

M1 – Mathématiques
Algèbre & Géométrie
Examen de rattrapage
corrigé

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.

Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.

Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

L'épreuve dure trois heures.

Exercice 1.

1. (a) Si (e_1, \dots, e_n) est une base pour un \mathbb{K} -espace vectoriel E , alors sa base duale est la base (e_1^*, \dots, e_n^*) de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ définie par $e_i^*(e_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
- (b) Soit \mathcal{E} un espace affine dirigé par E . Un sous-espace affine de \mathcal{E} est un sous-ensemble de \mathcal{E} de la forme $x_0 + F := \{x_0 + \vec{u} \mid \vec{u} \in F\}$, où F est un sous-espace vectoriel de E .
- (c) Soit \mathbb{D} une droite projective sur un corps \mathbb{K} et $a, b, c, d \in \mathbb{D}$ quatre points tels que a, b et c sont deux à deux distincts. Le birapport $[a, b, c, d]$ est définie comme $f(d)$, où f est l'unique homographie $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{K}P^1$ envoyant a sur ∞ , b sur 0 et c sur 1.

2. Soit $\mathbb{P}(E)$ un plan projectif. Soit $\mathbb{D}_1 \neq \mathbb{D}_2 \subset \mathbb{P}(E)$ deux droites projectives et $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}_2$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{D}_2 \setminus \mathbb{D}_1$. Pour tous $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$, on note d_{ij} l'intersection de $(a_i b_j)$ et $(a_j b_i)$. Alors les points d_{12} , d_{23} et d_{31} sont alignés.

3. Si f et g sont colinéaires, il est clair qu'elles ont la même projectivisé.

Réciproquement, supposons que $P(f) = P(g)$. Alors, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}^*$ tel que $g(x) = \lambda_x f(x)$. En fixant $x_0 \in E \setminus \{0\}$, il s'agit donc de montrer que $\lambda_x = \lambda_{x_0}$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Si $x = \mu x_0$, alors $\lambda_x f(x) = g(x) = \mu g(x_0) = \mu \lambda_{x_0} f(x_0) = \lambda_{x_0} f(x)$ et donc $\lambda_x = \lambda_{x_0}$.

Si x et x_0 sont linéairement indépendants, alors $\lambda_x f(x) + \lambda_{x_0} f(x_0) = g(x) + g(x_0) = g(x + x_0) = \lambda_{x+x_0} f(x+x_0) = \lambda_{x+x_0} f(x) + \lambda_{x+x_0} f(x_0)$. Mais comme f est injective, $f(x)$ et $f(x_0)$ sont également linéairement indépendants, et on a $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda_{x_0}$.

4. Si h est une involution, alors, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a par invariance du birapport

$$[a_1, a_2, a_3, h(a_i)] = [h(a_1), h(a_2), h(a_3), h^2(a_i)] = [h(a_1), h(a_2), h(a_3), a_i].$$

Réciproquement, si pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a $[a_1, a_2, a_3, h(a_i)] = [h(a_1), h(a_2), h(a_3), a_i]$, alors on a

$$[h(a_1), h(a_2), h(a_3), a_i] = [a_1, a_2, a_3, h(a_i)] = [h(a_1), h(a_2), h(a_3), h^2(a_i)],$$

ce qui implique que $h^2(a_i) = a_i$. Les applications h^2 et $\text{Id}_{\mathbb{D}}$ coïncident donc sur une base projective, c'est qu'elles sont égales. On a donc $h^2 = \text{Id}_{\mathbb{D}}$ et h est une involution.

Exercice 2.

1. Il suffit de remarquer que l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$ est bilinéaire et vérifie $r(x) = \varphi(x, x)$. L'application φ n'est cependant pas la forme polaire de r car, en général, elle n'est pas symétrique. Il faut donc symétriser φ , et cela donne $\varphi_r(x, y) = \frac{1}{2}(f(x)g(y) + f(y)g(x))$.

2. (a) Supposons par l'absurde que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g) =: F \subset E$. Alors, f et g étant des formes linéaires, elles sont de rang au plus 1, et donc F est soit égal à E , soit un hyperplan. Dans le premier cas, on a $f = g \equiv 0$. Dans le second cas, on fixe $u_0 \in E \setminus F$; pour des raisons de dimension, on a alors $E = F \oplus \mathbb{K} \cdot u_0$ et f et g sont donc complètement déterminées par leurs valeurs (non nulle) en u_0 . Mais de fait, on a alors $f = \frac{f(u_0)}{g(u_0)}g$. Dans les deux cas, cela contredit le fait que f et g soient linéairement indépendants.

- (b) Pour le cône isotrope, on a $r(x) = f(x)g(x) = 0$ ssi $f(x)$ ou $g(x) = 0$. On a donc $\text{Cone}(r) = \text{Ker}(f) \cup \text{Ker}(g)$.

Montrons maintenant que $\text{Ker}(r) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$. Pour cela, supposons que $x \in E$ soit dans le noyau de r . Comme f et g sont linéairement indépendants, aucune n'est nulle et donc $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(g)$ sont deux hyperplans. De plus, d'après la question précédente, $\text{Ker}(f) \neq \text{Ker}(g)$, on peut donc trouver $x_f \in \text{Ker}(f) \setminus \text{Ker}(g)$. Par définition du noyau de r , on a alors $\varphi_r(x, x_f) = \frac{1}{2}(f(x)g(x_f) + f(x_f)g(x)) = \frac{g(x_f)}{2}f(x) = 0$ avec $\frac{g(x_f)}{2} \neq 0$. On en déduit que $f(x) = 0$ et donc $x \in \text{Ker}(f)$. En échangeant les rôles de f et g , on obtient de même que $x \in \text{Ker}(g)$. Au final, $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$. Réciproquement, il est clair que si $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$, alors $x \in \text{Ker}(r)$.

- (c) Le noyau de r est l'intersection de deux hyperplans distincts, c'est donc un espace de dimension $n - 2$. Le rang de r vaut donc 2.

De fait, dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les signatures possibles sont $(2, 0)$, $(1, 1)$ ou $(0, 2)$. Supposons par l'absurde que ce soit $(2, 0)$ ou $(0, 2)$. D'après le théorème d'inertie de Sylvester, il existe une base telle que $r(x_1, \dots, x_n) = \pm(x_1^2 + x_2^2)$ et le cône isotrope est alors l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \in E \mid x_1 = x_2 = 0\}$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension $n - 2$. Or on a vu dans la question précédente que $\text{Cone}(r)$ est une réunion d'hyperplan distincts, ce qui ne peut pas être un sous-espace vectoriel. On en déduit que la signature de r vaut $(1, 1)$.

3. Si f et g ne sont pas linéairement indépendants, c'est soit que f ou g est nulle, soit qu'elles sont colinéaires. Dans le premier cas, on a $r \equiv 0$; on a alors $\text{Cone}(r) = E = \text{Ker}(r) = E$, $\text{rg}(r) = 0$ et $\sigma(r) = (0, 0)$. Dans le second cas, on a $r = \lambda f^2$; on a alors $\text{Cone}(r) = \text{Ker}(r) = \text{Ker}(f)$, $\text{rg}(r) = 1$ et $\sigma(r) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$ selon que le coefficient λ de proportionalité entre f et g est positif ou négatif.

4. (a) Par la méthode de Gauss, on trouve

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 \\ &= 3\left(x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{8}{3}x_2^2 - \frac{8}{3}x_2x_3 + \frac{8}{2}x_3^2 \\ &= 3\left(x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 2x_3^2. \end{aligned}$$

La signature vaut donc $(3, 0)$ et q est donc définie positive.

- (b) i. On a

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- ii. Soit P la matrice de passage entre la base canonique et une base de diagonalisation simultanée. On a donc

$$P^t R P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^t Q P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si u est un vecteur de la nouvelle base, disons l'image par P du vecteur $e_1 := (1, 0, 0)$, alors $P^t R u = P^t R P e_1 = \alpha e_1$ et $P^t Q u = P^t Q P e_1 = e_1$ et donc $P^t(R - \alpha Q)u = P^t R P e_1 - \alpha P^t Q P e_1 = \alpha e_1 - \alpha e_1 = 0$.

Or P' étant inversible, on en déduit que $u \in \text{Ker}(R - \alpha Q)$. Le noyau de $R - \alpha Q$ est donc non trivial et $\det(R - \alpha Q) = 0$.

- iii. Pour déterminer une base de diagonalisation simultanée pour r et q , il suffit donc de trouver les racines du polynôme $\det(R - \mu P) = 0$ et, pour chacune de ces racines μ_0 , trouver un vecteur dans le noyau de $R - \mu_0 P$. Enfin, il faudra renormaliser les vecteurs pour qu'ils soient de norme 1 pour q .

Après calcul, on trouve $\det(R - \mu P) = 16\mu(\mu + 1)(\mu - 3)$ dont les racines sont 0, -1 et 3. On trouve ensuite que $\text{Ker}(R) = \mathbb{R} \cdot (0, 1, 0)$, $\text{Ker}(R + P) = \mathbb{R} \cdot (-1, 0, 1)$ et $\text{Ker}(R - 3P) = \mathbb{R} \cdot (3, 2, 3)$. Après normalisation, on trouve comme base de diagonalisation simultanée

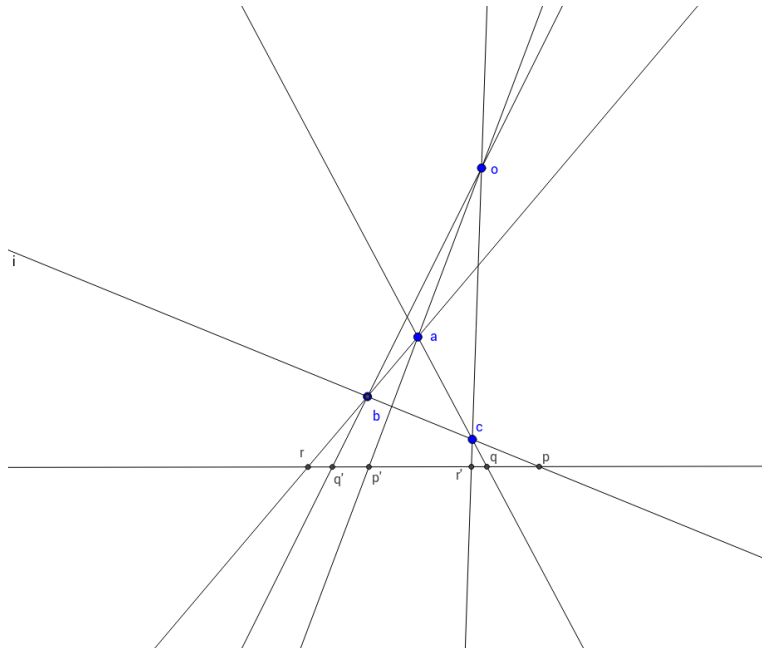
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 0) \quad u_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \quad u_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}}(3, 2, 3).$$

Exercice 3.

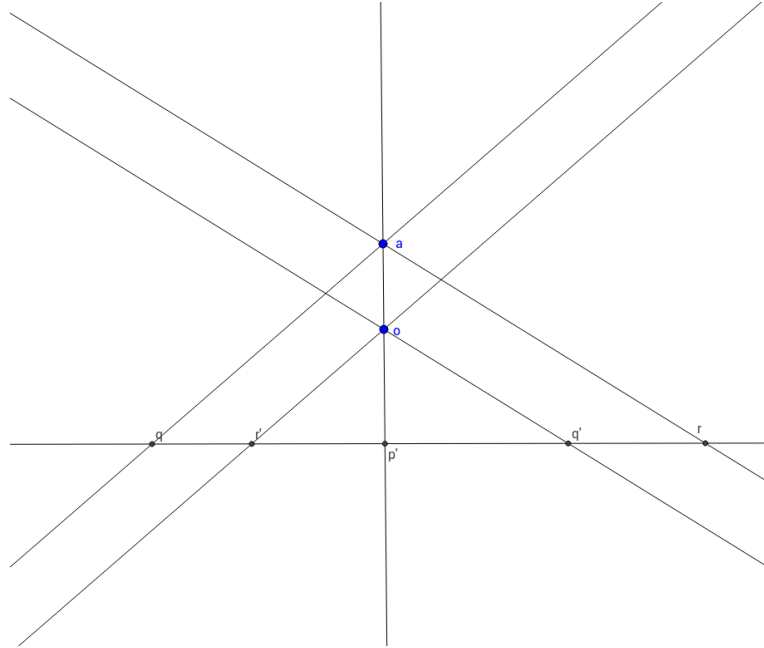
- Le crochet est toujours trivial.
- Le linéarisé d'une composition étant la composition des linéarisés, on a $\overrightarrow{[f, g]} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f^{-1}} \circ \overrightarrow{g^{-1}}$ et donc $\det(\overrightarrow{[f, g]}) = \det(\overrightarrow{f}) \det(\overrightarrow{g}) \det(\overrightarrow{f^{-1}}) \det(\overrightarrow{g^{-1}}) = 1 > 0$. Le crochet $[f, g]$ est donc positif.
 - Pour montrer que $h := [f, g]$ est une translation, il suffit de montrer que sa linéarisé est l'identité. En effet, en fixant $x_0 \in \mathcal{P}$, on aura alors, pour tout $x \in \mathcal{P}$, $h(x) = x + \overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0h(x_0)} + \overrightarrow{h(x_0)h(x)} = x + \overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0h(x_0)} + \overrightarrow{x_0x} = x + \overrightarrow{x_0h(x_0)}$ et donc h est la translation par le vecteur $\overrightarrow{x_0h(x_0)}$.
Or, comme on l'a vu, le linéarisé d'un crochet est le crochet des linéarisés. Mais les linéarisées d'isométries positives dans un plan affine sont des éléments de $\text{SO}(2)$, lequel est abélien. D'après la question 1, on obtient bien le résultat voulu.
 - D'après la question (a), les crochets $[a, b]$, $[c, d]$, $[e, f]$ et $[g, h]$ sont positifs. mais comme composés d'isométries, ce sont également des isométries. Ce sont des éléments de Isom^+ . D'après la question (b), $\overrightarrow{[a, b], [c, d]}$ et $\overrightarrow{[e, f], [g, h]}$ sont donc des translations. Mais le groupe des translations est abélien, donc d'après la question 1, $\overrightarrow{[[a, b], [c, d]], [[e, f], [g, h]]}$ est l'identité.

Exercice 4.

- (a)



(b)



(c) On commence par considérer la projection de \mathbb{D} sur (bc) et de centre a . Cela envoie p sur p , q sur c , r sur b et p' sur $p'' := (oa) \cap (bc)$. Les projections préservant le birapport, on obtient $[p, q, r, p'] = [p, c, b, p'']$. On considère ensuite la projection de (bc) sur \mathbb{D} et de centre o . Cela envoie p sur p , c sur r' , b sur q' et p'' sur p' . Toujours par préservation du birapport, on obtient $[p, c, b, p''] = [p, r', q', p']$. Par transitivité, on a bien $[p, q, r, p'] = [p, r', q', p']$.

(d) On sait que, pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{D}$ distincts, on a $[a, b, c, d] = [d, c, b, a]$ (car $\frac{z_a - z_c}{z_a - z_d} = \frac{z_d - z_b}{z_c - z_a}$). Avec la question précédente, on en déduit que $[p, q, r, p'] = [p, r', q', p'] = [p', q', r', p]$.

(e) Les points a, b et c étant non alignés, les droites (ab) , (bc) et (ca) sont distinctes, et les points p, q et r sont donc deux à deux distincts. Ces derniers forment donc une base projective de \mathbb{D} .

Le point o n'étant sur aucune des droites (ab) , (bc) et (ca) , les droites (oa) , (ob) et (oc) sont toutes distinctes, ce qui implique que les points p', q' et r' sont aussi deux à deux distincts. Ces derniers forment donc également une base projective de \mathbb{D} .

D'après le théorème fondamentale anglo-saxon de la géométrie projective, il existe donc une unique homographie $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ envoyant p sur p' , q sur q' et r sur r' . D'après la question (d), on a de plus $[p, q, r, h(p)] = [h(p), h(q), h(r), p]$; ce qui, d'après la question 4. de l'exercice 1, implique que h est involutive.

(f)

2. L'énoncé dual donne : On fixe un point $d \in \mathbb{RP}^2$ et trois droites \mathbb{A}, \mathbb{B} et \mathbb{C} non concourantes, dont aucune ne contient d . On pose \mathbb{P} la droite passant par d et $\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$, \mathbb{Q} la droite passant par d et $\mathbb{C} \cap \mathbb{A}$ et \mathbb{R} la droite passant par d et $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$. Pour toute droite \mathbb{O} ne contenant ni d , ni $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, ni $\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$, ni $\mathbb{C} \cap \mathbb{A}$ il existe une unique homographie involutive sur l'ensemble des droites passant par d (qui, par dualité, est bien une droite projective) envoyant \mathbb{P} sur \mathbb{P}' , la droite passant par d et $\mathbb{O} \cap \mathbb{A}$, \mathbb{Q} sur \mathbb{Q}' , la droite passant par d et $\mathbb{O} \cap \mathbb{B}$, et \mathbb{R} sur \mathbb{R}' , la droite passant par d et $\mathbb{O} \cap \mathbb{C}$. Autrement dit, si l'on fixe \mathbb{X} n'importe quelle droite ne passant pas par d et que l'on note p, q, r, p', q' et r' les intersections de \mathbb{X} avec, respectivement, $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{P}', \mathbb{Q}'$ et \mathbb{R}' , alors il existe une unique homographie involutive envoyant p sur p' , q sur q' et r sur r' .

3. L'énoncé réciproque donne : si $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est une homographie involutive et que l'on note p', q' et r' les images, respectivement, de p, q et r par h , alors les droites (ap') , (bq') et (cr') sont concourantes.

Pour la montrer, on peut considérer $r'' := (br) \cap (cr')$, $o := (bq') \cap (cr')$ et $o' = (ap') \cap (cr')$. Le but est donc de montrer que $o = o'$. En considérant la projection de (cr') sur \mathbb{D} et de centre b , on obtient $[c, r', r'', o] = [p, r', r, q']$. D'un autre coté, en considérant la projection de (cr') sur \mathbb{D} et de centre a , on obtient aussi $[c, r', r'', o'] = [q, r', r, p']$, ce qui par invariance du birapport par l'homographie involutive h donne encore $[c, r', r'', o'] = [q', r, r', p]$, ce qui par invariance du birapport par la permutation $(a, b, c, d) \rightarrow (d, c, b, a)$ évoquée plus haut, donne enfin $[c, r', r'', o'] = [p, r', r, q']$. Au final, on a donc $[c, r', r'', o] = [c, r', r'', o']$ et donc $o = o'$.