

**Mathématiques pour la biologie** (math39)

*Licence Biologie - Université Aix Marseille*

Feuille 3 : lois de probabilités et variables aléatoires

**Exercice 1/**

Dans le cas du gène déterminant le groupe sanguin, on considère la classification ABO. Si les deux parents d'un enfant sont du groupe AB (un allèle A et un allèle B), le croisement de leurs allèles peut conduire au tableau suivant :

Mère	→	A	B
Père	↓		
	A	AA	AB
	B	BA	BB

On suppose que chaque allèle peut s'exprimer avec la même chance chez l'enfant.

1. Quelle est la probabilité que l'enfant soit du groupe "A" (homozygote avec deux fois l'allèle "A") ?
2. Quelle est la probabilité que l'enfant soit du groupe "AB" (hétérozygote avec un allèle "A" et un allèle "B") ? Dans ce cas, quelle est la probabilité que l'allèle "A" provienne du père ?
3. Refaire ces calculs si l'allèle "A" avait deux fois plus de chances d'être transmis que l'allèle "B".
4. Comment pourrait-on vérifier cette dernière hypothèse ?

On considère deux enfants dont les groupes sanguins sont issus du schéma précédent. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient homozygotes ? Même question avec trois enfants.

**Exercice 2/**

Lorsqu'il est positif, la fiabilité d'un test de grossesse est de 0.90. Sur dix femmes dont le résultat du test est positif, quelle est la probabilité que les dix femmes soient réellement enceintes ? Quelle est la probabilité qu'un moins une ne soit pas enceinte ? Quelle est la probabilité qu'une seule soit enceinte ?

**Exercice 3/**

Pour étudier les effets secondaires d'un nouveau médicament on observe les

réactions de 100 individus volontaires. Les observations sont résumées dans le tableau suivant :

Population	Pas d'effet	Effet secondaire
Femme	12	30
Homme	18	40

1. En supposant que ces résultats peuvent s'étendre à toute la population, quelle est la probabilité d'avoir un effet secondaire chez la femme ? Chez l'homme ?
2. Ecrire ces probabilités en utilisant le conditionnement.

**Exercice 4/**

Une étude a démontré que sur 100 engelures d'alpinistes, 30 % provoquaient des lésions irréversibles ; et parmi ces 30 %, 5 % entraînaient une amputation. Quelle est la probabilité qu'une engelure provoquant une lésion irréversible mène à l'amputation ? Quelle est la probabilité qu'une engelure ne nécessite pas une amputation ?

**Exercice 5/**

On dispose de séquences d'ADN contenant chacune entre 1000 et 1500 nucléotides. On suppose que ce nombre de nucléotides est uniformément réparti. Quelle est la moyenne du nombre de nucléotides par séquence ? Quelle est sa variance ? Quelle est la probabilité qu'une séquence choisie au hasard contienne plus de 1250 nucléotides ? Entre 1200 et 1300 ?

**Exercice 6/**

Une greffe réalisée sur une souris a une probabilité de succès de  $p = 0.2$ . Quelle est la variable aléatoire associée à cette probabilité ? Calculer la moyenne et la variance de cette variable. Comment évoluent ces paramètres lorsque  $p$  varie ?

**Exercice 7/**

On reprend l'exercice précédent. On réalise deux greffes sur deux souris. Quelle est la loi du succès de ces greffes ? Même question pour dix souris. Quelle est la probabilité de réussite pour les 10 souris simultanément ?

**Exercice 8/**

Les nombres d'interdictions temporaires préventives des baignades sensibles, en cas de pollution prévisible, ont été relevés durant une année sur 105 sites de baignades. Le tableau suivant résume ces observations :

Nbre d'interdictions	Nbre de sites concernés
0	74
1	25
2	5
3	1

On veut modéliser cette distribution par une loi de Poisson de même moyenne. Rappeler la loi théorique. Calculer sa moyenne et sa variance. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune interdiction de baignade ?

**Exercice 9/**

La rupture du chromosome 9 est liée à une forme de leucémie chronique, appelée Leucémie Myéloïde. Le point de rupture de ce chromosome a lieu entre les exons 12 et 16 d'un gène. On note  $L$  la distance entre ces deux exons et on suppose que le point de rupture est distribué continument et uniformément entre ces deux points. Quelle est la loi du point de rupture ? Calculer sa moyenne et sa variance. Quelle est la probabilité que la rupture ait lieu à une distance supérieure à  $L/2$  de l'exon 12 ?

**Exercice 10/**

La longueur des grands brochets mâles capturés au filet maillant sur les frayères de la rivière Bleury (prov. du Québec) était en moyenne de 467 mm avec un écart-type de 47.9 mm (Dumont et Fortin, 1987). Si l'on admet que la longueur des géniteurs capturés suit une distribution normale, quelle est la probabilité de capturer un mâle d'une taille supérieure à 460 mm et inférieure à 480 mm ?

**Exercice 11/**

Les longueurs des bélugas célibataires et des femelles accompagnées d'un petit ont été mesurées à partir de photographies aériennes verticales. Les paramètres des deux échantillons sont les suivants :

	Femelles avec petits	Célibataires
Taille échantillon	109	109
Moyenne observée	402 cm	422 cm
Variance observée	501.7	1412.3

Les deux échantillons sont extraits indépendamment l'un de l'autre et les deux populations sont supposées être normalement distribuées. On suppose également dans l'exercice que les moyennes et les variances observées sont celles de la population totale.

1. Que pensez vous des hypothèses précédentes ?
2. La longueur des bélugas célibataires est-elle plus variable que celle des femelles accompagnées d'un petit ? Interprétez ce résultat.
3. Comment peut-on se ramener à des lois normales normées centrées réduites dans les deux populations ?

### Exercice 12/

La durée de vie en semaine d'une bactérie est modélisée par une loi exponentielle de densité

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\lambda = 1$ . Donner la moyenne et la variance de la durée de vie. Quelle est la probabilité que la durée de vie dépasse une semaine ?

### Exercice 13/

On suppose que les nucléotides  $\{A, C, G, T\}$  se répartissent uniformément le long d'une séquence d'ADN. Combien de mots différents de longueurs 2, 3 peuvent se former ? Quelle est la probabilité d'apparition du mot "AAA" ? Quelle est la probabilité qu'un mot de longueur 3 contienne un "A" ? Sur une séquence de longueur 1000, quelle est la loi du nombre de "A" ?