Université Aix-Marseille 2016–2017

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen partiel
corrigé

Exercice 1.

1. Une famille de points $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{E}$ forment une base affine de $\mathcal{E}$ si elle est affinement libre et si elle engendre $\mathcal{E}$, c'est-à-dire si $\mathrm{Aff}(\{a_0, \ldots, a_n\}) = \mathcal{E}$ avec $\dim(\mathcal{E}) = n$.

2. On appelle affinité de base $\mathcal{F}$ le long de $G \subset E$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $f(x) = p(x) + \lambda\overrightarrow{p(x)x}$, où p est la projection sur $\mathcal{F}$ dans la direction G.

3. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{P}$ deux droites non parallèles. On a alors $D_1 = \mathbb{R}.\overrightarrow{u}_1$ et $D_2 = \mathbb{R}.\overrightarrow{u}_2$ avec $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires, et donc $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$. On en déduit que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$. En effet, pour n'importe quels $x_1 \in \mathcal{D}_1$ et $x_2 \in \mathcal{D}_2$, on a alors $\overrightarrow{x_1x_2} \in \mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$. Il existe donc $\overrightarrow{v}_1 \in D_1$ et $\overrightarrow{v}_2 \in D_2$ tels que $\overrightarrow{x_1x_2} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$. Mais alors $x_2 - \overrightarrow{v}_2 = x_1 + \overrightarrow{x_1x_2} - \overrightarrow{v}_2 = x_1 + \overrightarrow{v}_1$ est simultanément dans $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

   L'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est de fait non vide, il s'agit alors d'un sous-espace affine dirigé par $D_1 \cap D_2 = \{0\}$. C'est donc un singleton.

4. Si a, b, c, d forment un parallélogramme, alors $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$. Mais alors, le milieu m de $[ac]$, caractérisé par la relation $\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{mc} = \overrightarrow{0}$, vérifie également

$$\overrightarrow{mb} + \overrightarrow{md} = \overrightarrow{ma} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{mc} + \overrightarrow{cd} = \overrightarrow{ma} + \overrightarrow{mc} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{cd} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

   Le point m est donc également le milieu de $[cd]$ et les deux diagonales du quadrilatère a, b, c, d se coupent bien en leurs milieux.

   Réciproquement, si les diagonales se coupent en leurs milieux communs m, on a simultanément $\overrightarrow{ma}+\overrightarrow{mc} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{mb}+\overrightarrow{md} = \overrightarrow{0}$. En faisant la différence, on obtient $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{cd} = 0$ et a, b, c, d forment bien un parallélogramme.

Exercice 2.

1. L'application f est injective ou surjective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ l'est. Or $\overrightarrow{f}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$, elle ne peut donc pas être injective.

   Par ailleurs, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathrm{Mat}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   On peut observer que la seconde ligne moins la troisième donne trois fois la première. On en déduit que le rang de $\overrightarrow{f}$ est au plus 2 et donc que $\overrightarrow{f}$ n'est pas surjective.

2. Il suffit de donner un point de $\mathrm{Im}(f)$, par exemple $f(0, 0, 0, 0) = (-1, 2, 5)$, et une base de l'espace directeur $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f})$. On a déjà vu qu'il était de dimension au plus 2. Il contient par ailleurs les vecteurs linéairement indépendants $(1, 2, -1)$ et $(0, 1, 1)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = (-1, 2, 5) + (\mathbb{R}.(1, 2, -1) \oplus \mathbb{R}.(0, 1, 1))$.

   On peut toutefois simplifier cette description en remplaçant $(1, 2, -1)$ par $(1, 2, -1) + (0, 1, 1) = (1, 3, 0)$ et en observant que $(0, 0, 0) = (-1, 2, 5) + (-1).(1, 3, 0) + 5.(0, 1, 1) \in \mathrm{Im}(f)$. On obtient alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.(1, 3, 0) \oplus \mathbb{R}.(0, 1, 1)$.

3. Un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si il contient l'origine. Or d'après ce qui précède, on a bien $(0,0,0) \in \mathrm{Im}(f)$. On en déduit que l'image de f est bien un sous-espace vectoriel.

   On a, par contre, $f(0,0,0,0) \neq (0,0,0)$. L'application f ne peut donc pas être linéaire.

Exercice 3. (3 points)

1. (a) Si s_{x_0} est la symétrie centrale par rapport au point $x_0 \in \mathcal{E}$, on a par définition $s_{x_0}(x) = x_0 - \overrightarrow{x_0x}$. On en déduit que la linéarisé de s_{x_0} envoie $\overrightarrow{xy}$ sur le vecteur allant de $x_0 - \overrightarrow{x_0x}$ à $x_0 - \overrightarrow{x_0y}$, c'est-à-dire le vecteur $-\overrightarrow{x_0y} + \overrightarrow{x_0x} = \overrightarrow{yx}$. La linéarisé d'une symétrie centrale est donc $-\overrightarrow{\mathrm{Id}}_E$.

   La linéarisé d'une composition étant la composé des linéarisés, on en déduit que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E$.

   (b) Une application affine est une translation si et seulement si sa linéarisé est l'identité. D'après la question précédente, l'application f est donc une translation.

   Par ailleurs, on a $f(b) = (s_{b'} \circ s_{a'})(b) = s_{b'}(c) = a$. L'application f est donc la translation par le vecteur $\overrightarrow{ba}$.

2. Toujours par composition des linéarisés, on sait que $\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\mathrm{Id}}_E$. De plus, on a $g(b) = (s_{c'} \circ f)(b) = s_{c'}(a) = b$. On déduit de ces deux points que $g(x) = g(b + \overrightarrow{bx}) = b - \overrightarrow{bx}$. L'application g est donc la symétrie centrale par rapport à b.

Exercice 4.

1. Si $x \in \mathcal{F}$, alors $x = p(x)$ et donc $x \in \mathrm{Im}(p)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, alors il existe $y \in \mathcal{E}$ tel que $x = p(y)$ et de fait $p(x) = (p \circ p)(y) = p(y) = x$. On a alors bien $x \in \mathcal{F}$. Au final, on a donc bien $\mathcal{F} = \mathrm{Im}(p) \neq \emptyset$ car il contient $p(x)$ pour n'importe quel $x \in \mathcal{E}$.

   Considérons l'application $\psi : \mathcal{E} \to E$ définie par $\psi(x) = \overrightarrow{xp(x)}$. C'est une application affine de linéarisé $\overrightarrow{p} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E$ car, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, on a

   $$\overrightarrow{\psi(x)\psi(y)} = \overrightarrow{yp(y)} - \overrightarrow{xp(x)} = \overrightarrow{yx} + \overrightarrow{xp(y)} - \overrightarrow{xp(y)} - \overrightarrow{p(y)p(x)} = (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E)(\overrightarrow{xy}).$$

   On a alors $\mathcal{F} = \psi^{-1}(\{\overrightarrow{0}\})$ qui est soit vide soit un sous-espace affine dirigé par $\overrightarrow{\psi}^{-1}(\{0\})$. On a déjà vu que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, on en déduit donc que $F = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E)$.

2. D'après le théorème du rang et la question précédente, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E) \cap \mathrm{Ker}(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E) = \{\overrightarrow{0}\}$. Pour cela, on considère $\overrightarrow{u}$ dans l'intersection. On a donc $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v} \in E$. Mais alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{p}(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{p})(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{p}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{p \circ p}(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{p}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{p}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.

3. Par un raisonnement similaire à celui de la question 3 de l'exercice 1 (ou par invocation des propositions 1.1.10 et 1.1.20 du cours), les sous-espace affines $\mathcal{F}$ et $x + G$, pour $x \in \mathcal{E}$ donné, se coupent en un unique point : le projeté de x sur $\mathcal{F}$ selon la direction G. Or, d'une part, $p(x) \in \mathrm{Im}(p) = \mathcal{F}$ et, d'autre part, $p(x) \in x + G$ car $p(x) = x + \overrightarrow{xp(x)}$ avec $\overrightarrow{xp(x)} = \overrightarrow{p(x)p(x)} - \overrightarrow{p(x)x} = \overrightarrow{p(p(x))p(x)} - \overrightarrow{p(x)x} = (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}_E)(p(x)x) \in G$. On en déduit que $p(x)$ est bien le projeté de x sur $\mathcal{F}$ dans la direction G.

Exercice 5. (4 points)

1. Il suffit de montrer que toutes ces droites passent par l'isobarycentre des points $a_1, \ldots, a_6$. Or, par associativité des barycentres, on a pour tout $I \subset [\![1,6]\!]$ de cardinal 3

$$\mathrm{Bar}((a_1,1),\cdots,(a_6,1)) = \mathrm{Bar}\Big(\big(\mathrm{Bar}((a_i,1)_{i\in I}),3\big),\big(\mathrm{Bar}((a_i,1)_{i\notin I}),3\big)\Big) = \mathrm{Bar}((g_I,3),(g_{[\![1,6]\!]\setminus I},3)) = \mathrm{Bar}((g_I,1),(g_{[\![1,6]\!]\setminus I},1)).$$

   On en déduit que l'isobarycentre des points $a_1, \ldots, a_6$ est le milieu du segment $[g_I, g_{[\![1,6]\!]\setminus I}]$. Il est donc notamment sur la droite $(g_I g_{[\![1,6]\!]\setminus I})$.

2. Dans la preuve de la question précédente, on a montré que les diagonales du quadrilatère $g_{\{1,2,3\}}, g_{\{1,3,5\}}, g_{\{4,5,6\}}, g_{\{2,4,6\}}$ se coupent en leurs milieux. D'après la question 4. de l'exercice 1, il s'agit donc d'un parallélogramme.