Université Aix-Marseille 2015–2016

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen terminal
corrigé

Exercice 1.

1. Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique définie positive.

2. Un angle orienté de $\mathcal{E}$ est un élément du quotient de l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de E par la relation d'équivalence définie par $(u, v) \sim (u', v')$ si et seulement si il existe une isométrie positive $f \in \mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ telle que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$.

3. Un vissage est, dans un espace affine euclidien de dimension 3, la composé d'une rotation et d'une translation parallèle à l'axe de cette rotation.

4. Une hyperbole de $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble $\Gamma \subset \mathcal{E}$ définie par $\Gamma := \{M \in \mathcal{E} \mid \overline{MF} = ed(M, \mathcal{D})\}$ avec $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite affine donnée, $F \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$ un point hors de $\mathcal{D}$ donné et $e > 1$ un réel donné.

Exercice 2.

1. Pour que $\mathcal{R}$ soit un repère affine, il suffit que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit une base de E, c'est-à-dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne soient pas colinéaires. Or s'ils l'étaient, on aurait A, B et C alignés et $\mathrm{Aff}\left(\{A, B, C\}\right)$ serait donc de dimension 1, ce qui contredirait le caractère affinement libre de la famille $\{A, B, C\}$.

2. (a) Les éléments $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont les coordonnées cartésiennes de $M \in \mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
   (b) Les éléments $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sont les coordonnées barycentriques de $M \in \mathcal{E}$ dans la base (A, B, C) si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $M = \mathrm{Bar}\left((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\right)$, c'est-à-dire si et seulement si, $\overrightarrow{GM} = \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}$ pour tout point $G \in \mathcal{E}$.
   (c) En utilisant $G = A$ dans cette dernière relation, on obtient $\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$ et donc $x = \beta$ et $y = \gamma$. Réciproquement, on a donc $\beta = x$, et $\gamma = y$ et donc, puisque $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha = 1 - x - y$.

3. L'isobarycentre de A, B et C est décrit par $\mathrm{Bar}\left((A, 1), (B, 1), (C, 1)\right) = \mathrm{Bar}\left((A, \frac{1}{3}), (B, \frac{1}{3}), (C, \frac{1}{3})\right)$. Ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$ sont donc $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Exercice 3.

1. (a) Commençons par remarquer que le milieu I des points A et B est sur la médiatrice. En effet, on a $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = 0 + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, d'où $\overline{AI} = \overline{BI}$. Dès lors, en notant $u_0 \in \setminus\{0\}$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, on a, pour tout $M \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}
\overline{AM} = \overline{BM} \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{AM}^2 = \overline{BM}^2 \;\Leftrightarrow\; \langle \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{AM} \rangle = \langle \overrightarrow{BM} | \overrightarrow{BM} \rangle \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} | \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} \rangle = \langle \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM} | \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM} \rangle \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{AI}^2 + 2\langle \overrightarrow{AI} | \overrightarrow{IM} \rangle + \overline{IM}^2 = \overline{BI}^2 + 2\langle \overrightarrow{BI} | \overrightarrow{IM} \rangle + \overline{IM}^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{AI} | \overrightarrow{IM} \rangle = \langle \overrightarrow{BI} | \overrightarrow{IM} \rangle \;\Leftrightarrow\; \langle \overrightarrow{AI} | \overrightarrow{IM} \rangle + \langle \overrightarrow{IB} | \overrightarrow{IM} \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{AB} | \overrightarrow{IM} \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{IM} = \lambda u_0 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, M = I + \lambda u_0.
\end{aligned}$$

Les points équidistants à A et à B sont donc les points de la droite passant par I et dirigée par u_0, c'est-à-dire orthogonale à (AB).

(b) La médiatrice de A et B étant une droite affine, deux de ses points l'engendrent entièrement. Or si M_1 et M_2 sont à égales distances de A et B, c'est qu'ils sont tous les deux sur la médiatrice de A et B.

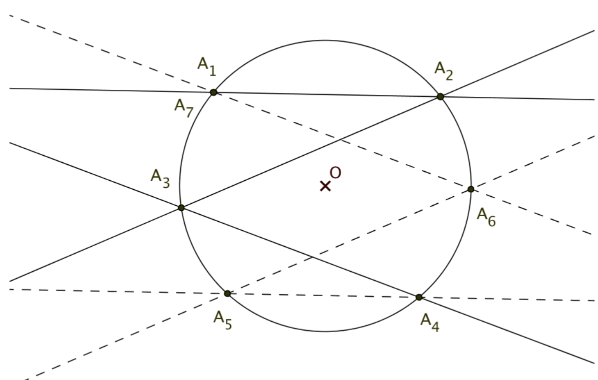
2. (a) On note $M_{\mathcal{D}}$ le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, c'est-à-dire l'intersection de $\mathcal{D}$ avec la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par M. On a alors, pour tout $P \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{M_{\mathcal{D}}P} \perp \overrightarrow{MM_{\mathcal{D}}}$ et, d'après le théorème de Pythagore, $\overline{MP}^2 = \overline{MM_{\mathcal{D}}}^2 + \overline{M_{\mathcal{D}}P}^2 \geq \overline{MM_{\mathcal{D}}}^2$ avec égalité si et seulement si $\overline{M_{\mathcal{D}}P}^2 = 0$, c'est-à-dire $P = M_{\mathcal{D}}$. Le point $M_{\mathcal{D}}$ minimise donc, sur $\mathcal{D}$, la distance à M et on a $\overline{MM_{\mathcal{D}}} = d(M, \mathcal{D})$.

(b) Une application affine préserve l'alignement des points et envoie donc une droite sur une droite. De plus, une isométrie préserve le produit scalaire et donc l'orthogonalité des droites. La droite Δ, orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par M, est donc envoyé par f sur Δ', la droite orthogonale à $f(\mathcal{D})$ passant par $f(M) = M$. L'intersection de Δ avec $\mathcal{D}$ est donc envoyé sur l'intersection de Δ' avec $f(\mathcal{D})$, autrement dit, le projeté orthogonal $M_{\mathcal{D}}$ de M sur $\mathcal{D}$ est envoyé par f sur $M_{f(\mathcal{D})}$, le projeté orthogonal de M sur $f(\mathcal{D})$. Or $d(M, \mathcal{D}) = \overline{MM_{\mathcal{D}}}$ et $d(M, f(\mathcal{D})) = \overline{MM_{f(\mathcal{D})}}$ et $\overline{MM_{f(\mathcal{D})}} = \overline{f(M)f(M_{\mathcal{D}})} = \overline{MM_{\mathcal{D}}}$ puisque f préserve les distances.

3. (a) D'après la formule d'Al-Kashi, on a $\overline{OQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{PQ}^2 - 2\langle\overrightarrow{PO}|\overrightarrow{PQ}\rangle = r^2 + \lambda^2 - 2\lambda r\cos\theta$ et donc $\overline{OQ} = \sqrt{r^2 + \lambda(\lambda - 2r\cos(\theta))}$.

(b) Soit $u \in E$ un vecteur unitaire directeur d'une droite $\mathcal{D}$ passant par P. Comme dans la question précédente, on note θ la mesure de l'angle orienté entre $\overrightarrow{PO}$ et u. Alors, pour tout $Q := P + \lambda u \in \mathcal{D}$, on a $\overline{OQ} = \sqrt{r^2 + \lambda(\lambda - 2r\cos(\theta))} = r$ si et seulement $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2r\cos(\theta)$. Cela donne une unique solution si $\cos(\theta) = 0$ et deux sinon. Autrement dit, $\mathcal{D}$ est une tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\cos(\theta) = 0$, c'est-à-dire si $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si $\mathcal{D}$ est orthogonale à (OP).

Exercice 4.

1. 

2. (a) La réflexion σ est définie, pour tout $u \in E$, par $\sigma(P + u) = P + s(u)$ où P est n'importe quel point de Δ et s la symétrie orthogonale par rapport à l'espace directeur de Δ. Notamment, à $M \in \mathcal{E} \setminus \Delta$ donné, on peut pendre P le projeté orthogonal de M sur Δ. On obtient alors $\sigma(M) = \sigma(P + \overrightarrow{PM}) = P - \overrightarrow{PM}$ et donc $\overrightarrow{P\sigma(M)} = -\overrightarrow{PM}$. Le point P est donc le milieu des points M et $\sigma(M)$ et comme, par construction, Δ est orthogonale à $(M\sigma(M))$, la droite Δ est bien, d'après la question 1.(a) de l'exercice 3, la médiatrice des points M et $\sigma(M)$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a Δ_k médiatrice des points A_k et A_{k+1} par définition, et donc $A_{k+1} = \sigma_k(A_k)$.

3. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les points A_k et A_{k+1} sont sur $\mathcal{C}$, donc O est à égale distance de ces deux points. On a donc bien $O \in \Delta_k$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et d'après la question 1.(a) de l'exercice 3, Δ_k est orthogonale à (A_kA_{k+1}), et Δ_{k+n-1} orthogonale à $(A_{k+n-1}A_{k+n})$. Mais par construction, (A_kA_{k+1}) et $(A_{k+n-1}A_{k+n})$ sont parallèles. Les droites Δ_k et Δ_{k+n-1} sont donc parallèles. Or, elles contiennent toutes les deux le point O, elles sont donc confondues.

4. (a) Une réflexion est un anti-déplacement, c'est-à-dire une isométrie de déterminant -1. Comme f est la composé d'un nombre impair de réflexions, c'est également une isométrie de déterminant -1 et donc un anti-déplacement.

   (b) Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $O \in \Delta_k$, donc σ_k fixe O. On en déduit que O est fixé par $f = \sigma_{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_1$.

   (c) L'application f est un anti-déplacement, donc, d'après la classification des isométries du plan, f est une symétrie glissée. Or les seules symétries glissées possédant des points fixes sont les réflexions. On en déduit que f est une réflexion et donc que $f^2 = \mathrm{Id}$.

5. Pour $k = 1$, on a

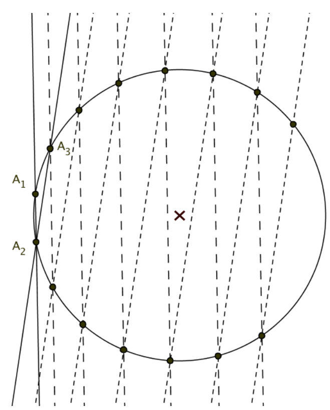
$$A_{1+2(n-1)} = (\sigma_{2(n-1)} \circ \cdots \circ \sigma_1)(A_1) = ((\sigma_{2(n-1)} \circ \cdots \circ \sigma_n) \circ (\sigma_{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_1))(A_1) = ((\sigma_{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_1) \circ (\sigma_{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_1))(A_1)$$

d'après la question 3.(b), et donc $A_{1+2(n-1)} = f^2(A_1) = A_1$ d'après la question 4.(c).
Supposons maintenant le résultat vrai au rang k. On a alors $A_k = A_{k+2(n-1)}$ et, en appliquant deux fois la question 3.(b), on obtient

$$A_{k+1} = \sigma_k(A_k) = \sigma_k(A_{k+2(n-1)}) = \sigma_{k+n-1}(A_{k+2(n-1)}) = \sigma_{k+2(n-1)}(A_{k+2(n-1)}) = A_{k+1+2(n-1)}.$$

Par principe de raisonnement par récurrence, le résultat est donc vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Si n est impair, alors f est un déplacement à point fixe, c'est-à-dire une rotation, mais celle-ci ne vérifie plus nécessairement $f^2 = \mathrm{Id}$. Et en effet, on prenant pour $A_1, \dots, A_n$ des points très proches les uns des autres, on obtient autant de points distincts que l'on souhaite :



En explicitant plus f, on peut même montrer qu'il est possible que les points A_k soient tous distincts.

Exercice 5.

1. (a) Par distributivité des barycentres, on montre que l'isobarycentre est à l'intersection des trois médianes. La médiane issue de A contient donc les point O et A et s'identifie de fait à la droite (AO). Par ailleurs, celle-ci contient le milieu de B et C, qui est à égale distance de B et de C, ainsi que A qui, le triangle étant équilatéral, est aussi à égale distance des points B et C. On en déduit, d'après la question 1.(b) de l'exercice 3, que la médiane issue de A est égale à la médiatrice issue de A et qu'elle est donc orthogonale à (BC). Comme elle passe par A, il s'agit aussi de la hauteur issue de A.
   En B et en C, on raisonne de même.

(b) Considérons la réflexion d'axe (BO). Celle-ci fixe les points B et O et, d'après la question précedente et la question 2.(a) de l'exercice 4, envoie A sur C. C'est donc une isométrie qui fixe O et envoie (AB) sur (BC). D'après la question 2.(b) de l'exercice 3, on a $d(O,(AB)) = d(O,(BC))$.
En considérant la réflexion d'axe (CO), on montre de même que $d(O,(BC)) = d(O,(CA))$.

(c) Puisque $d(O,(AB)) = r_0$, le projeté orthogonal C' de O sur (AB), c'est-à-dire le pied de la hauteur issue de C, est sur le cercle $\mathcal{C}(O,r_0)$. Comme de plus, $C' \in (AB)$ et que les droites (OC') et (AB) sont orthogonales, on déduit de la question 3.(b) de l'exercice 3 que (AB) est tangente à $\mathcal{C}(O,r_0)$. Or, d'après la question 1.(a), la hauteur issue de C est également la médiane, le point de tangence C' est donc bien le milieu de A et B.
On raisonne de même avec (BC) et (CA).

2. L'application f étant bijective, les ensembles $\mathcal{D} \cap \Gamma$ et $f(\mathcal{D} \cap \Gamma)$ ont d'une part le même cardinal, et d'autre part $f(\mathcal{D} \cap \Gamma) = f(\mathcal{D}) \cap f(\Gamma)$. On en déduit que $\mathcal{D} \cap \Gamma$ et $f(\mathcal{D}) \cap f(\Gamma)$ sont simultanément des singletons ou non. Si $\mathcal{D}$ est tangente à Γ, on a alors bien que $f(\mathcal{D})$ est tangente à $f(\Gamma)$.

3. Si A, B, C forment un triangle non applati, alors (A, B, C) est une base affine de $\mathcal{E}$. Soit $A', B', C' \in \mathcal{E}$ trois points formant un triangle équilatéral, (A', B', C') est alors également une base affine de $\mathcal{E}$. Il existe donc une unique bijection affine $f \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$ envoyant A', B', C' sur A, B, C. On considère maintenant Γ' le cercle de centre O' l'isobarycentre des points A', B' et C' et de rayon $d(O',(A'B'))$. D'après la question 1.(c), les droites $(A'B')$, $(B'C')$ et $(C'A')$ sont tangentes à Γ' et les points de tangence sont les milieux des cotés. On pose enfin $\Gamma = f(\Gamma')$. L'image d'un cercle par une bijection affine est soit un cercle (s'il s'agit d'une similitude) soit une ellipse (sinon). De plus, elle préserve la tangence d'après la question 2., ainsi que les barycentres, donc les milieux. On en déduit que Γ vérifie toutes les propriétés voulues.