Université Aix-Marseille 2017–2018

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen terminal
corrigé

Exercice 1.

1. (a) Un sous-ensemble d'un espace affine réel est convexe si et seulement si il est stable par barycentres à coefficients positifs.

   (b) Un repère orthonormé pour un espace affine euclidien est la donnée d'un point de cet espace et d'une base de l'espace directeur formé de vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux.

   (c) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ un hyperplan affine. La réflexion orthogonale $r_{\mathcal{H}}$ est l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui envoie un point $x \in \mathcal{E}$ sur $s_{\mathcal{H}}(x) + \overrightarrow{xs_{\mathcal{H}}(x)}$, où $s_{\mathcal{H}}(x)$ est l'intersection de $\mathcal{H}$ avec la droite affine $x + H^{\perp}$.

2. (a) Pour cela, il faut vérifier que :
   - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \exists! b \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = x$, ce qui est vrai, l'unique b étant $e^{\ln(a)-x} = ae^{-x}$;
   - $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln\left(\frac{a}{c}\right)$, ce qui est vrai car

   $$\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(a) - \ln(b) + \ln(b) - \ln(c) = \ln(a) - \ln(c) = \ln\left(\frac{a}{c}\right).$$

   (b) Soit $x \in \mathcal{F}$ et $y \in \mathcal{G}$. Puisque $\overrightarrow{xy} \in E = F + G$, il existe $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$ tels que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. On pose $z = x + \overrightarrow{u} \in x + F = \mathcal{F}$, mais alors $z = (y + \overrightarrow{yx}) + \overrightarrow{u} = y - \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = y - \overrightarrow{v} \in y + G = \mathcal{G}$. On a donc $z \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ et donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

3. Par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)) = \dim(\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)^{\perp})$. Il suffit donc de montrer une inclusion. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)$, on a alors $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. Or, pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)$, on a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w}$ pour un certain $\overrightarrow{w} \in E$ et, puisque f est une isométrie, ce qui implique que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle,

   $$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) \rangle - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) \rangle - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle = 0.$$

   On a donc $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)^{\perp}$ et donc $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)^{\perp}$.

Exercice 2.

1. Si f est une translation ou une homothétie dans un espace affine $\mathcal{E}$, alors $\overrightarrow{f}$ est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Toute droite $\mathcal{D}$ est donc envoyée sur un sous-espace affine dirigé par $\overrightarrow{f}(D) = \{\lambda \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in D\} = D$, c'est-à-dire sur une droite parallèle à $\mathcal{D}$.

2. (a) La seule translation qui envoie a_1 sur a_2 est la translation t de vecteur $\overrightarrow{a_1a_2}$. Mais alors

   $$t(b_1) = b_1 + \overrightarrow{a_1a_2} = b_1 + \overrightarrow{a_1b_1} + \overrightarrow{b_1a_2} = (b_1 + \overrightarrow{b_1a_2}) + \overrightarrow{a_1b_1} = a_2 + \overrightarrow{a_2b_2} = b_2$$

   puisque $\overrightarrow{a_1b_1} = \overrightarrow{a_2b_2}$.

   (b) Si h est une homothétie envoyant a_1 sur a_2 et b_1 sur b_2, alors son centre est situé sur la droite (a_1a_2). De plus, puisque $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{a_1b_1}) = \overrightarrow{h(a_1)h(b_2)} = \overrightarrow{a_2b_2} = \lambda\overrightarrow{a_1b_1}$, le rapport de h vaut λ. Or il existe un unique point o de (a_1a_2) tel que $\overrightarrow{oa_2} = \lambda\overrightarrow{oa_1}$, à savoir $\mathrm{Bar}((a_1,\lambda),(a_2,-1))$. Si h existe, c'est donc l'homothétie de rapport λ et de centre $o = \mathrm{Bar}((a_1,\lambda),(a_2,-1))$.

Réciproquement, considérons cette homothétie. On a alors $\lambda\overrightarrow{oa_1} - \overrightarrow{oa_2} = \overrightarrow{0}$ et donc $h(a_1) = o + \lambda\overrightarrow{oa_1} = o + \overrightarrow{oa_2} = a_2$ et $h(b_1) = o + \lambda\overrightarrow{ob_1} = o + \lambda\overrightarrow{oa_1} + \lambda\overrightarrow{a_1b_1} = o + \overrightarrow{oa_2} + \overrightarrow{a_2b_2} = b_2$.

3. Supposons qu'il existe une translation ou une homothétie envoyant a_1 sur a_2, b_1 sur b_2 et c_1 sur c_2. Alors d'après la question 1, on a $(a_1b_1)/\!/(a_2b_2)$, $(b_1c_1)/\!/(b_2c_2)$ et $(a_1c_1)/\!/(a_2c_2)$.

   Réciproquement, supposons que $(a_1b_1)/\!/(a_2b_2)$, $(b_1c_1)/\!/(b_2c_2)$ et $(a_1c_1)/\!/(a_2c_2)$. Il existe alors $\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{K}$ tels que $\overrightarrow{a_2b_2} = \lambda\overrightarrow{a_1b_1}$, $\overrightarrow{b_2c_2} = \mu\overrightarrow{b_1c_1}$ et $\overrightarrow{a_2c_2} = \nu\overrightarrow{a_1c_1}$. Mais puisque T_1 n'est pas aplati, les vecteurs $\overrightarrow{a_1b_1}$ et $\overrightarrow{b_1c_1}$ sont non colinéaires et donc indépendants. Or

$$\lambda\overrightarrow{a_1b_1} + \mu\overrightarrow{b_1c_1} = \overrightarrow{a_2b_2} + \overrightarrow{b_2c_2} = \overrightarrow{a_2c_2} = \nu\overrightarrow{a_1c_1} = \nu\overrightarrow{a_1b_1} + \nu\overrightarrow{b_1c_1}$$

   et donc $(\lambda-\nu)\overrightarrow{a_1b_1} + (\mu-\nu)\overrightarrow{b_1c_1} = \overrightarrow{0}$. On en déduit que $\lambda = \nu = \mu$. Il y a maintenant deux cas :

   - si $\lambda = 1$, alors la translation de vecteur $\overrightarrow{a_1a_2} = \overrightarrow{b_1b_2} = \overrightarrow{c_1c_2}$ envoie bien T_1 sur T_2 ;
   - si $\lambda \neq 1$, on sait d'après la question 2.(b) qu'il existe une unique homothétie envoyant a_1 sur a_2 et b_1 et b_2. Mais au vu de la preuve, on sait même plus précisemment qu'il existe une unique homothétie de rapport λ envoyant a_1 sur a_2 et que celle-ci envoie b_1 sur b_2 ; mais pour la même raison, celle-ci envoie également c_1 sur c_2 et donc T_1 qur T_2.

Exercice 3.

1. (a) Puisque m est le milieu de x_1 et x_2, on a par définition que $\overrightarrow{x_1m} + \overrightarrow{x_2m} = \overrightarrow{0}$ et donc que $\overrightarrow{x_1x_2} = 2\overrightarrow{x_1m}$. maintenant, pour tout $x \in \mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle\overrightarrow{xm},\overrightarrow{xm}\rangle &= \langle\overrightarrow{xx_1} + \overrightarrow{x_1m}, \overrightarrow{xx_2} + \overrightarrow{x_2m}\rangle \\
&= \langle\overrightarrow{xx_1},\overrightarrow{xx_2}\rangle + \langle\overrightarrow{xx_1},\overrightarrow{x_2m}\rangle + \langle\overrightarrow{x_1m},\overrightarrow{xx_2}\rangle + \langle\overrightarrow{x_1m},\overrightarrow{x_2m}\rangle \\
&= \langle\overrightarrow{xx_1},\overrightarrow{xx_2}\rangle + \langle\overrightarrow{x_1x},\overrightarrow{mx_2}\rangle + \langle\overrightarrow{xx_2},\overrightarrow{x_1m}\rangle + \langle\overrightarrow{x_1m},\overrightarrow{x_2m}\rangle \\
&= \langle\overrightarrow{xx_1},\overrightarrow{xx_2}\rangle + \langle\overrightarrow{x_1x},\overrightarrow{x_1m}\rangle + \langle\overrightarrow{xx_2},\overrightarrow{x_1m}\rangle - \langle\overrightarrow{x_1m},\overrightarrow{x_1m}\rangle \\
&= \langle\overrightarrow{xx_1},\overrightarrow{xx_2}\rangle + \langle\overrightarrow{x_1x} + \overrightarrow{xx_2},\overrightarrow{x_1m}\rangle - \langle\tfrac{1}{2}\overrightarrow{x_1x_2},\tfrac{1}{2}\overrightarrow{x_1x_2}\rangle \\
&= \langle\overrightarrow{xx_1},\overrightarrow{xx_2}\rangle + \langle\overrightarrow{x_1x_2},\tfrac{1}{2}\overrightarrow{x_1x_2}\rangle - \tfrac{1}{4}\langle\overrightarrow{x_1x_2},\overrightarrow{x_1x_2}\rangle \\
&= \langle\overrightarrow{xx_1},\overrightarrow{xx_2}\rangle + \tfrac{1}{4}\langle\overrightarrow{x_1x_2},\overrightarrow{x_1x_2}\rangle
\end{aligned}$$

   (b) D'après la question précédente, on a $\overrightarrow{xx_1} \perp \overrightarrow{xx_2}$ si et seulement si $d(x,m)^2 = \langle\overrightarrow{xm},\overrightarrow{xm}\rangle = \frac{1}{4}\langle\overrightarrow{x_1x_2},\overrightarrow{x_1x_2}\rangle = \left(\frac{1}{2}d(x_1x_2)\right)^2$, autrement dit si et seulement si x est à distance $\frac{1}{2}d(x_1x_2)$ de m donc sur le cercle de centre m et de rayon $\frac{1}{2}d(x_1x_2)$.

2. (a) Si $x \in C_\lambda \cap (ab)$, alors $\overrightarrow{xa}$ et $\overrightarrow{xb}$ sont colinéaires et, puisque $\|\overrightarrow{xa}\| = \lambda\|\overrightarrow{xb}\|$, on a $\overrightarrow{xa} = \pm\lambda\overrightarrow{xb}$. Si $\overrightarrow{xa} = \lambda\overrightarrow{xb}$ alors $x = \mathrm{Bar}((a,1),(b,-\lambda))$, et si $\overrightarrow{xa} = -\lambda\overrightarrow{xb}$ alors $x = \mathrm{Bar}((a,1),(b,\lambda))$. On trouve donc deux solutions c_1 et c_2 dont les coefficients barycentriques dans la base affine (a,b,c) sont respectivement $\left(\frac{1}{1+\lambda},\frac{\lambda}{1+\lambda},0\right)$ et $\left(\frac{1}{1-\lambda},-\frac{\lambda}{1-\lambda},0\right)$.

   (b) Par propriété des barycentres, on a $\overrightarrow{xc_1} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{xa} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{xb}$ et $\overrightarrow{xc_2} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{xa} - \frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{xb}$. De fait, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle\overrightarrow{xc_1},\overrightarrow{xc_2}\rangle &= \frac{1}{(1+\lambda)(1-\lambda)}\langle\overrightarrow{xa} + \lambda\overrightarrow{xb}, \overrightarrow{xa} - \lambda\overrightarrow{xb}\rangle \\
&= \frac{1}{1-\lambda^2}\Big(\langle\overrightarrow{xa},\overrightarrow{xa}\rangle - \lambda\langle\overrightarrow{xa},\overrightarrow{xb}\rangle + \lambda\langle\overrightarrow{xb},\overrightarrow{xa}\rangle - \lambda^2\langle\overrightarrow{xb},\overrightarrow{xb}\rangle\Big) \\
&= \frac{\|\overrightarrow{xa}\|^2 - \lambda^2\|\overrightarrow{xb}\|^2}{1-\lambda^2}.
\end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, on a $x \in C_\lambda$ si et seulement si $\overrightarrow{xc_1} \perp \overrightarrow{xc_2}$ et donc, d'après la question 1.(b), si et seulement si x appartient au cercle de centre le milieu de c_1 et c_2 et de rayon $\frac{1}{2}d(c_1c_2)$.

Exercice 4.

1. Si les points x_1, x_2 et x_3 sont alignés, alors l'un des trois s'écrit comme barycentre des deux autres. Quitte à permuter les points, on a donc $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Mais alors chacune des coordonnées barycentriques de x_3 sont aussi barycentres de celles de x_1 et x_2 et on a

$$\begin{pmatrix} o_3 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} o_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} o_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de la matrice considérée sont donc liées et le déterminant vaut zéro.

Réciproquement, si le déterminant s'annule, c'est que l'une des colonnes s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres. Quitte à permuter les points, supposons que

$$\begin{pmatrix} o_3 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} o_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} o_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Puisque, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, (o_i, α_i, β_i) sont des coordonnées barycentriques, on a $o_i + \alpha_i + \beta_i = 1$ et donc, en sommant les trois lignes de l'égalité ci-dessus, on obtient

$$\lambda + \mu = \lambda(o_1 + \alpha_1 + \beta_1) + \mu(o_2 + \alpha_2 + \beta_2) = o_3 + \alpha_3 + \beta_3 = 1.$$

On en déduit que

$$\begin{pmatrix} o_3 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} o_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} o_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

et donc que $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Les points x_1, x_2 et x_3 sont donc bien alignés.

2. (a) Dans la base (o, a, b), les coordonnées de a sont clairement $(0, 1, 0)$. Le point a' est sur (oa), il s'écrit donc comme barycentre $\lambda' a + (1-\lambda')o$ avec $\lambda' \in \mathbb{K}$. Ses coordonnées barycentriques sont alors bien $(1-\lambda', \lambda', 0)$. De plus, $\lambda' \neq 0, 1$ car sinon on aurait $a' = o$ ou $a' = a$. On argumentre de manière similaire pour a'', b, b' et b''.

   (b) Le point c étant l'unique intersection entre les droites $(a'b'')$ et $(a''b')$, il s'agit du seul point à être simultanément aligné avec, d'une part, a' et b'' et, d'autre part, a'' et b'. D'après la question 1, il suffit donc de vérifier les deux déterminants formés par les coordonnées barycentriques s'annulent. Or, pour l'alignement avec a' et b'', on trouve en factorisant ce qui est factorisable dans la première colonne et les deux dernières lignes :

$$\frac{\lambda'\mu''}{\lambda''\mu'' - \lambda'\mu'} \begin{vmatrix} \lambda'(1-\lambda'')(\mu''-\mu') + \mu''(1-\mu')(\lambda''-\lambda') & 1-\lambda' & 1-\mu'' \\ \lambda''(\mu''-\mu') & 1 & 0 \\ \mu'(\lambda''-\lambda') & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

   Or, en soustrayant $(1-\lambda')$ fois la deuxième ligne et $(1-\mu'')$ fois la troisième ligne à la première ligne, on annule les deuxième et troisième coefficients, et le premier devient

$$\begin{aligned} &\lambda'(1-\lambda'')(\mu''-\mu') + \mu''(1-\mu')(\lambda''-\lambda') - (1-\lambda')\lambda''(\mu''-\mu') - (1-\mu'')\mu'(\lambda''-\lambda') \\ &= \Big(\lambda'(1-\lambda'') - (1-\lambda')\lambda''\Big)(\mu''-\mu') + \Big(\mu''(1-\mu') - (1-\mu'')\mu'\Big)(\lambda''-\lambda') \\ &= (\lambda'-\lambda'')(\mu''-\mu') + (\mu''-\mu')(\lambda''-\lambda') = 0. \end{aligned}$$

Toute la première ligne s'annule donc et le déterminant vaut zéro.

En appliquant les permutations $(\lambda' \leftrightarrow \mu'')$ et $(\lambda'' \leftrightarrow \mu')$ et en échangeant les deux dernières lignes, le même calcul montre l'alignement avec a'' et b'.

(c) Pour calculer les coordonnées barycentriques de c', il suffit de remplacer a' et b' par, respectivement a et b, c'est-à-dire, de remplacer λ' et μ' par 1 dans la formule précédente. On obtient donc

$$\left(\frac{(1-\lambda'')(\mu''-1)}{\lambda''\mu''-1}, \frac{\lambda''(\mu''-1)}{\lambda''\mu''-1}, \frac{\mu''(\lambda''-1)}{\lambda''\mu''-1}\right).$$

De même, en remplaçant λ'' et μ'' par 1, on obtient pour c''

$$\left(\frac{(1-\mu')(1-\lambda')}{1-\lambda'\mu'}, \frac{\lambda'(1-\mu')}{1-\lambda'\mu'}, \frac{\mu'(1-\lambda')}{1-\lambda'\mu'}\right).$$

(d) Encore d'après la question 1, il suffit de vérifier que les déterminant de la matrice formé par les coefficients barycentriques s'annule. Après factorisation des dénominateurs, cela donne

$$\begin{vmatrix} \lambda'(1-\lambda'')(\mu''-\mu')+\mu''(1-\mu')(\lambda''-\lambda') & (1-\lambda'')(\mu''-1) & (1-\mu')(1-\lambda') \\ \lambda'\lambda''(\mu''-\mu') & \lambda''(\mu''-1) & \lambda'(1-\mu') \\ \mu'\mu''(\lambda''-\lambda') & \mu''(\lambda''-1) & \mu'(1-\lambda') \end{vmatrix}.$$

En additionnant les deuxième et troisième lignes à la première, on obtient

$$\begin{vmatrix} \lambda'(\mu''-\mu')+\mu''(\lambda''-\lambda') & \lambda''\mu''-1 & 1-\lambda'\mu' \\ \lambda'\lambda''(\mu''-\mu') & \lambda''(\mu''-1) & \lambda'(1-\mu') \\ \mu'\mu''(\lambda''-\lambda') & \mu''(\lambda''-1) & \mu'(1-\lambda') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda''\mu''-\lambda'\mu' & \lambda''\mu''-1 & 1-\lambda'\mu' \\ \lambda'\lambda''(\mu''-\mu') & \lambda''(\mu''-1) & \lambda'(1-\mu') \\ \mu'\mu''(\lambda''-\lambda') & \mu''(\lambda''-1) & \mu'(1-\lambda') \end{vmatrix}.$$

Mais en additionnant $\lambda'\mu'$ fois la seconde colonne et $\lambda''\mu''$ fois la troisième, on trouve pour le premier coefficient

$$\lambda'\lambda''\mu'\mu'' - \lambda'\mu' + \lambda''\mu'' - \lambda'\lambda''\mu'\mu'' = \lambda''\mu'' - \lambda'\mu' \;;$$

pour le second coefficient

$$\lambda'\lambda''\mu'\mu'' - \lambda''\lambda'\mu' + \lambda'\lambda''\mu'' - \lambda'\lambda''\mu'\mu'' = \lambda'\lambda''(\mu''-\mu')\;;$$

et pour le troisième

$$\lambda'\lambda''\mu'\mu'' - \mu''\lambda'\mu' + \mu'\lambda''\mu'' - \lambda'\lambda''\mu'\mu'' = \mu'\mu''(\lambda''-\lambda').$$

On retrouve donc la première colonne qui est de fait combinaison linéaire des deux autres. Le déterminant de la matrice vaut donc zéro.

(e) C'est un cas particulier du théorème de Pappus.

Exercice 5.

1. La matrice de f est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. Il suffit de vérifier que le bloc 3×3 en haut à gauche est orthogonale, or par un calcul direct

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Son déterminant vaut $\frac{1}{4^3}\Big(2((-1)^2 - 3^2) + \sqrt{6}(-\sqrt{6} - 3\sqrt{6}) - \sqrt{6}(3\sqrt{6} + \sqrt{6})\Big) = \frac{1}{4^3}(-16 - 24 - 24) = -1$, il s'agit donc soit d'une anti-rotation, soit d'une réflexion glissée. Mais la trace de la linéarisé vaut 0, ça ne peut donc pas être une réflexion glissée puisque la trace d'une réflexion vaut 1. L'application f est donc une anti-rotation.