivalente à l'équation $e^y - 2x_0 - e^{-y} = 0$ ou encore $e^{2y} - 2x_0 e^y - 1 = 0$. Autrement dit, e^y est une solution de l'équation polynomiale d'ordre 2 $X^2 - 2x_0 X - 1 = 0$. Or un calcul direct nous dit que les deux seules racines sont $x_0 \pm \sqrt{x_0^2+1}$. Mais e^y est nécessairement positif et $\sqrt{x_0^2+1} > |x_0|$. Donc $e^y = x_0 + \sqrt{x_0^2+1}$ et $y = \ln\left(x_0 + \sqrt{x_0^2+1}\right)$ □

Graphe

2.2.2 La fonction argch

La fonction ch est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$.

Définition 16. On appelle argcosinus hyperbolique, noté $\operatorname{argch}\colon [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$, la fonction réciproque de la fonction cosinus hyperbolique.

Proposition 17. *La fonction* argch *est dérivable sur* $]1, +\infty[$ *et sa dérivée vaut*

$$\forall x \in]1, +\infty[, \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Proposition 18. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

Graphe

2.2.3 La fonction argth

La fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.

Définition 19. On appelle argtangente hyperbolique, noté $\operatorname{argth}\colon]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction réciproque de la fonction tangente hyperbolique.

Proposition 20. *La fonction* argth *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et sa dérivée vaut*

$$\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Proposition 21. *Pour tout* $x \in]-1, 1[$*, on a* $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Graphe