Aix-Marseille Université 2013-2014

Analyse 1

CORRECTION DU PARTIEL 1 DU VENDREDI 14 FÉVRIER 2014

Exercice 1

1. La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_M, u_n \geq M.$$
2. La suite (u_n) converge vers le réel $\ell \in \mathbb{R}$ si
$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon, |u_n - \ell| \leq \epsilon.$$
3. Montrons que la suite $u_n = \frac{1-2\ln(n)}{1+\ln(n)}$ converge vers -2.
   Pour tout $n \geq 1$, on a $|u_n + 2| = \left|\frac{3}{1+\ln(n)}\right|$. Fixons $\epsilon > 0$. Alors $|u_n + 2| \leq \epsilon$ équivaut à $\frac{3}{1+\ln(n)} \leq \epsilon$, c'est-à-dire à $e^{\frac{3}{\epsilon}-1} \leq n$.
   Posons $N_\epsilon = E(e^{\frac{3}{\epsilon}-1}) + 1$. Alors pour tout $n \geq N_\epsilon$, on a $|u_n + 2| \leq \epsilon$.
   Finalement, $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon, |u_n + 2| \leq \epsilon$, ce qui signifie que (u_n) converge vers -2.

Exercice 2

1. La suite (u_{2n}) est la suite constante (2), donc elle converge vers 2. La suite (u_{2n+1}) est la suite constante (-2), donc elle converge vers -2. Puisque (u_n) admet deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes, cette suite diverge.
2. $u_0 = 2$ et $u_1 = -2$. Donc $u_0 > u_1$, ce qui montre que (u_n) n'est pas croissante.
3. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = -1$.
4. Puisque (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -1$, on a :
$$\sum_{k=0}^{2n} u_k = \frac{u_0 - u_{2n+1}}{1-q} = \frac{2 - 2(-1)^{2n+1}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
   et
$$\sum_{k=0}^{2n+1} u_k = \frac{u_0 - u_{2n+2}}{1-q} = \frac{2 - 2(-1)^{2n+2}}{2} = 0$$

Exercice 3

1. Montrons par récurrence que la propriété
$$P(n) : \quad u_n \text{ est bien défini et } u_n \geq 1$$
   est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   $u_0 \geq 1$, donc $P(0)$ est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors u_{n+1} est bien défini puisque $u_n \neq -5$. De plus, $u_n \geq 1$ implique $u_n + 5 > 0$. Donc $u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+5} \geq 1$ équivaut à $4u_n + 2 \geq u_n + 5$, c'est-à-dire $u_n \geq 1$, qui est vraie. Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc finalement, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Puisque pour tout n, on a $u_n \neq -2$, alors la suite (v_n) est bien définie.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}$. En remplaçant u_{n+1} par son expression, on obtient :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n+2}{u_n+5} - 1}{\frac{4u_n+2}{u_n+5} + 2} = \frac{4u_n + 2 - (u_n + 5)}{4u_n + 2 + 2(u_n + 5)} = \frac{3u_n - 3}{6u_n + 12} = \frac{1}{2}v_n$$

Finalement, pour tout n, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, ce qui montre que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$. Donc

$$u_n = \frac{1 + 2v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

4. Puisque (v_n) est géométrique de raison $q = 1/2$ vérifiant $|q| < 1$, alors (v_n) converge vers 0, et donc, d'après les opérations usuelles sur les limites, (u_n) converge vers 1.

Exercice 4

1. **(a)** Pour tout n, on a : $a_{n-1} + a_{n+1} = \cos(n-1) + \cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1) + \cos(n)\cos(1) + \sin(n)\sin(1) = 2\cos(n)\cos(1) = 2\cos(1)a_n$. Par passage à la limite dans l'égalité $a_{n-1} + a_{n+1} = 2\cos(1)a_n$, on obtient $\ell + \ell = 2\cos(1)\ell$, c'est-à-dire : $2\ell(1 - \cos(1)) = 0$. Or $\cos(1) \neq 1$ (sinon, on aurait $1 = 2k\pi$ pour un cetain entier $k \neq 0$ donc π serait rationnel. Contradiction). Ceci implique $\ell = 0$.

   (b) Pour tout n, on a : $a_{2n} = \cos(2n) = 2\cos(n)^2 - 1 = 2a_n^2 - 1$. Par passage à la limite dans $a_{2n} = 2a_n^2 - 1$, on obtient que ℓ satisfait l'équation $\ell = 2\ell^2 - 1$.

   (c) D'après (a), $\ell = 0$. Or $\ell = 0$ n'est pas solution de l'équation $\ell = 2\ell^2 - 1$. Contradiction avec (b). Donc notre hypothèse était fausse. En fait, (a_n) ne converge pas.

2. (a_n) est une suite de l'intervalle fermé borné $[-1, +1]$, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, (a_n) admet un suite extraite qui converge dans $[-1, +1]$.