Faculté des Sciences et Techniques

Mathématique 1

cours et exercices résolus

Portail Marie Curie - Physique Chimie SPI

2018

Table de matières

Cours 2. Fonctions d'une variable réelle

Ce deuxième cours de Mathématiques 1 du portail Marie Curie étudie les propriétés des fonctions d'une variable réelle (appelées également des fonctions numériques). Après avoir rappelé les définitions des fonctions usuelles (cos, sin, tan, exp, ln, arcos, arcsin, arctan, ...), déjà étudiées au lycée, on étudiera la continuité et la dérivabilité d'une fonction, ainsi que les opérations de composition de deux fonctions, et la recherche de la fonction réciproque à une fonction donnée.

1. Fonctions d'une variable réelle

Une *fonction* f est un concept mathématique composé de trois parties :
- un ensemble A_f, nommé le *domaine* de f,
- un ensemble B_f, nommé le *co-domaine*, ou *ensemble cible* de f,
- une *règle d'association* qui fait correspondre à chaque élément x de l'ensemble A_f un élément $f(x)$ de l'ensemble B_f.

Pour une fonction f, et un élément $x \in A_f$, l'élément $f(x)$ s'appelle l'*image* de x, x étant un des *antécédents* de $f(x)$ par la fonction f.

Cette règle peut être donné sous diverses formes :
- une liste, comme pour la fonction f ci-dessus :
  domaine de f : $A_f = \{1; 2; 3\}$,
  co-domaine de f : $B_f = \mathbb{R}$,
  règle d'association de f : $f(1) = 1$, $f(2) = 5$, $f(3) = 17$,
- une formule explicite, comme pour la fonction g :
  domaine de g : $A_g = \mathbb{R}$,
  co-domaine de g : $B_g = \mathbb{R}$,
  règle d'association de g : $g(x) = x^2$,
- une ou plusieurs propriétés, comme pour la fonction arctangente :
  domaine d'arctangente : $A_{\text{arctan}} = \mathbb{R}$,
  co-domaine d'arctangente : $B_{\text{arctan}} = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,

règle d'arctangente : $\tan(\arctan(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, et
$\arctan(\tan(x)) = x \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Risque d'erreurs :

La règle d'association d'une fonction n'est pas la fonction elle-même, mais seulement une partie de la fonction. On peux parler de "la fonction x^2", uniquement si on a préalablement indiqué qui sont le domaine et le co-domaine de cette fonction. En particulier, la fonction x^2 définie sur le domaine $\mathbb{R}$ n'a pas du tout le mêmes propriétés que la fonction x^2 dont le domaine est $]0; +\infty[$.

Deux fonctions $f : A_f \to B_f$ et $g : A_g \to B_g$ sont égales si et seulement si les trois points suivants sont vérifiés :
- $A_f = A_g$: égalité des domaines
- $B_f = B_g$: égalité des ensembles d'arrivée
- $\forall x \in A_f, \quad f(x) = g(x)$: égalité des règles d'association.

Par exemple, les fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$g : \mathbb{R} \to [0;\ +\infty[, \qquad g(x) = x^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

ne sont pas égales, car les co-domaines des deux fonctions ne sont pas égales.

Ce chapitre est consacré aux *fonctions d'une variable réelle*, dites aussi *fonction numériques*, à savoir des fonctions pour lesquels le domaine et le co-domaine sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1.1. **Domaine maximal de définition.** Il existe des cas où, pour une certaine fonction numérique f, les ensembles A_f et B_f ne sont pas connus ; tout ce qu'on connait est la règle $f(x)$ d'association de la fonction.

Dans cette situation, on introduit la notion suivante :
le domaine maximal de définition associé à une règle $f(x)$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant tous les nombres réels pour lesquels la formule $f(x)$ peut être calculée. Ce domaine maximal sera noté $\mathcal{D}_f$.

Par conséquent, l'ensemble A_f sur lequel la fonction f est définie doit forcement faire partie de $\mathcal{D}_f$, mais rien ne l'oblige d'être $\mathcal{D}_f$ tout entier.

Dans le cas des fonctions numériques définies par des délation explicites utilisant uniquement les fonctions élémentaires, le domaine maximal de définition de f s'obtient en enlevant de $\mathbb{R}$ trois ensembles, correspondant à trois cas où les calculs ne peuvent pas s'effectuer en $f(x)$:

1) Si la formule $f(x)$ contient un dénominateur, ou, ce qui revient au même, un exposant négatif, donc si la fonction à étudier a la forme

$$f(x) = \ldots (e(x))^{-a} \ldots, \quad a > 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \frac{\ldots}{e(x)},$$

alors il faut enlever de $\mathbb{R}$ l'ensemble $D_1(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ e(x) = 0\}$ où l'expression $e(x)$ s'annule.

Exemples :

• $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Dans ce cas, $e(x) = \cos(x)$, donc Il faut enlever l'ensemble où $\cos(x)$ s'annule, à savoir $D_1(f) = \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. On a alors

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

• $g(x) = (1 + x^2) \times (6 - 5x + x^2)^{-\frac{5}{3}} \cos(x)$. Maintenant,

$$e(x) = (6 - 5x + x^2)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(6 - 5x + x^2)^5},$$

et $D_1(g) = \{2;\ 3\}$, car les $e(x)$ s'annule si et seulement $x^2 + 5x - 6 = 0$, et les racines du polynôme $6 - 5x + x^2$ sont $x = 2$ et $x = 3$. Alors

$$\mathcal{D}_g =]-\infty; 2[\, \cup\,]2; 3[\, \cup\,]3; +\infty[.$$

2) Si la formule de f contient des racines $n - ièmes$ pour n pair, ou, ce qui revient au même, un exposant positif et rationnel de dénominateur pair,

$$f(x) = \ldots \sqrt[2n]{e(x)} \ldots, \text{ ou } f(x) = \ldots (e(x))^{\frac{m}{2n}} \ldots, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

alors il faut enlever l'ensemble $D_2(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ e(x) < 0\}$, où l'expression $e(x)$ est strictement négative.

Exemples :

• $f(x) = \sin(x)\,(\exp(x) - 1)^{\frac{1}{2}}$. On a $e(x) = \exp(x) - 1$, et il faut enlever l'ensemble ou $\exp(x) - 1$ est strictement négatif, donc où $\exp(x) < 1$. Mais $\exp(0) = 1$, et l'exponentielle est une fonction croissante ; il résulte que $D_2(f) =]-\infty;\ 0[$.

• $g(x) = \sqrt[4]{x + 3}$. Dans ce cas, $e(x) = x + 3$, et on doit enlever l'ensemble $D_2(g) =]-\infty;\ -3[$ où l'expression $x+3$ est strictement négative.

3) Si la formule de f contient la fonction logarithme, donc

$$f(x) = \ldots \ln(e(x)) \ldots,$$

alors il faut enlever l'ensemble $D_3(f)$ où l'expression $e(x)$ est négative ou nulle, $D_3(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ e(x) \leq 0\}$.

Exemple :

• $f(x) = \ln(x + 1)$. On a $e(x) = x + 1$, et on enlève $D_3(f) =]-\infty; -1]$, c'est à dire l'ensemble où l'expression $x+1$ est negative ou nulle.

Pour déterminer le domaine de définition pour une fonction, on peut être amené à appliquer toutes les étapes 1 à 3, et ça même à plusieurs reprises. Prenons l'exemple de la règle d'association

$$f(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{(x + 3)^{\frac{3}{4}}}.$$

Ainsi, le fait que la formule $f(x)$ a un dénominateur, nous oblige d'enlever l'ensemble où le dénominateur s'annule :

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R} :\ (x + 3)^{\frac{3}{4}} = 0\} = \{-3\};$$

l'existence d'un exposant dont le dénominateur est pair demande qu'on enlève l'ensemble :

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R} :\ \ x + 3 < 0\} =]-\infty;\ -3[;$$

le premier logarithme de l'expression de $f(x)$ demande qu'on enlève l'ensemble où son argument est négatif ou nul :

$$D_3 = \{x \in \mathbb{R} :\ \ \ln(x) \leq 0\} =]0;\ 1],$$

tandis que le deuxième logarithme demande qu'on enlève les valeurs de x pour lesquelles son argument est plus petit ou égal à zéro (on doit appliquer encore une fois l'étape trois) :

$$D_4 = \{x \in \mathbb{R} :\ \ x \leq 0\} =]-\infty;\ 0].$$

Donc, le domaine maximal de définition de f est :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus (\{-3\}\ \cup]-\infty; -3[\ \cup\ ]0; 1]\ \cup\ ]-\infty;\ 0]) =]1; +\infty[.$$

La définition du graphique (ou graphe) d'une fonction clôt cette section.

Soit $f : A_f \to B_f$ une fonction numérique ; les points $(x;\ f(x))$, pour toutes les valeurs $x \in A_f$, forment dans le plan $0XY$ une figure géométrique, appelée le graphique de f.

Le graphique d'une fonction réelle est souvent une courbe simple : une droite pour les fonctions affines

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b, \ \ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

une parabole pour les fonctions de deuxième degré

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = ax^2 + bx + c, \ \ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

un demi-cercle pour la fonction

$$h : [-1,\, 1] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

1.2. **Fonctions injectives, surjectives et bijectives.**

Soit $f : A_f \to B_f$ une fonction. Si la fonction f ne prend pas deux fois la même valeur, à savoir si

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \in A_f,$$

alors elle est appelée *injective*.

Si la fonction f couvre toutes les valeurs de B_f, à savoir

$$\forall y \in B_f,\ \exists x \in A_f, \ \text{ t.q. } \ f(x) = y,$$

la fonction f sera appelée *surjective*.

Une fonction qui es à la fois injective et surjective, s'appelle *bijective*.

Question 22. *Trouvez le seul nombre réel a tel que la fonction*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a\, x$$

ne soit pas bijective.

Question 23. *Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. La fonction*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c,$$

est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Question 24. *Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit en même temps périodique et bijective ?*

1.3. **Composition de deux fonctions.** En plus des simples addition, soustraction, multiplication et division, il existe un procédé très puissant qui, à partir de deux fonctions $f : A_f \to B_f$ et $g : A_g \to B_g$, en construit une troisième, nommée la composition de f et g, et notée $f \circ g$.

L'idée est d'effectuer les deux formules de calcul de f et de g l'une à la suite de l'autre, en prenant comme variable dans f le résultat du calcul $g(x)$; on est ainsi amené à calculer non pas $f(x)$ mais $f(g(x))$.

Comme toute fonction, $f \circ g$ est composée des mêmes trois parties. On doit donc définir la règle d'association de $f \circ g$, son domaine ainsi que son co-domaine.

1.3.1. *Définition de $f \circ g$.*

Soit $f : A_f \to B_f$ et $g : A_g \to B_g$, deux fonctions. Pour calculer la composition de f et g il faut procéder comme suit.

a) On vérifie si la condition $B_g \subset A_f$ est satisfaite (si elle ne l'est pas, la composition ne peut pas se faire).

b) On calcule la règle d'association de $f \circ g$. Cette règle s'obtient à partir des règles de $f(x)$ et $g(x)$ en remplaçant le symbole x dans la formule de f, toutes les fois quand il apparait, par $g(x)$, la formule de g toute entière, et en faisant ensuite tous les calculs et simplifications possibles.

Prenons l'exemple de $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ et $g(x) = \ln(x+1)$; pour trouver la formule de $f \circ g$ on doit remplacer les deux x qui apparaissent dans la formule de f par $\ln(x+1)$, et on doit faire les calculs :

$$(f\circ g)(x)=\frac{e^{\ln(x+1)}}{\ln(x+1)+1}=\frac{x+1}{\ln(x+1)+1}.$$

c) Par convention, le domaine de $f\circ g$ est A_g, tandis que le codomaine de $f\circ g$ est B_f :

$$A_{f\circ g}=A_g,\qquad B_{f\circ g}=B_f.$$

Prenons l'exemple des compositions $f\circ g$ et $g\circ f$, quand f et g sont les fonctions suivantes :

$$f:]0;+\infty[\to\mathbb{R},\quad f(x)=\ln(x),$$
$$g:\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2}-1;\ \frac{\pi}{2}-1\right[,\quad g(x)=\arctan(x)-1.$$

On a donc $A_f=]0;+\infty[$, $B_f=\mathbb{R}$, $A_g=\mathbb{R}$ et $B_g=\left]-\frac{\pi}{2}-1;\ \frac{\pi}{2}-1\right[$.

La condition de compatibilité pour $f\circ g$ est $B_g\subset A_f$; dans notre cas, ça donne

$$\left]-\frac{\pi}{2}-1;\ \frac{\pi}{2}-1\right[\subset]0;+\infty[,$$

ce qui est faux, car le nombre $-\frac{\pi}{2}-1$ appartient à B_g, mais est négatif, donc il ne peut pas appartenir à $A_f=]0;+\infty[$.

La composition $f\circ g$ ne peut donc pas se faire.

La condition de compatibilité pour $g\circ f$ est $B_f\subset A_g$, donc

$$\mathbb{R}\subset\mathbb{R},$$

ce qui est vrai. On peut donc calculer la fonction

$$g\circ f:]0;+\infty[\to\left]-\frac{\pi}{2}-1;\ \frac{\pi}{2}-1\right[,$$

avec

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\arctan(\ln(x))-1.$$

Question 25. *Soit A, B C trois sets, et $f:B\to C$ et $g:A\to B$ deux fonctions injectives (respectivement surjectives). Est-ce que $f\circ g$ peut se calculer ? Si oui, est-ce que $f\circ g$ est une fonction injective (respectivement surjective) ?*

1.4. **Fonction réciproque d'une fonction donnée.**

Soit $f:A_f\to B_f$ une fonction réelle bijective. Alors, pour chaque $y\in B_f$, il y a un unique nombre x dans A_f tel que $f(x)=y$.

La fonction réciproque, noté f^{-1}, de f est la fonction définie sur B_f, à valeurs en A_f, telle que

$$f^{-1}(y)=x\forall y\in B_f.$$

Parce que $f(x)=y$, on obtient que

$$f(f^{-1}(x))=x\ \ \forall x\in B_f,\qquad f^{-1}(f(x))=x\ \ \forall x\in A_f.$$

Ils existent des nombreuses fonctions qui ne sont pas bijectives, et n'ont pas de fonction réciproque. L'existence de f^{-1} c'est plutôt l'exception que la règle.

Dans le cas des fonctions bijectives d'une variable réelle, les graphiques des fonctions f et f^{-1} sont deux courbes du plane OXY symétriques par rapport à la droite d'équation $X=Y$ (donc symétriques par rapport à la bissectrice des axes de coordonnées).

Pour trouver f^{-1}, il faut d'abord déterminer si la fonction f est bijective, et ensuite déterminer f^{-1}, la formule de calcul de la fonction réciproque de $f(x)$. Pour cela, on va résoudre l'équation $f(y)=x$, où l'inconnue est y, et x est un paramètre.

a) Injectivité de f : On résolve l'équation $f(y)=x$, et, s'il existe au moins une valeur de $x\in B_f$ pour laquelle l'équation $f(y)=x$ a plus d'une solution appartenant à A_f, alors f n'est pas injective. Si, au contraire, pour tout $x\in B_f$, l'équation $f(y)=x$ a une solution en A_f, ou aucune solution en A_f, alors f est injective.

b) subjectivité de f : On résolve l'équation $f(y)=x$, et, s'il existe au moins une valeur de $x\in B_f$ pour laquelle l'équation $f(y)=x$ ou bien n'a aucune solution en A_f, alors f n'est pas surjective. Si, au contraire, pour tout $x\in B_f$, l'équation $f(y)=x$ a au moins une solution en A_f, alors f est surjective.

Si la fonction f est injective et surjective (donc bijective) alors, pour toutes les valeurs de $x \in B_f$, l'équation $f(y) = x$ a une ou plusieurs solutions, mais exactement une d'entre elles appartient à A_f : alors f^{-1} existe, et $f^{-1}(x) = y$, la solution ainsi obtenue.

Prenons l'exemple de la fonction

$$f :]-2;\ +\infty[\to]-\infty;\ 1[, \quad f(x) = \frac{x+1}{x+2}.$$

Pour trouver f^{-1} on doit résoudre, pour chaque nombre réel $x \in]-\infty;\ 1[$ l'équation

$$f(y) = \frac{y+1}{y+2} = x,$$

(l'inconnue est y), et voir combien de ses solutions appartient à $]-2;\ +\infty[$.

En faisant les produits en croix, l'équation $f(y) = \frac{y+1}{y+2} = x$ devient $y+1 = (y+2)x$, donc $y+1 = yx+2x$. On peut regrouper d'après y, et avoir $y(1-x) = 2x-1$. De plus, parce que $x \in]-\infty;\ 1[$, il résulte que $x < 1$, donc que $x-1 < 0$, et alors et on peut diviser par $x-1$. On en obtient

$$y = \frac{2x-1}{1-x}.$$

L'équation $f(y) = x$ a donc exactement une solution réelle pour chaque $x \in B_f =]-\infty;\ 1[$.

Il faut vérifier maintenant que cette unique solution appartient bien à l'ensemble $A_f =]-2;\ +\infty[$, c'est-à-dire vérifier si oui ou non

$$\frac{2x-1}{1-x} > -2 \quad \forall x \in]-\infty;\ 1[.$$

Mais

$$\left[\frac{2x-1}{1-x} > -2\right] \Leftrightarrow \left[\frac{2x-1}{1-x} + 2 > 0\right] \Leftrightarrow \left[\frac{2x-1+2-2x}{1-x} > 0\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{1-x} > 0\right] \Leftrightarrow [1-x > 0] \Leftrightarrow x \in]-\infty;\ 1[.$$

On peut donc conclure que, pour chaque $x \in B_f =]-\infty;\ 1[$, l'équation $(y) = x$ a exactement une solution appartenant à l'intervalle $A_f =]-2;\ +\infty[$, à savoir $y = \frac{2x-1}{1-x}$.

La fonction réciproque de

$$f :]-2;\ +\infty[\to]-\infty;\ 1[, \qquad f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

est par conséquent

$$f^{-1} :]-\infty;\ 1[\to]-2;\ +\infty[, \qquad f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{1-x}.$$

Il se peut que la fonction réciproque n'existe pas, même dans des cas très simples. Soit ainsi

$$f : \mathbb{R} \to [0;\ +\infty[, \qquad f(x) = x^2.$$

Pour trouver f^{-1}, on doit résoudre l'équation $f(y) = y^2 = x$ quand $x \in B_f = [0;\ +\infty[$, et vérifier que cette équation n'a qu'une seule solution $y \in A_f = \mathbb{R}$. Or, pour chaque $x > 0$, cette équation admet deux solutions distinctes : $y = \sqrt{x}$ et $y = -\sqrt{x}$, toutes les deux dans $A_f = \mathbb{R}$. La fonction f n'est donc pas injective, et n'a pas de fonction réciproque.

Prenons maintenant la fonction

$$f : [0;\ +\infty[\to [0;\ +\infty[, \qquad f(x) = x^2;$$

on voit, que, par rapport à l'exemple précédent, on a gardé la même formule $f(x)$ et le même ensemble cible B_f, mais maintenant l'ensemble de définition A_f a été réduit de $\mathbb{R}$ à $[0;\ +\infty[$.

Pour trouver f^{-1}, il faut résoudre la même équation, $f(y) = y^2 = x$, pour les mêmes valeurs du paramètre x, à savoir $x \in B_f = [0; +\infty[$. La seule différence est qu'il faut cette fois-ci vérifier si cette équation a exactement une solution y dans l'ensemble $A_f = [0;\ +\infty[$, et non plus dans l'ensemble $\mathbb{R}$. Mais, parmi les deux solutions réelles de l'équation $y^2 = x$, à savoir $y = \sqrt{x}$ et $y = -\sqrt{x}$, il n'y a qu'une seule solution positive : $y = \sqrt{x}$.

Donc, pour chaque $x \in B_f$, même si l'équation $f(y) = y^2 = x$ a deux solutions, il n'y a qu'une d'entre elles dans l'intervalle $A_f = [0; +\infty[$; on peut donc affirmer que la fonction f admet une fonction réciproque, à savoir

$$f^{-1} : [0;\ +\infty[\to [0;\ +\infty[, \qquad f(x) = \sqrt{x}.$$

Risque d'erreurs :

Demander si "la fonction x^2 admet une fonction réciproque" n' aucun sens, si on ne précise d'abord son domaine et son co-domaine.

2. Continuité et dérivabilité d'une fonction réelle

2.1. Étude de la continuité d'une fonction réelle.

Pour définir la continuité et la dérivabilité d'une fonction réelle, nous avons besoin de la notion de convergence de suites.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite converge vers le nombre réel u si :

- pour tout $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il, on peut trouver $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u - u_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$.

La valeur $u \in \mathbb{R}$ est la limite de la suite u_n. Cette définition décrit la convergence d'une suite vers un nombre réel. Mais ils existent des suites, par exemple $u_n = n$ qui, intuitivement, "convergent vers $+\infty$" ; pour donner un sens précis à cette intuition, on prolonge la notion de convergence aux valeurs infinies $+\infty$ et $-\infty$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite u_n converge vers $+\infty$ (ou $-\infty$) si

- pour chaque $M > 0$ existe un indice $n_M \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq M$ (ou $u_n \leq -M$) pour tous $n \geq n_M$.

Exemples : 1) La suite $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha}$ converge vers $u = 0$ pour tout nombre réel $\alpha > 0$. En effet, pour chaque $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre pour n_ε un nombre entier plus grand que la valeur réelle $\dfrac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$ (par exemple, on peut choisir $n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right] + 1$, où $[a]$ signifie la partie entière du nombre réel a). Alors, pour chaque $n \geq n_\varepsilon$ on a :

$$|u - u_n| = \left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| = \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(n_\varepsilon)^\alpha} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

2) La suite n^α converge vers $+\infty$ pour tout $\alpha > 0$. Soit donc $M > 0$ un nombre réel ; on prendra pour n_M un nombre entier plus grand que $M^{1/\alpha}$, par exemple $n_M = \left[M^{1/\alpha}\right] + 1$. Alors, pour tout $n \geq n_M$, il vient que :

$$u_n = n^\alpha \geq (n_M)^\alpha \geq (M^{1/\alpha})^\alpha = M.$$

Comme on peut se convaincre en étudiant les deux précédents exemples, si la suite u_n converge vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors la suite $\dfrac{1}{u_n}$ converge vers 0, et réciproquement.

Soit $f : A_f \to B_f$ une fonction réelle, et x_0 un point de A_f. La fonction f est continue en x_0 si, pour toute suite $(x_n) \in A_f$ qui converge vers x_0, on a

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Une fonction s'appelle continue si elle est continue en chaque point de son domaine de définition.

Géométriquement, une fonction continue est caractérisée par un graphique fait d'une courbe continue, donc sans coupures.

Les fonctions élémentaires étudiés plus tôt offrent des bons exemples de fonctions continues. Un autre exemple très souvent rencontré dans les applications est le cas des fonctions obtenues par recollement. Prenons le cas général d'une fonction

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < a \\ b & x = a \\ f_2(x) & x > a \end{cases} ;$$

ici f_1 et f_2 sont deux fonctions continues (différentes), et b est un nombre réel.

Il est facile à voir que la fonction $f$est continue en $x = a$ si :

$$\lim_{x \to a, x < a} f_1(x) = b = \lim_{x \to a, x > a} f_2(x).$$

Il reste donc à calculer les deux limites en $x = a$, à droite, pour f_1, à gauche pour f_2, et à les comparer à b, la valeur de la fonction f en $x = a$. Comme d'habitude, on note $[x \to a, x < a]$ avec $x \to a^-$ et $[x \to a, x > a]$ par $x \to a^+$.

2.1.1. *Continuité et théorème des valeurs intermédiaires.*
Soit l'équation

$$(x+1)\, 2^x = 1025. \tag{1}$$

D'un point de vue pratique, on pose deux questions :
• est-ce que l'équation (1) a des solutions,
• si oui, comment les trouver avec une bonne précision.

Comme il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation (1) (donc pas de formule pour ses solutions, comme on peut avoir pour les équations du deuxième degré, par exemple), il faut utiliser d'autres méthodes.

La notion qui nous permettra de savoir si une équation a ou non des solutions est le Théorème des Valeurs Intermédiaires.

Théorème 11. *Soit $a < b$ deux nombres du domaine de définition d'une fonction f, et c une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ (donc $f(a) \le c \le f(b)$ ou $f(b) \le c \le f(a)$). Si les deux conditions suivantes :*
i) L'intervalle $[a, b]$ est entièrement contenu en le domaine de définition de la fonction f,
ii) La fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$,
sont remplies, alors il existe x entre a et b tel que $f(x) = c$ (donc la fonction f prend la valeur intermédiaire c).

Les deux exemples qui suivent montrent que les conditions *i*) et *ii*) doivent absolument être remplies, sinon la fonction f peut très bien ne plus prendre la valeur intermédiaire c.

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, et les valeurs $a = -1$ et $b = 1$. Alors $f(a) = -1$, $f(b) = 1$, ce qui fait que $c = 0$ est une valeur intermédiaire. Mais il est impossible d'avoir

$$f(x) = \frac{1}{x} = 0,$$

donc la fonction f ne prend pas la valeur intermédiaire 0.

On voit facilement que la fonction $f(x)$ est continue, donc la condition *ii*) est vérifiée ; c'est la condition *i*) qui n'est pas remplie dans ce cas, car $A_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc l'intervalle $[-1; 1]$ n'est pas complètement contenu dans $\mathcal{D}_f$ (le nombre 0 fait partie de $[-1; 1]$ mais pas dans $\mathcal{D}_f$).

Soit maintenant

$$\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Pi(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ,$$

la fonction porte, et $a = 0$, $b = 1$. On a $f(a) = 1$ et $f(b) = 0$; donc $c = \frac{1}{2}$ est une valeur intermédiaire. Pourtant la fonction Π ne prend jamais la valeur $\frac{1}{2}$, ni aucune autre valeur entre 0 et 1, d'ailleurs.

Dans ce cas, $A_\Pi = \mathbb{R}$, donc la condition *i*) est remplie. Mais, de toute évidence, la fonction porte n'est pas continue (la graphique a deux ruptures, en $x = -\frac{1}{2}$ et en $x = \frac{1}{2}$), donc la condition *ii*) n'est pas respectée.

Appliquons ce théorème pour trouver de manière approchée une solution pour l'équation

$$f(x) = 0. \tag{2}$$

En effet, si on peut trouver un nombre réel a tel que $f(a) < 0$, un autre nombre b tel que $f(b) > 0$, et si on peut vérifier les deux conditions $i)$ et $ii)$, alors le théorème 11 nous assure que l'équation (2) a au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$. Plus les valeurs de a et b sont rapprochées, plus la précision avec laquelle on connait la solution de l'équation (2) augmente.

Reprenons l'exemple de l'équation (1). On définit la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+1)\, 2^x - 1025,$$

et on cherche à prouver que cette fonction s'annule pour au moins une valeur de x. Remarquons d'abord que $A_f = \mathbb{R}$ et que f est continue, ce qui veut dire que les conditions $i)$ et $ii)$ du théorème des valeurs intermédiaires sont remplies pour toute paire a, b.

Il nous reste à trouver un point a pour lequel $f(a) < 0$, et un autre point b pour lequel $f(b) > 0$. On va bien sûr s'intéresser aux valeurs a et b pour lesquelles on puisse facilement calculer $f(a)$ et $f(b)$; dans ce cas, il s'agit des nombres naturels. Ainsi on voit que :

$$f(7) = (7+1)2^7 - 1025 = 2^{10} - 1024 - 1 = -1 < 0,$$

$$f(8) = (8+1)2^8 - 2^{10} - 1 = 5\, 2^8 - 1 = 1279 > 0.$$

Appliqué pour $f(x) = (x+1)\ 2^x - 1025$, $a = 7$ et $b = 8$, le théorème des valeurs intermédiaires affirme l'existence d'une solution de l'équation (1) ; de plus, on sait que cette solution se situe entre les nombres 7 et 8 (on connaît donc sa partie entière, à savoir 7, mais aucune de ses décimales).

2.2. Étude de la dérivabilité d'une fonction réelle.

Un élément x d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ s'appelle *point intérieur* de A, s'il existe un nombre $a > 0$ tel que A contienne non seulement le point x, mais tout l'intervalle $[x - a; x + a]$.

Soit $f : A_f \to B_f$ une fonction réelle, et x_0 un point intérieur de A_f. La fonction f est dérivable en x_0 s'il existe un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute suite $(x_n) \in A_f$ qui converge vers x_0, avec la propriété que

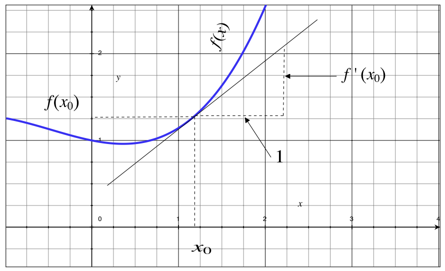
$$x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

on a

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Si elle existe, la valeur ℓ s'appelle la dérivée de f en x_0, et se note $f'(x_0)$. Une fonction s'appelle dérivable si elle est continue en chaque point intérieur de son domaine de définition.

Géométriquement, une fonction continue est caractérisée par un graphique fait d'une courbe lisse, sans anfractuosités, qui admet en tout point une tangente non-verticale à son graphique. La valeur de la dérivée est précisément la pente de la tangente.



Soit une fonction de la forme

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < a \\ b & x = a \\ f_2(x) & x > a \end{cases},$$

où f_1 et f_2 sont deux formules (différentes), et b est un nombre réel. On veut savoir si la fonction $f(x)$ est dérivable ou non en $x = a$.

On commence par rappeler un résultat de base dans l'étude de la dérivabilité.

Théorème 12. *Si une fonction est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.*

Vérifier si la fonction f est dérivable en $x = a$ nécessite donc deux étapes.
Étape 1) : On vérifie si la fonction f est continue en $x = a$. Si non, on en conclue qu'elle n'est pas dérivable ; si oui, on passe à l'étape suivante.
Étape 2) : On construit la fonction

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) = \frac{f_1(x)-b}{x-a} & x < a \\ h_2(x) = \frac{f_2(x)-b}{x-a} & x > a \end{cases},$$

et on vérifie si

$$\lim_{x\to a^-} h_1(x) = \lim_{x\to a^+} h_2(x).$$

Si les deux limites n'existent pas, ou ne sont pas égales, alors f n'est pas dérivable en $x = a$; si les deux limites on la même valeur, alors f est dérivable en $x = a$, et on a

$$f'(a) = \lim_{x\to a^-} h_1(x) = \lim_{x\to a^+} h_2(x).$$

Prenons l'exemple de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases},$$

La première étape est vérifiée aisément, car

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0 = \lim_{x\to 0^+} -x^2.$$

On doit calculer donc les fractions

$$h_1(x) = \frac{x^2 - 0}{x - 0} = x, \qquad h_2(x) = \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = -x,$$

et les limites

$$\lim_{x\to 0^-} x = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

On peut donc conclure que la fonction f est dérivable en $x = 0$, et que $f'(0) = 0$.

On reprendra l'exemple précèdent avec une petite modification :

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x > 0 \end{cases},$$

La première étape est à nouveau vérifiée aisément, car

$$\lim_{x\to 0^-} x = 0 = \lim_{x\to 0^+} -x.$$

On doit calculer donc les fractions

$$h_1(x) = \frac{x - 0}{x - 0} = 1, \qquad h_2(x) = \frac{-x - 0}{x - 0} = -1,$$

et les limites

$$\lim_{x\to 0^-} 1 = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} -1 = -1.$$

On peut donc conclure que la fonction f n'est pas dérivable en $x = 0$, car

$$1 = \lim_{x\to a^-} h_1(x) \neq \lim_{x\to a^+} h_2(x) = -1.$$

Risque d'erreurs :
La fonction f de l'exemple précédent est continue en $x = 0$ mais pas dérivable. Le théorème 12 n'est pas valable dans l'autre sens - une fonction qui est continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce même point.

Appliquons le théorème de Lagrange pour trouver la solution de l'équation (1) avec plus de précision. Nous avons déjà vu (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires) qu'une telle solution, disons x_0 existe, et qu'elle est comprise entre 7 et 8 : $x_0 \in]7; 8[$.

Appliquons maintenant le théorème de Lagrange sur l'intervalle $]7;x_0[$. On en déduit l'existence d'un nombre $c \in]7;x_0[$ tel que :

$$\frac{f(x_0)-f(7)}{x_0-7} = f'(c).$$

Mais $f(x_0)=0$, tandis que $f(7)=-1$. On en obtient donc

$$x_0 = 7 + \frac{1}{f'(c)}.$$

En dérivant la fonction f on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'2^x + (x+1)(2^x)' = 2^x + (x+1)\left(\left(e^{\ln(2)}\right)^x\right)' \\ &= 2^x + (x+1)\left(e^{\ln(2)\,x}\right)' = 2^x + (x+1)\ln(2)\left(e^{\ln(2)\,x}\right) \\ &= 2^x + (x+1)\ln(2)2^x = (1+\ln(2)+\ln(2)\,x)2^x. \end{aligned}$$

La fonction $f'(x)$ est le produit de deux fonctions : la fonction affine $1+\ln(2)+\ln(2)\,x$, et la fonction exponentielle 2^x ; comme ces deux fonctions sont croissantes, il vient que $f'(x)$ est une fonction croissante, donc $f'(7) \le f'(c) \le f'(x_0) \le f'(8)$. En d'autres mots,

$$(1+8\ln(2))2^7 \le f'(c) \le (1+9\ln(2))2^8.$$

Donc

$$\frac{1}{(1+9\ln(2))2^8} \le \frac{1}{f'(c)} \le \frac{1}{(1+8\ln(2))2^7},$$

d'où il vient que

$$7 + \frac{1}{256(1+9\ln(2))} \le x_0 \le 7 + \frac{1}{128(1+8\ln(2))}.$$

Pour continuer, il faut trouver un encadrement de $\ln(2)$; on appliquera à nouveau le théorème des accroissements finis, cette fois-ci pour la fonction $g(x)=\ln(x)$ sur l'intervalle $]2;e[$. On en déduit qu'il existe un nombre $d \in]2;e[$ tel que

$$\frac{\ln(e)-\ln(2)}{e-2} = g'(d) = \frac{1}{d},$$

donc

$$\ln(2) = 1 - \frac{e-2}{d}.$$

Parce que $2<d<e$, il vient que

$$2 - \frac{e}{2} < \ln(2) < \frac{2}{e}.$$

Utilisons pour finir l'inégalité très connue : $2,7 < e < 2,8$, pour déduire que

$$\frac{3}{5} < \ln(2) < \frac{20}{27}.$$

On peut finalement dire que

$$7 + \frac{1}{256\left(1+\dfrac{20}{3}\right)} \le x_0 \le 7 + \frac{1}{128\left(1+\dfrac{24}{5}\right)},$$

à savoir

$$7 + \frac{3}{5888} \le x_0 \le 7 + \frac{5}{3712}.$$

En écriture décimale, ça fait $7,000509 < x_0 < 7,001346$. On remarque que le milieu de l'intervalle $[7,000509;\ 7,001346]$, à savoir $7,000927$ est très proche de la valeur exacte $x_0 = 7,001193...$ de l'équation, donc une erreur de seulement $0,000266 \approx \frac{1}{5000}$.

3. Calcul de la dérivée d'une fonction réelle

Dans cette section, on propose plusieurs méthodes pour calculer la dérivée d'une fonction f.

3.1. **Le cas des fonctions élémentaires.** Rappelons les formules des dérivées des fonctions élémentaires :

1) $\boxed{(x^a)' = a\,x^{a-1}}$, où a est un nombre réel ; en particulier, $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\,x\,\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; et $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$.

2) $\boxed{(e^x)' = e^x}$. 3) $\boxed{(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}}$. 4) $\boxed{(\sin(x))' = \cos(x)}$.
5) $\boxed{(\cos(x))' = -\sin(x)}$.

3.2. **Dérivée d'une somme, d'un produit ou d'une division.** Les fonctions qui apparaissent dans les applications combinent les fonctions élémentaires à l'aide des opérations arithmétiques usuelles : somme, multiplication, division ; il faut connaître les dérivées du résultat des opérations arithmétiques :

somme $\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$

produit $\boxed{(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}$

division $\boxed{\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}}$.

On peut d'ores et déjà trouver la dérivée d'un polynôme :

6) $\boxed{(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)' = n\, a_n\, x^{n-1} + \ldots + a_2 x + a_1}$;

(en particulier, $\left(a\, x^2 + b\, x + c\right)' = 2a\, x + b$), mais aussi les dérivées des fonctions trigonométriques tangente et cotangente :

7) $(\tan(x))' = \left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \dfrac{(\sin(x))' \cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)}$
$= \dfrac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$,

donc $\boxed{(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).}$

8) $(\text{cotan}(x))' = \left(\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \dfrac{(\cos(x))' \sin(x) - \cos(x)(\sin(x))'}{\sin^2(x)}$
$= \dfrac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x))}{\sin^2(x)}$
$= -\dfrac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \text{cotan}^2(x)$

donc $\boxed{(\text{cotan}(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \text{cotan}^2(x).}$.

On peut également dériver des expressions comme :

9) $\left(\sin^2(x)\right)' = (\sin(x))' \sin(x) + \sin(x)\,(\sin(x))' = 2\sin(x)\cos(x)$.
10) $\left(\sin^3(x)\right)' = (\sin(x))' \sin^2(x) + \sin(x)\,\left(\sin^2(x)\right)'$
$= \cos(x)\sin^2(x) + \sin(x) 2\sin(x)\cos(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$.

3.3. **Dérivée d'une fonction composée.**
L'opération la plus importante dans la construction d'une fonction est celle de composition des fonctions. Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions ; la dérivée de leur fonction composée $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ est
$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times\ f'(x)}$.
Cette relation peur être utilisée de deux manières pour dériver une fonction $h(x)$:
i) $h(x) = g(f(x))$, où f et g sont deux fonctions plus simples : on applique tout simplement la formule, à savoir $h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$
ii) $h(x)$ n'est pas la composition de deux fonctions plus simples, mais on peut trouver une fonction $g(x)$ telle que, si on compose g et h, le résultat $f(x) = g(h(x))$ soit une fonction simple, alors on a $f'(x) = g'(h(x))\, h'(x)$, d'où $h'(x) = \dfrac{f'(x)}{g'(h(x))}$.

$\boxed{\text{Méthode } i)}$ 1) Pour dériver $h(x) = \sin^3(x)$:
α) on remarque que $h(x) = g(f(x))$, où $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x^3$.
β) On calcule $f'(x) = \cos(x)$, et $g'(x) = 3x^2$. Donc $g'(f(x)) = 3f^2(x)$, et comme $f(x) = \sin(x)$, on a $g'(f(x)) = 3\sin^2(x)$.
γ) On écrit $\left(\sin^3(x)\right)' = (g(f(x)))' = g'(f(x))\, f'(x) = 3\sin^2(x)\, \cos(x)$.
Donc $\left(\sin^3(x)\right)' = 3\sin^2(x)\, \cos(x)$.
2) Pour dériver $h(x) = a^x$:

α) on remarque que $a = e^{\ln(a)}$, donc $h(x) = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{\ln(a)\,x} = g(f(x))$, où $f(x) = \ln(a)\,x$ et $g(x) = e^x$.

β) On calcule $f'(x) = \ln(a)$, et $g'(x) = e^x$. Donc $g'(f(x)) = e^{f(x)}$, et comme $f(x) = \ln(a)x$, on a $g'(f(x)) = e^{\ln(a)\,x}$.

γ) On écrit $(a^x)' = (g(f(x)))' = g'(f(x))\,f'(x) = e^{\ln(a)\,x}\ln(a) = \left(e^{\ln(a)}\right)^x \ln(a) = \ln(a)\,a^x$. Donc $\boxed{(a^x)' = \ln(a)\,a^x}$.

Méthode ii) 3) Pour dériver $h(x) = \arctan(x)$:

α) On pose $g(x) = \tan(x)$, et $f(x) = g(h(x)) = \tan(\arctan(x)) = x$.

β) On calcule $f'(x) = 1$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, et comme $h(x) = \arctan(x)$, on a $g'(h(x)) = \dfrac{1}{\cos^2(\arctan(x))}$.

γ) On écrit $h'(x) = \dfrac{f'(x)}{g'(h(x))} = \cos^2(\arctan(x))$. Pour calculer $\cos^2(\arctan(x))$, on voit que $x^2 = \tan^2(\arctan(x)) = \dfrac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))} = \dfrac{1-\cos^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}$, d'où $\cos^2(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Par conséquent, $\boxed{(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}}$.

3.4. Le domaine de dérivabilité d'une fonction réelle.

L'ensemble des points $x \in A_f$ où la fonction $f : A_f \to B_f$ est dérivable s'appelle domain de dérivabilité de f, et sera noté $A_{f'}$. En d'autres mots,

$$A_{f'} = A_f \cap \mathcal{D}_{f'}.$$

Soit par exemple

$$f : (]-\infty;\ -2[\cup]-1;\ +\infty[) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right);$$

Calculons tout d'abord la formule de la dérivée de $f(x)$; on introduit les fonctions $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = \frac{x+1}{x+2}$, et on observe que $f(x) = g(h(x))$. On doit donc calculer

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad h'(x) = \frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2},$$

et écrire que

$$f'(x) = g'(h(x))\ h'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x+2}}\ \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x+2}{x+1}.$$

Il est très simple de calculer $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, car il suffit d'enlever la seule valeur où le dénominateur de $f'(x)$ s'annule, à savoir $x = -1$. Donc

$$\begin{aligned} A_{f'} &= A_f \cap \mathcal{D}_{f'} = (]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[) \cap (\mathbb{R}\setminus\{-1\}) \\ &=]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[. \end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable par tout où elle est définie, car, après calculs il vient que $A_{f'} = A_f$.

Remarquons que, même si la formule qui donne $f'(x)$, donc $\frac{x+2}{x+1}$ peut se calculer en $x = -\frac{3}{2}$, car on a

$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{2-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1,$$

on ne peut pas dire que la fonction f est dérivable en $x = -\frac{3}{2}$, car elle n'est pas définie en ce point (le nombre $-\frac{3}{2}$ ne fait pas partie de l'ensemble de définition de f, $A_f =]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$.)

3.4.1. *Dérivabilité et théorème des accroissements finis.*

La notion de continuité d'une fonction, par le biais du théorème des valeurs intermédiaires, permet donc d'établir l'existence d'une solution, et de la déterminer avec une précision pas toujours très bonne, en constituant ainsi la première étape de la résolution de l'équation. Pour affiner ce résultat , on peut utiliser le théorème suivant, dit théorème des accroissements finis (ou théorème de Lagrange).

Théorème 13. *Soit $a < b$ deux nombres du domaine de définition d'une fonction f. Si les trois conditions suivantes :*
i) L'intervalle $[a, b]$ est entièrement contenu en le domaine de définition de la fonction f,
ii) La fonction f est continue sur l'intervalle $[a; b]$,
iii) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]a; b[$,
sont remplies, alors il existe une valeur $c \in]a; b[$ telle que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Ce résultat a un cas particulier important, le théorème de Rolle.

Théorème 14. *Soit $a < b$ deux nombres du domaine de définition d'une fonction f, tels que les condition i), ii) et iii) sont satisfaites, et en plus $f(a) = f(b)$. Alors, il existe une valeur $c \in]a; b[$ telle que $f'(c) = 0$.*

4. Limites de fonctions

Soit $f(x)$ une fonction réelle, et a un nombre réel. Pour calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, on doit d'abord remplacer x par a dans l'expression de f et faire les calculs.

4.1. **Arithmétique de l'infini.** Pour faire ce type de calculs, nous avons besoin des "tables arithmétiques de calcul avec l'infini", des "tables de valeurs limites des fonctions élémentaires", et de la "liste des limites remarquables".

Dans tous ces tableaux, quand les calculs peuvent se faire sans ambiguité, on fait figurer dans le tableau leurs résultats ; si en revanche on ne peut pas trouver de résultat, on inscrit dans le tableau FI, qui signifie "forme indéterminée". Dans tous ces tableaux, a et b sont deux nombres réels quelconques, et c et d sont deux nombres réels strictement positives.

Commençons par rappeler ici les tables des opérations arithmétiques (multiplication, addition et division).

$\times$	$-\infty$	-c	0^-	0^+	c	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	FI	$-\infty$	$-\infty$
-d	$+\infty$	cd	0^+	0^-	-cd	$-\infty$
0^-	FI	0^+	0^+	0^-	0^-	FI
0^+	FI	0^-	0^-	0^+	0^+	FI
d	$-\infty$	-cd	0^-	0^+	cd	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI	FI	$+\infty$	$+\infty$

$+$	$-\infty$	a	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
b	$-\infty$	a+b	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

/	$-\infty$	-c	0^-	0^+	c	$+\infty$
$-\infty$	FI	0^+	0^+	0^-	0^-	FI
-d	$+\infty$	c/d	0^+	0^-	-c/d	$-\infty$
0^-	$+\infty$	$+\infty$	FI	FI	$-\infty$	$-\infty$
0^+	$-\infty$	$-\infty$	FI	FI	$+\infty$	$+\infty$
d	$-\infty$	-c/d	0^-	0^+	c/d	$+\infty$
$+\infty$	FI	0^-	0^-	0^+	0^+	FI

Il faudra aussi prendre en compte les tables des valeurs limites des fonctions élémentaires :

a) la fonction puissance c^x (dont l'exponentielle est le cas particulier $c = e$) :

$$c^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0^+ \leq c < 1 \\ \text{FI} & c = 1 \\ 0^+ & 1 < c \end{cases}, c^{+\infty} = \begin{cases} 0^+ & 0^+ \leq c < 1 \\ \text{FI} & c = 1 \\ +\infty & 1 < c \end{cases},$$

$$(0^+)^{0^-} = (0^+)^{0^+} = (+\infty)^{0^-} = (+\infty)^{0^+} = \text{FI},$$

b) la fonction logarithme :

$$\ln(0^+) = -\infty, \qquad \ln(+\infty) = +\infty,$$

c) la fonction tangente (périodique de période π) :

$$\tan\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^-\right) = +\infty, \qquad \tan\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^+\right) = -\infty$$

d) la fonction arctangente (la réciproque de la fonction tangente) :

$$\mathrm{Arctan}(-\infty) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^+, \qquad \mathrm{Arctan}(+\infty) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-.$$

Complétons cette section par une liste (minimale) des limites à connaitre absolument (on rappelle que c et d sont deux nombres réels positifs) :

$\lim\limits_{x\to 0}(1+c\,x)^{\frac{1}{x}} = e^c$	$\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^c}{x^d} = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{c\,x}}{x^d} = +\infty}$$

4.2. **Formes indéterminées.** En faisant les calculs de $f(a)$, on peut rencontrer deux situations :

Cas 1 : On arrive, en faisant des calculs habituels, ou en utilisant les résultats du chapitre précédent, à trouver $f(a)$ (en obtenant un nombre fini, $-\infty$ ou $+\infty$), et alors la valeur ainsi obtenue est la limite recherchée.

Exemples :
i) $a = 0$ et $f(x) = \ln(\cos(x))$; dans ce cas, on a $\cos(0) = 1$ et $\ln(1) = 0$, donc $f(0) = 0$, at alors $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos(x)) = 0$.
ii) $a = 0^+$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$; on a $f(0) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Parfois, ce type de calculs doit être complété par l'utilisation du théorème de l'étau :
iii) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$. On sait que $-1 \le \cos(x) \le 1$; on s'intéresse d'abord aux limites

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{+\infty} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Comme

$$-\frac{1}{x} \le f(x) \le \frac{1}{x},$$

le théorème de l'étau prouve que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0.$$

Cas 2 : On tombe sur une forme indéterminée.

Il existe sept telles formes ; à titre d'exemple, nous prenons ici en compte seulement les deux cas les plus importantes. Ce qui est commun à toutes ces cas, est l'idée générale de modifier (de diverses manières) les expressions qui apparaissent dans les formes indéterminées, dans l'espoir de les éliminer.

Il existe des suites d'expression particulièrement simple, dont la limite peut être trouvée en remplaçant n par $+\infty$ dans leur formule, et en utilisant ensuite pour faire les calculs,

$\boxed{\boxed{\text{Forme } \infty - \infty}}$ En d'autres mots, la fonction f a la forme :

$$f = \ldots(d(x) - e(x))\ldots \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} d(x) = \lim_{x\to a} e(x) = +\infty.$$

1) Si $d(x) = \sqrt{u(x)}$ et $e(x) = \sqrt{v(x)}$, alors on peut utiliser l'expression réciproque, donc

$$d(x) - e(x) = \sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)} = \frac{(\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)})(\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)})}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}}$$

$$= \frac{u(x) - v(x)}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}}.$$

Exemple : $a = +\infty$, $d(x) = \sqrt{x+1}$ et $e(x) = \sqrt{x}$. Dans ce cas,

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = +\infty - \infty,$$

est une forme indéterminée ; on utilise l'expression réciproque,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}},$$

et la forme indéterminée a été éliminée :

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+.$$

2) Si on sait que les valeurs de $d(x)$ sont beaucoup plus grandes que les valeurs de $e(x)$ quand x s'approche de a, donc $\lim_{x\to a} \frac{e(x)}{d(x)} = 0$, alors on force $d(x)$ en facteur commun :

$$\lim_{x\to a}(d(x) - e(x)) = \lim_{x\to a} d(x)\left(1 - \frac{e(x)}{d(x)}\right) = \infty(1-0) = \infty.$$

Exemple : $a = +\infty$, $d(x) = e^x$ et $e(x) = x^2$. On sait (formule $E7$), page 8) que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0;$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - x^2) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = \infty(1-0) = \infty.$$

$\boxed{\text{Forme } \frac{0}{0}}$ La fonction f peut aussi ressembler à :

$$f = \dots \frac{d(x)}{e(x)} \dots \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} d(x) = \lim_{x\to a} e(x) = 0.$$

3) Dans le cas de cette forme indéterminée, on peut utiliser le théorème de l'Hospital ; pour peu que les dérivées du numérateur et du dénominateur soient plus simples que les fonctions $d(x)$ et $e(x)$ elles-mêmes, on peut voir l'indétermination disparaitre.

Exemple 1. *On cherche*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}.$$

Pour utiliser le théorème de l'Hospital, notons qu'on a : $a = 0$, $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin'(x)}{(1-\cos(x))'} = \lim_{x\to0^+} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(0^+)}{\sin(0^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

4.3. **Le Théorème de l'Hospital.**

Ce théorème (parfois écrit *de l'Hôpital*), affirme que : Soit $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions numériques, et $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ce théorème permet donc de remplacer le calcul de la limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ avec le calcul, qu'on espère plus simple, de la limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Prenons l'exemple du calcul de la limite $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x}$; dans ce cas, $a = 0$, $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$.

Le Théorème de l'Hospital donne :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin'(x)}{(x)'} = \lim_{x\to0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

4.4. **La tangente à une courbe.** Soit $f(x)$ une fonction réelle, et x_0 un point en lequel $f(x)$ est dérivable. Alors la droite tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ au graphique de la fonction $f(x)$ peut être décrite de manière équivalente d'une de ces trois manières :

1) la droite qui passe par le point $A(x_0, f(x_0))$ et est portée par le vecteur $\overrightarrow{v}$: $(1;\ f'(x_0))$

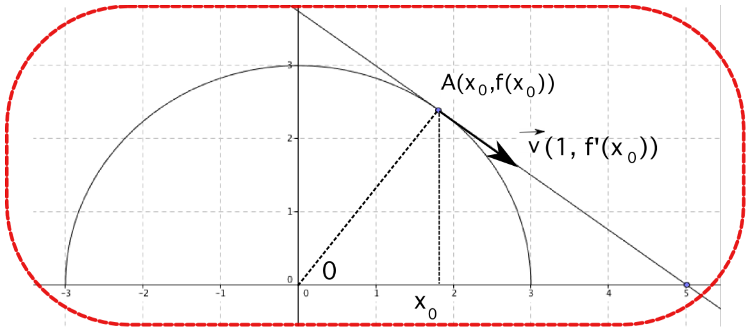
2) la droite qui passe par le point $A(x_0, f(x_0))$ de pente égale à $f'(x_0)$

3) la droite d'équation $f'(x_0)\,(X - x_0) = Y - f(x_0)$.

Prouvons la propriété bien-connue qui affirme que la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon. Le graphique de la fonction

$$f : [-r;\ r] \to [0;\ r], \qquad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

est le demi-cercle au-dessus de l'axe $0X$ du cercle de rayon r et centre 0, l'origine des axes.



Pour calculer $f'(x)$, on voit que $f(x) = g(h(x))$, où $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = r^2 - x^2$. On a $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $h'(x) = -2\,x$; par conséquent

$$f'(x) = g'(h(x))\,h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \times (-2\,x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Soit $x_0 \in]-r;\ r[$; la droite tangente en $A(x_0, \sqrt{r^2 - x_0^2})$ est portée par le vecteur $\overrightarrow{v}\left(1;\ -\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}}\right)$. Pour vérifier que cette droite est bien perpendiculaire au rayon $0A$, il suffit de vérifier que le produit scalaire entre le vecteur $\overrightarrow{v}$, qui porte la droite tangente, et le vecteur $\overrightarrow{0A}$, qui porte le rayon, est égal à zéro. Mais $\overrightarrow{0A}$: $(x_0 - 0;\ \sqrt{r^2 - x^2} - 0) = (x_0;\ \sqrt{r^2 - x^2})$.

On peut maintenant calculer le produit scalaire entre les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{0A}$:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{0A} = 1 \times x_0 + \left(-\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}}\right) \times \sqrt{r^2 - x^2} = x_0 - x_0 = 0.$$

La tangente et le rayon d'un cercle sont ainsi toujours perpendiculaires.

5. Fonctions usuelles

Avant même de donner la définition d'une fonction numérique, cette première section est consacrée à l'étude des fonctions, qui, du fait de leur très large utilisation, sont nommées *fonctions élémentaires*.

5.1. Puissances d'exposant rationnel.

Notation : Soit a un nombre rationnel (l'ensemble des nobles rationnels sera noté $\mathbb{Q}$), et x un nombre réel ; x^a s'appelle *la puissance a de x*. Ici, x est la variable de la fonction, et a est une constante, qui s'appelle l'*exposant*.

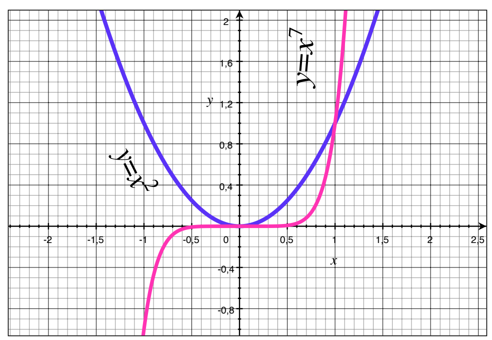
5.1.1. *Définition de x^a.* En fonction des valeurs de l'exposant a, on distingue plusieurs cas.

$\boxed{1)\ a \in \mathbb{N}^*}$ (ici $\mathbb{N}^*$ signifie $\mathbb{N}$ dont on exclut le nombre 0, tandis que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers positifs).

Dans ce cas, la définition de la puissance est bien connue, et facile à comprendre. Ainsi, x^1 n'est rien d'autre que x, et, si $a > 1$, alors x^a s'obtient en multipliant x avec lui-même a fois :

$$x^a := \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{a \text{ fois}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent, x^a peut se calculer pour tout nombre réel x et tout entier strictement positif a. Le graphique suivant donne les courbes représentatives des fonctions x^2 et x^3 :



ces courbes donnent l'allure générale des graphiques pour les fonctions de la forme x^{2k}, $k \in \mathbb{N}^*$ (semblables à x^2) et x^{2k+1}, $k \in \mathbb{N}^*$ (qui vont ressembler à x^3).

La fonction puissance d'exposant entier strictement positif a deux formules de calcul importantes, valables pour les expressions x^{a+b} et $x^{a\times b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Calculons d'abord x^{a+b}, pour deux exposants $a, b \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} x^{a+b} &= \overbrace{x \times x \times \ldots \cdots \times x}^{a+b \text{ fois}} \\ &= \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{a \text{ fois}} \times \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{b \text{ fois}} \\ &= x^a \times x^b. \end{aligned}$$

On vient donc de prouver que

$$x^{a+b} = x^a \times x^b, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Le calcul de $x^{a\times b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ demande un travail plus élaboré.

Théorème 15. *Pour tous les exposants $a, b \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre réel x, il est vrai que :*

$$x^{a\times b} = (x^a)^b. \tag{4}$$

Preuve du Théorème : Soit $a \in \mathbb{N}^*$ un nombre fixé. Pour établir la relation $(x^a)^b = x^{a\times b}$ on utilisera un raisonnement appelé au lycée "par recurrence" (dans les articles scientifiques et le milieu universitaire on parle plutôt de raisonnement "par induction mathématique"), appliqué au paramètre $b \in \mathbb{N}^*$. Comme bien connu, cette méthode a deux étapes.

Étape 1 : On doit prouver la conclusion du théorème pour $b = 1$, à savoir $(x^a)^1 = x^{a\times 1}$. Mais $(x^a)^1 = x^a$, car la puissance 1 d'un nombre coincide avec le nombre lui même. Parce que $a \times 1 = a$, il résulte que $x^{a\times 1} = x^a$, ce qui veut dire que

$$(x^a)^1 = x^a = x^{a\times 1};$$

et donc que la conclusion du théorème est vraie pour $b = 1$.

Étape 2 : On suppose vraie la conclusion du théorème pour une valeur quelconque b - donc on suppose que $(x^a)^b = x^{a\times b}$. En utilisant cette relation, nous devons prouver que la conclusion du théorème est aussi vraie pour la valeur qui vient après b, donc pour $b + 1$. Plus précisément, nous devons montrer que :

$$(x^a)^{b+1} = x^{a\times(b+1)}. \tag{5}$$

On utilisera la relation (3) pour x^a à la place de x, b à la place de a et 1 à la place de b, et obtenir que $(x^a)^{b+1} = (x^a)^b \times (x^a)^1$. Mais $(x^a)^b = x^{a\times b}$, et $(x^a)^1 = x^a$, donc

$$(x^a)^{b+1} = x^{a\times b} \times x^a. \tag{6}$$

Utilisons encore une fois la relation (3), cette fois pour x, $a \times b$ à la place de a, et a à la place de b, et déduire que

$$x^{a\times b} \times x^a = x^{a\times b+a}.$$

Mais $a \times b + a = a \times (b + 1)$, et donc

$$x^{a\times b} \times x^a = x^{a\times(b+1)}. \tag{7}$$

La relation (5) résulte en combinant les relations (6) et (7) ; l'étape 2 du raisonnement par recurrence, et donc la preuve du théorème, est complète. □

$\boxed{2)\ a = 0}$ La manière utilisée pour définir une puissance d'exposant de $\mathbb{N}^*$ ne peut pas s'employer pour le calcul de la puissance 0 d'un nombre, car "multiplier un nombre avec lui même zéro fois" n'a aucun sens. Le principe qu'on va suivre pour définir x^0, ainsi que le autres puissances d'exposant qui n'appartient pas à $\mathbb{N}^*$ est le suivant :

on définit les puissances x^a pour $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}^*$ de telle sorte que les relations (3) et (4

pour les exposants de $\mathbb{N}^*$.

Pour définir x^0, on va partir donc de la relation $x^{a+b} = x^a \times x^b$, écrite pour $a = 0$ et $b = 1$. On doit donc donner à x^0 précisément la valeur qui va rendre cette relation vraie. Or, parce que $x^1 = x$, la relation $x^{0+1} = x^0 \times x^1$ devient $x = x^0 \times x$.

Si $x \neq 0$, on peut diviser cette relation par x et en déduire que

$$\boxed{x^0 = 1, \quad \text{si } x \neq 0.}$$

On ne peut pas utiliser cette méthode pour 0^0, car il est impossible de diviser par 0. Par convention, on décide que

$$\boxed{0^0 = 1};$$

en conclusion,

$$\boxed{x^0 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

$\boxed{3)\ a = \frac{2k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}}$ Comme ici non plus on ne peut multiplier un nombre avec lui même $\frac{2k+1}{2}$ fois, on applique la même méthode que pour $a = 0$. Le point de depart de la définition est la relation

$$x^{\frac{2k+1}{2}+\frac{2k+1}{2}} = x^{\frac{2k+1}{2}} \times x^{\frac{2k+1}{2}}; \tag{8}$$

on veut donner à $x^{\frac{2k+1}{2}}$ une valeur telle que cette relation soit vraie.

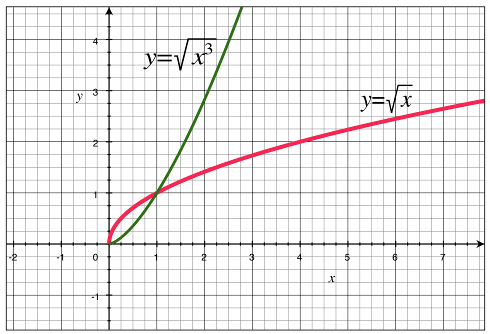
Mais $\frac{2k+1}{2} + \frac{2k+1}{2} = 2k+1$, donc la relation (8) devient $x^{2k+1} = \left(x^{\frac{2k+1}{2}}\right)^2$; on voit donc que la relation (8) est vraie si on pose $x^{\frac{2k+1}{2}} = \sqrt{x^{2k+1}}$.

On sait que la racine carrée réelle d'un nombre strictement négatif n'existe pas. On obtient ainsi la définition suivante :

$$\boxed{x^{\frac{2k+1}{2}} \text{ n'existe pas si } x < 0, \text{ et } x^{\frac{2k+1}{2}} = \sqrt{x^{2m+1}} \text{ si } x \geq 0.}$$

Par exemple, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$, $x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x^5}$, etc.

Le schéma suivant donne les courbes représentatives des fonctions $x^{\frac{1}{2}}$ et $x^{\frac{3}{2}}$:



4) $a = \frac{m}{n}$, avec $m, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux Pour calculer ces puissances, nous avons besoin de la définition de $\sqrt[n]{x}$, la racine d'ordre n de x (quand $n = 2$, $\sqrt[n]{x}$ est la racine carrée ; pour $n = 3$ on parle de racine cubique, en général on parle de racine n-ième, ou de racine d'ordre n).

La définition de $\sqrt[n]{x}$, la racine n-ième de x, est :

- n nombre pair, et $x < 0$: $\sqrt[n]{x}$ n'existe pas
- n nombre pair, et $x \geq 0$: $\sqrt[n]{x}$ est la seule solution positive de l'équation $y^n = x$ (l'inconnue est y)
- n nombre impair et $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt[n]{x}$ est la seule solution de l'équation $y^n = x$ (l'inconnue est y).

Par exemple, $\sqrt[4]{16} = 2$, car l'équation $y^4 = 16$ a deux solutions, $y = -2$ et $y = 2$, et 2 est la seule solution positive, tandis que $\sqrt[5]{-1024} = -4$, car l'équation $y^5 = -1024$ n'a que la solution $y = -4$. En revanche, $\sqrt[8]{-1}$ n'existe pas, car 8 est un nombre pair, et -1 est un nombre négatif.

Pour donner une definition à $x^{\frac{m}{n}}$, nous utiliserons la relation (4), pour $a = \frac{m}{n}$ et $b = n$. On a donc

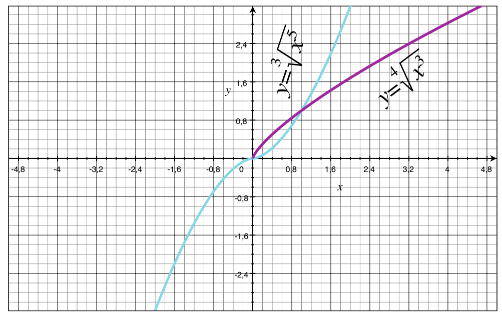
$$x^{\frac{m}{n} \times n} = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n;$$

mais $\frac{m}{n} \times n = m$, donc

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n = x^m.$$

On définit donc la puissance $\frac{m}{n}$ de x comme étant $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, choix qui nous assure que la relation (4) est vraie. On constate donc que si n est pair, alors $x^{\frac{m}{n}}$ ne peut pas se calculer si $x < 0$, mais que si n est impair, alors $x^{\frac{m}{n}}$ peut se calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La figure suivante présente deux courbes représentatives pour deux puissances d'exposant fractionnel : $x^{\frac{5}{3}}$et $x^{\frac{3}{4}}$.

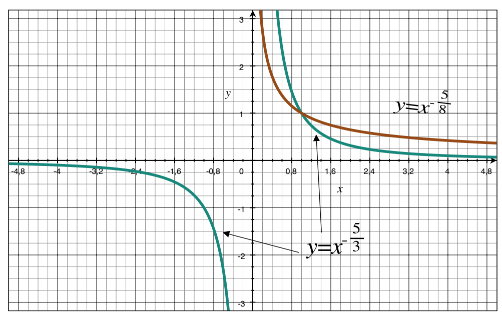


5) $a < 0$ Dans ce cas, on utilise la relation (3) pour a et $b = -a$. On en obtient que $x^{a-a} = x^a \times x^{-a}$, donc que $x^0 = x^a \times x^{-a}$. On en déduit que $x^a = \frac{1}{x^{-a}}$. Il vient que

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}}, \qquad a < 0.$$

Question 26. *Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ deux nombres premiers entre eux. Pour quels valeurs de x l'expression $x^{-\frac{m}{n}}$ n'existe pas ? (attention : il y a deux réponses, en fonction de la parité de n).*

Le graphique suivant montre les courbes représentatives de $x^{-\frac{5}{3}}$ et $x^{-\frac{5}{8}}$



Question 27. *Soit x un nombre positif. Combien de nombres différentes se trouvent dans la liste suivante :*

$\left(x^{-1}\right)^{-2}$, $\sqrt{x^4}$, $\frac{1}{x^{-2}}$, x^{-2}, $x^3 \times x^{-1}$?

5.1.2. *Puissances d'exposant irrationnel.* Il est également possible de définir les puissances x^a pour $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ par passage à limite, mais uniquement pour des $x \geq 0$. Par conséquent, l'expression $(-1)^\pi$ n'a pas de sens. Toutes les propriétés des exponentielles d'exposant rationnel sont vraies aussi pour les exposants irrationnels.

5.1.3. *Le signe de x^a.* Pour déterminer si x^a est positif, négatif ou nul, il suffit de suivre ces trois règles.

i) la relation $x^a > 0$ est vraie si :
- $x > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$,
- $x \neq 0$ et a est une fraction dont le numérateur est pair,
- $x = 0$ et $a = 0$

ii) la relation $x^a = 0$ est vraie si : • $x = 0$ et $a \neq 0$

iii) la relation $x^a < 0$ est vraie si : • $x < 0$ et a est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont impairs.

Exemples : π^{-3}, $(-2)^{\frac{4}{3}}$ et 0^0 sont des nombres positifs, $0^2 = 0$, et $(-4)^{\frac{1}{3}}$ est un nombre négatif.

5.1.4. *x^a : fonction croissante où décroissante ?* L'étude de la monotonie de la fonction $f(x) = x^a$ se fait à l'aide de sa dérivée : $f'(x) = a\,x^{a-1}$, en utilisant ensuite les résultats de la section précédente.

Exemples : $\left(x^2\right)' = 2x$, donc la fonction x^2 est croissante quand $x \geq 0$ et décroissante si $x \leq 0$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc la fonction $\sqrt{x}$ est croissante quand $x \in]0;+\infty[$.

5.1.5. *Limites en $-\infty$, 0^-, 0^+ et $+\infty$.* Il est très facile de vérifier les relations suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} x^a = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \text{ numérateur et dénominateur impairs} \\ 0, & a < 0 \text{ dénominateur impair} \\ 1, & a = 0 \\ +\infty, & a > 0 \text{ dénominateur impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-} x^a = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \text{ numérateur et dénominateur impairs} \\ 0, & a > 0 \text{ dénominateur impair} \\ 1, & a = 0 \\ +\infty, & a < 0 \text{ dénominateur impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+} x^a = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ 1, & a = 0 \\ +\infty, & a > 0 \end{cases}$$

5.1.6. *Deux relations utiles.* Il convient de retenir les relations (déjà rencontrées) :

$$\boxed{x^{a+b} = x^a \times x^b, \qquad \forall\, x, \geq 0,\ a, b \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{x^{a\times b} = (x^a)^b = \left(x^b\right)^a, \qquad \forall\, x \geq 0\, a, b \in \mathbb{R},}$$

Question 28. *En donnant aux nombres a, b et c les valeurs* 1, 2 *et* 3, *dans tous les ordres possibles, combien de valeur différentes on obtient pour l'expression* $(a^b)^c$ *?*

Question 29. *Soit a et b deux nombres réelles. Indiquez, pour chacune des propositions suivantes, si elles sont vraies ou fausses :*

1) $\forall x > 0, \quad x^{a+b} = x^a + x^b$, *2)* $\exists x > 0, \quad x^{a\times b} = x^a \times x^b$,

3) $\forall x > 0, \quad x^{2\,a} = (x^a)^2$, *4)* $\forall x > 0, \quad \frac{x^{a\times b}}{x^a} = x^b$.

5.2. **La fonction logarithme.**

Notation : La fonction logarithme se note $\ln(x)$, x étant sa variable.

5.2.1. *Définition du logarithme.* Pour presque tous les coefficients rationnels a, il est facile de calculer l'aire comprise entre la courbe $y = x^a$, les droites verticales d'abscisses 1 et x, et l'axe horizontal.

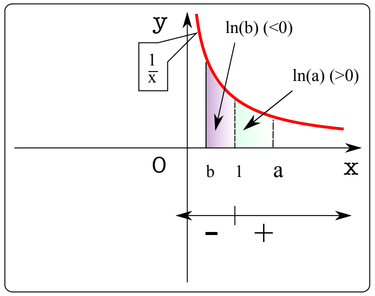
En effet, cette valeur est l'intégrale définie $\int_x^1 x^a \,\mathrm{d}\, x$. Or, la primitive de x^a est $\frac{x^{a+1}}{a+1}$, donc

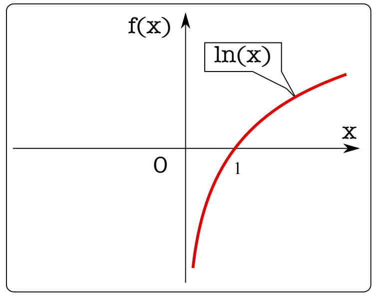
$$\int_x^1 x^a \,\mathrm{d}\, x = \frac{1^{a+1}}{a+1} - \frac{x^{a+1}}{a+1} = \frac{1 - x^{a+1}}{a+1}.$$

Nous avons dit "presque tous les coefficients", car la primitive de x^a est bien $\frac{x^{a+1}}{a+1}$, sauf pour le cas $a = -1$, quand le dénominateur $a+1$ devient 0, ce qui est impossible.

Donc, pour $a \neq 1$, l'aire entre la courbe $y = x^a$, les droites verticales d'abscisses 1 et x, et l'axe horizontal est égale avec $\frac{1-x^{a+1}}{a+1}$, étant donc exprimée par une puissance de x. En revanche, pour $a = -1$, cette surface ne peut pas être exprimée par une formule où apparaissent (uniquement) des puissances de x. Pour completer cette "valeur manquante" on introduit la fonction logarithme.

Définition 1. *L'aire comprise entre :*
- la courbe $y = \frac{1}{x}$ *(c'est à dire l'hyperbole équilatère),*
- la droite verticale d'abscisse 1*,*
- l'axe horizontal
- la droite verticale d'abscisse $x_0 > 0$*,*
s'appelle le logarithme du nombre x_0 *et se note* $\ln(x_0)$*. Cette aire se prend avec le signe* $+$ *si* x_0 *est plus grand que* 1 *(donc si le quadrilatère curviligne dont on mesure l'aire est orienté vers la droite), et avec le signe* $-$ *dans l'autre cas.*





5.2.2. *Propriétés du logarithme.* La définition de la fonction logarithme implique directement que :

$\boxed{\ln(1) = 0 \text{ (car les deux côtés verticales du quadrilatère sont}}$

$\boxed{\text{confondues, donc son superficie est nulle)}}$

et que

$\boxed{\text{La dérivée du logarithme est } \frac{1}{x} : (\ln(x))' = \frac{1}{x}.}$

Parce que $\frac{1}{x} > 0$ pour chaque $x > 0$, il résulte que la dérivée de la fonction logarithme est strictement positive, donc

$\boxed{\text{Le logarithme est une fonction strictement croissante.}}$

Le résultat qui suit donne une très importante propriété du logarithme.

Théorème 16. *Soit* $a, b > 0$. *Alors*

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b). \tag{9}$$

Preuve du Théorème : Soit a un nombre positif fixé. On doit prouver que, pour tout $b > 0$, la relation (9) est vraie. Pour cela, on définit deux fonctions de variable $b > 0$:

$$f, g :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(b) = \ln(a \times b), \quad \text{et} \quad g(b) = \ln(a) + \ln(b).$$

On a

$$f(1) = \ln(a \times 1) = \ln(a)$$

et

$$g(1) = \ln(a) + \ln(1) = \ln(a) + 0 = \ln(a),$$

donc

$$f(1) - g(1) = 0.$$

Pour calculer la dérivée de la fonction f par rapport à sa variable b, on applique la formule (vue au lycée)

$$f'(b) = (\ln(a \times b))' = a \times \frac{1}{a \times b} = \frac{1}{b} \quad \forall b > 0.$$

La dérivée de g est égale à la dérivée de $\ln(b)$, donc $g'(b) = \frac{1}{b}$. On en déduit que

$$(f(b) - g(b))' = f'(b) - g'(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0 \quad \forall b > 0.$$

La fonction $f - g$ est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, et sa dérivée est égale à zéro. Alors cette fonction est constante :

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ t.q. } f(b) - g(b) = C \quad \forall b > 0.$$

En particulier, $C = f(1) - g(1)$, donc $C = 0$, ce qui veut dire que

$$\ln(a \times b) = f(b) = g(b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \forall b > 0.$$

La relation (9) est ainsi prouvée. □

De exactement la même manière on peut démonter que, si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $\ln(a^b)$ est égal à $b \times \ln(a)$. En conclusion,

$$\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \forall a, b > 0,}$$

$$\boxed{\ln(a^b) = b \times \ln(a) \quad \forall a > 0, b \in \mathbb{R}.}$$

Question 30. *Trouver deux nombres réelles a, b pour lesquelles la relation $\ln(a \times b) = \ln(a) \times \ln(b)$ n'est pas vraie.*

Pour étudier le comportement de la fonction logarithme quand x va vers 0 et vers $+\infty$ (les deux extrémités de son intervalle de définition), on observe que

$$\ln(2^n) = n \times \ln(2);$$

parce que $\ln(2) > 0$, il résulte que

$$\lim_{n \to +\infty} n \times \ln(2) = +\infty,$$

donc que

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(2^n\right) = +\infty.$$

Mais la fonction ln est croissante, ce qui nous permet de déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Parce que $x = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$, il résulte que

$$\ln(x) = \ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}\right) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right);$$

quand x va vers 0^+ (donc il converge vers 0, tout en restant positif), $\frac{1}{x}$ va vers $+\infty$, et par conséquent,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = -\infty.$$

On a ainsi montré que :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.}$$

Cette dernière relation prouve que la limite en $+\infty$ du logarithme est $+\infty$; la même chose est vraie pour les puissances x^a, avec $a > 0$; donc, à priori, on ne sait pas si le logarithme ou les puissances deviennent plus grandes en plus infini. On peut démontrer (mais on ne va pas les faire ici), que c'est le logarithme qui va le plus lentement à l'infini ; une relation similaire est obtenue quand x converge vers 0. Plus précisément :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^+} x^a \times \ln(x) = 0 \ \forall a > 0.}$$

Question 31. *Déterminer, pour chacune des proposition suivantes, si elles sont vraies ou fausses :*

- $\lim_{x \to +\infty} x \times \ln(x) = +\infty$

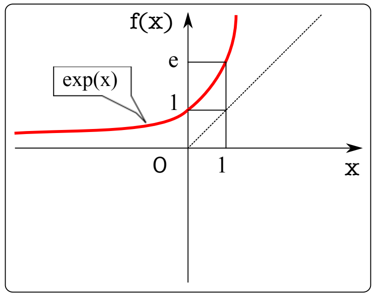
- $\ln(x+y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \forall x, y > 0$
- $\exists x > 0$ t.q. $x > \ln(x)$.

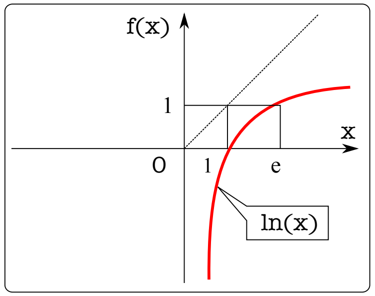
5.3. **La fonction exponentielle. Notation** : La fonction exponentielle se note $\exp(x)$ ou e^x, x étant sa variable.

5.3.1. *Définition de l'exponentielle.* La fonction réciproque de la fonction logarithme s'appelle la fonction exponentielle, et se note $f(x) = \exp(x)$. Plus précisément, l'exponentielle est la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'intervalle $]0; +\infty[$ avec la propriété que

$$\ln(\exp(x)) = x, \quad \exp(\ln(x)) = x.$$

Une des conséquences du fait que l'exponentielle est la fonction réciproque du logarithme, et que les représentations graphiques de l'exponentielle et du logarithme sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$, c'est à dire la première bissectrice.





5.3.2. *Propriétés de l'exponentielle.*

Pour calculer $\exp(0)$, on rappelle que $\ln(1) = 0$, ce qui donne

$$\exp(0) = \exp(\ln(1)) = 1.$$

Théorème 17. *L'exponentielle est une fonction croissante.*

Preuve du Théorème : Soit deux nombres réelles x_1 et x_2 tel que $x_1 < x_2$. Alors, parce que $x_1 = \ln(e^{x_1})$ and $x_2 = \ln(e^{x_2})$, il resulte que $\ln(\exp(x_1)) < \ln(\exp(x_2))$. Parce que la fonction logarithme est croissante, il résulte que $\exp(x_1) < \exp(x_2)$.

Nous avons ainsi prouvé que

$$\exp(x_1) < \exp(x_2) \quad \forall x_1 < x_2,$$

ce qui signifie que la fonction exponentielle est croissante. □

La connaissance de la dérivée du logarithme nous permet de calculer la dérivée de l'exponentielle.

Théorème 18. *La dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle elle-même.*

Preuve du Théorème : On rappelle le résultat (vu au lycée) qui affirme que $\ln(u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$, pour toute fonction u strictement positive et dérivable.

On applique cette formule pour le cas $u(x) = \exp(x)$, et on obtient que

$$(\ln(\exp(x)))' = \frac{(\exp(x))'}{\exp(x)}.$$

Mais $\ln(\exp(x)) = x$, et donc $(\ln(\exp(x)))' = 1$; alors $\frac{(\exp(x))'}{\exp(x)} = 1$, et donc

$$(\exp(x))' = \exp(x).$$

□

Comme pour la fonction logarithme, les formules de calcul de $\exp(x+y)$ et $\exp(x \times y)$ sont tres importantes.

Théorème 19. *On a :*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y), \qquad \exp(x \times y) = \exp((\exp(x))^y.$$

Preuve du Théorème : Parce que $x = \ln(\exp(x))$ et $y = \ln(\exp(y))$, on en déduit que $x + y = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y))$. Mais $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$ pour toutes les valeurs $a, b > 0$; en utilisant cette relation pour $a = \ln(\exp(x))$ et $b = \ln(\exp(y))$ on déduit que $\ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = \ln(\exp(x) \times \exp(y))$.

Donc

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \exp(\ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y))\\ &= \exp(\ln(\exp(x)\times\exp(y)))\\ &= \exp(x)\times\exp(y),\end{aligned}$$

c'est-à-dire la première partie de la relation désirée.

Pour calculer $\exp(x\times y)$, commençons par utiliser la relation $\ln(a^b) = b\times\ln(a)$ pour $a=\exp(x)$ et $b=y$, pour obtenir que

$$\ln\left((\exp(x))^y\right) = y\times\ln(\exp(x)) = x\times y.$$

Mais

$$(\exp(x))^y = e^{\ln((\exp(x))^y)} = \exp(x\times y),$$

et le théorème est completement démontré. □

On définit le nombre réel e comme étant le seul nombre réel qui vérifie la relation $\exp(e) = 1$ ou, equivalent, $\ln(e) = 1$. Un raisonnement géométrique (qui dépasse l'objectif de ce cours, et ne sera donc pas donné ici) montre que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \approx 2,718281828.$$

En utilisant la relation $\exp(x\times y) = \exp((\exp(x))^y$ pour $x=1$ et $y=x$ on obtient que

$$\exp(x) = \exp(1\times x) = (\exp(1))^x = e^x.$$

Sur la base des résultats précédents, on peut calculer les limites de l'exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$.

Théorème 20. *On a :*

$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty.$$

Preuve du Théorème : Calculons d'abord $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x)$; pour cela on va comparer $\exp(x)$ et x. Plus précisément, on introduit la fonction $g(x) = \exp(x) - x$. On a

$$g(0) = \exp(0) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$$

et

$$g'(x) = (\exp(x))' - (x)' = \exp(x) - 1.$$

Si $x > 0$, comme la fonction exponentielle est croissante il résulte que $\exp(x) > \exp(0) = 1$, donc

$$g(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction g a donc une dérivée strictement positive, et sa valeur en 0 est, elle aussi, strictement positive. On conclue que la fonction est strictement positive sur cet intervalle. Donc

$$\exp(x) > x \quad \forall x \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty}\exp(x) \geq \lim_{x\to+\infty} x;$$

mais $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty.$$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)$, on applique la relation $\exp(x+y) = \exp(x)\times\exp(y)$ pour x et $y=-x$; on obtient que

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\times\exp(-x),$$

donc

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}.$$

Par conséquent,

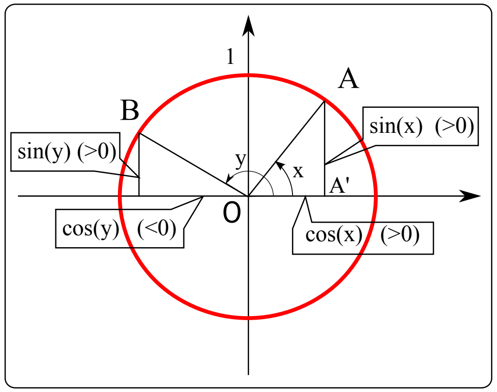
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\exp(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\exp(-x)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\exp(x)}\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0.\end{aligned}$$

Le théorème est ainsi démontré. □

De même que le logarithme augmente plus lentement que les puissances, l'exponentielle croît plus vite que toute puissance. Plus précisément : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{x^a} = +\infty$ pour tout exposant $a > 0$.

5.4. **Sinus et Cosinus.**

5.4.1. *Définition de* $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$. Sinus et Cosinus sont des fonctions périodiques de période $2\,\pi$. Il suffit dont de les définir sur l'intervalle $x \in [0\,;2\,\pi]$. Pour cela, on considère un cercle de rayon égal à 1 dont le centre est l'origine des axes 0.



Pour tout nombre x entre 0 et $2\,\pi$, prenons le point A sur la circonférence de ce cercle, tel que l'angle entre l'axe des abscisses et le rayon $0A$, mesuré de droite à gauche soit égal à x. Notons A', la projection de A sur l'axe des abscisses : par définition, le sinus de x est la longueur du côté vertical du triangle rectangle $0AA'$, prise avec le signe plus si le point A est au-dessus de l'axe des abscisses, et avec le signe moins si le point A se trouve en-dessous de cet axe.

Pour le cosinus, on considère la longueur du côté horizontal, avec le signe moins si A est à gauche de l'axe des ordonnées, et avec le signe plus, si A se place à droite de cet axe. Dans l'exemple illustré plus haut, $\sin(x) > 0$ et $\sin(y) > 0$, car les points A et B sont tous les deux au-dessus de l'axe horizontal des abscisses, mais $\cos(x) > 0$ tandis que $\cos(y) < 0$, car si le point A est à droite de l'axe vertical, le point B, lui, est à gauche de l'axe des ordonnées.

5.4.2. *Valeurs remarquables de* $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$. On voit directement sur le cercle que :

$$\sin(0) = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \sin(\pi) = 0,\ \sin\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = -1,$$

tandis que

$$\cos(0) = 1,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \cos(\pi) = -1,\ \cos\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = 0.$$

Si $x = \frac{\pi}{4}$, alors le triangle rectangle $0AA'$ est isocèle, donc les côtés $0A$ et AA' ont la même longueur ; le théorème de Pythagore nous permet de la calculer - sa valeur est $\frac{\sqrt{2}}{2}$. En utilisant à nouveau le cercle trigonométrique, on obtient que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

et aussi

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Si $x = \frac{\pi}{6}$, alors le triangle rectangle $0AA'$ a l'hypoténuse $0A$ deux fois plus longue que le côté AA'. Le théorème de Pythagore nous permet encore une fois de calculer les longueurs des côtés. On en déduit que AA' est égal à $\frac{1}{2}$, tandis que $0A'$ a la longueur de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},\ \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},\ \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$$

et

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

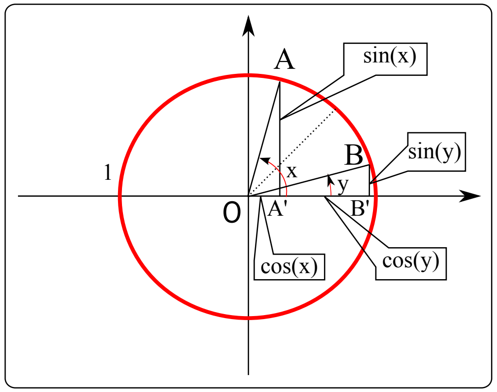
Finalement, quand $x = \frac{\pi}{3}$, les côtés du triangle $0AA'$ sont $0A' = \frac{1}{2}$ et $AA' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

5.4.3. *Formules trigonométriques de base.*



Théorème 21. *On a*

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Preuve du Théorème : Considérons le point A sur le cercle trigonométrique correspondant à l'ange x ; le point qui corresponds à l'angle $y = \frac{\pi}{2} - x$ est alors le point B, qui est le symétrique de A par rapport à la première bissectrice.

La somme des mesures d'angles d'un triangle est de π ; alors l'angle $\measuredangle 0AA'$ est égal à $\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\pi}{2} - x$, donc à $\measuredangle B0B'$. On constate donc que les deux triangles rectangles $AA'0$ et $BB'0$ ont les mêmes angles ; comme de plus, les deux hypoténuses ont la même longueur (il s'agit dans les deux cas du rayon du cercle), les deux triangles sont superposables (égaux).

Par conséquent, leurs côtés ont - deux par deux - la même longueur ; le côté vertical de l'un aura la même longueur que le côté horizontal de l'autre, et réciproquement. On obtient ainsi que $\sin(x) = \cos(y)$, et comme $y = \frac{\pi}{2} - x$, la preuve du théorème est complète. $\square$

Les fonctions sinus et cosinus ont été précédemment définies, mais seulement pour des arguments entre 0 et $2\,\pi$ (à savoir les angles qu'on peut réaliser sur le cercle trigonométrique). Pour les définir pour d'autres valeurs de x, négatives ou supérieures à $2\ \pi$, on utilise la périodicité : plus précisément, on demande à ce que sinus et cosinus ne changent pas de valeur si on additionne $2\,\pi$ à l'argument :

$$\sin(x + 2\ \pi) = \sin(x), \qquad \cos(x + 2\ \pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la symétrie du cercle trigonométrique par rapport aux deux axes de coordonnées, comme on l'a déjà faite pour la symétrie par rapport à la première bissectrice, on obtient :

$$\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \cos(-x) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On voit que "le signe moins traverse la parenthèse pour sinus" (en des termes plus formels, on dit que la fonction sinus est impaire) et que "le signe moins disparait pour cosinus" (donc que la fonction cosinus est paire).

Appliqué dans le triangle $AA'0$, le théorème de Pythagore donne la relation fondamentale :

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Des arguments géométriques (qui dépassent le cadre de ce cours) nous permettent de prouver les formules pour le sinus et le cosinus de la somme de deux angles :

$$\sin(x + y) = \sin(x)\ \cos(y) + \sin(y)\cos(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$
$$\cos(x + y) = \cos(x)\ \cos(y) - \sin(x)\ \sin(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

En particulier, quand $x = y$, on a :

$$\sin(2x) = 2\ \sin(x)\ \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 22. *On a*

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \forall p, q \in \mathbb{R},$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \forall p, q \in \mathbb{R}.$$

Preuve du Théorème : Appliquons la formule $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ pour $x = \frac{p+q}{2}$ et $y = \frac{p-q}{2}$. On obtient que :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) &= \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &+ \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right);\end{aligned}$$

parce que $\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} = p$, on a

$$\sin(p) = \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

On refait les mêmes calculs mais pour $x = \frac{p+q}{2}$ et $y = \frac{q-p}{2}$; on en déduit que

$$\sin(q) = \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{q-p}{2}\right) + \sin\left(\frac{q-p}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right);$$

parce que sinus est une fonction impaire on a $\sin\left(\frac{q-p}{2}\right) = -\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$, et parce que cosinus est une fonction paire on peut écrire que $\cos\left(\frac{q-p}{2}\right) = \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Il résulte que

$$\sin(q) = \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

En faisant la somme des relations pour $\sin(p)$ et $\sin(q)$ on a

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

c'est-à-dire la première des deux conclusions du théorème.

L'autre formule s'obtient de la même manière, mais en partant de la relation $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$. $\square$

Le théorème suivant démontre une série d'inégalités très importantes pour le calcul des dérivées des fonctions sinus et cosinus.

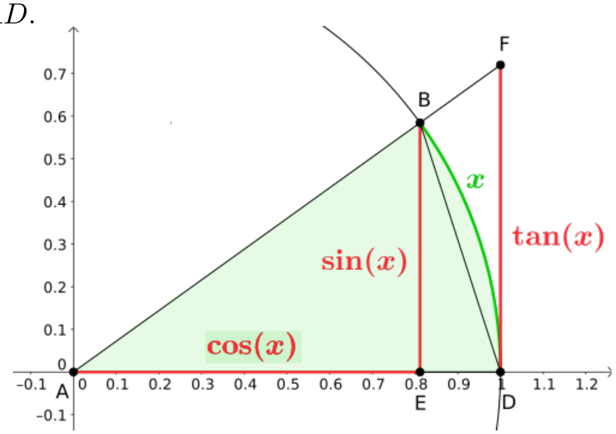
Théorème 23. *On a*

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \quad \forall -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ x \neq 0 \tag{10}$$

$$0 < \frac{1-\cos(x)}{x} < \frac{x}{2} \quad \forall\, 0 < x < \pi. \tag{11}$$

$$\frac{x}{2} < \frac{1-\cos(x)}{x} < 0 \quad \forall -\pi < x < 0. \tag{12}$$

Preuve du Théorème : Soit x un nombre réel tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, et soit, dans le cercle trigonométrique, le secteur circulaire ABD, délimité par les rayons $[AB]$ et $[AD]$, qui font entre eux un angle de mesure x. On considère la hauteur $[BE]$ du triangle ABD, et on pose F pour l'intersection entre la droite AB et la perpendiculaire en D à AD.



Sans qu'il soit besoin de calculs, on connait déjà les longueurs d'une partie des côtés des deux triangles ABD et ADF : $|BE| = \sin(x)$, $|AD| = 1$, $|AB| = 1$; il nous reste à calculer la longueur de $[DF]$. Pour cela, on applique le théorème de Thales dans le triangle ADF, coupé par le segment $[BE]$, parallèle avec le côté $[DF]$ du triangle, et on obtient que

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|DF|},$$

donc
$$|DF| = \frac{|BE| \times |AD|}{|AE|} = \frac{\sin(x) \times 1}{\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

L'aire du triangle ABD est égale au demi-produit de la hauteur $[BE]$ par la base $[AB]$, ce qui donne $\frac{\sin(x)\times 1}{2}$. Cette aire est plus petite que l'aire du secteur circulaire ABD, qui est égale à la moitié de la valeur de l'angle $\measuredangle BAD$, donc à $\frac{x}{2}$. Á son tour, l'aire du secteur circulaire est plus petite que l'aire du triangle ADF, qui est égale au demi-produit de la hauteur $[DF]$ par la base $[AD]$, donc à $\frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$.

Par conséquent,
$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin(x)}{2\cos(x)} \quad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

En multipliant l'inégalité $\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2}$ avec le nombre positif $\frac{2}{x}$ on a que
$$\frac{\sin(x)}{x} < 1 \quad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$
En multipliant l'inégalité $\frac{x}{2} < \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$ avec le nombre positif $\frac{2\cos(x)}{x}$, on obtient que
$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} \quad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
l'inégalité
$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \quad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2},$$
est donc établie.

Les fonctions $\cos(x)$ et $\frac{\sin(x)}{x}$ sont paires ; en effet, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x}$, donc l'inégalité $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$, établie pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, est automatiquement vraie pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. La relation (10) est ainsi démontrée.

Pour démonter la deuxième inégalité, on applique la relation $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ pour $a = \frac{x}{2}$, et on obtient que
$$\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
donc
$$\frac{1-\cos(x)}{x} = 2\,\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous savons que $0 < \frac{\sin(a)}{a} < 1$ si $0 < a < \frac{\pi}{2}$; en appliquant cette relation pour $a = \frac{x}{2}$, on obtient que
$$0 < \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} < 1 \quad \forall 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2},$$
et, après avoir élevée cette relation au carrée, on déduit que
$$0 < \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 < 1 \quad \forall 0 < x < \pi,$$
donc
$$0 < 2\,\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} < \frac{x}{2} \quad \forall 0 < x < \pi.$$

On a ainsi prouvé l'inégalité (11). Soit finalement $-\pi < x < 0$; alors $0 < -x < \pi$, donc
$$0 < \frac{1-\cos(-x)}{-x} < \frac{-x}{2} \quad \forall -\pi < x < 0;$$
parce que $\cos(x) = \cos(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient que
$$0 < -\frac{1-\cos(x)}{x} < -\frac{x}{2} \quad \forall -\pi < x < 0,$$
et la relation (12) résulte en multipliant la relation précédente par -1. $\square$

Sur la base du théorème précédent, on peut calculer les dérivées des deux fonctions trigonométriques.

Théorème 24. *On a*
$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Preuve du Théorème : La définition de la dérivée donne :
$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}.$$

On sait que $\sin(x+h) = \sin(x)\times\cos(h) + \cos(x)\times\sin(h)$, donc
$$\sin'(x) = \sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}.$$

La relation (10) implique

$$\lim_{h\to 0}\cos(h)\le \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\le \lim_{h\to 0}1;$$

parce que

$$\lim_{h\to 0}\cos(h)=1=\lim_{h\to 0}1,$$

il résulte que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1.$$

De la même manière, les relations (11) and (12) impliquent que

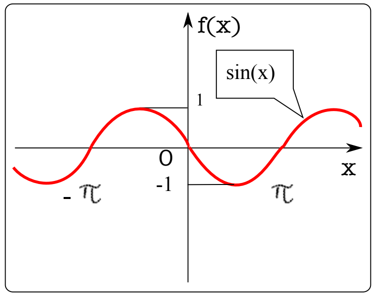
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0.$$

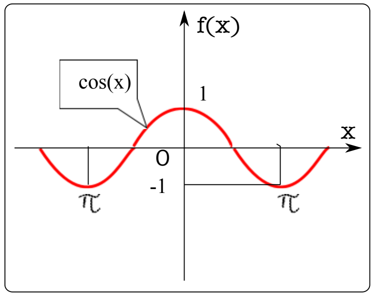
On peut donc conclure que

$$\sin'(x)=\sin(x)\times 0+\cos(x)\times 1=\cos(x).\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

La dérivée du cosinus se calcule d'une façon analogue. □

Le schéma suivant présente les graphiques des deux fonctions trigonométriques étudiées ici (le sinus et le cosinus).





5.4.4. *Arcsin et arccos.* La fonction réciproque de la restriction de $\sin(x)$ à l'intervalle $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]$ s'appelle Arcsin. Donc

$$\arcsin:[-1;\,1]\to\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]$$

est la seule fonction qui satisfait les relations

$$\sin(\arcsin(x))=x,\quad \arcsin(\sin(x))=x.$$

En guise d'exemple, calculons $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$. On sait que

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\in\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right],\quad \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2};$$

en d'autres mots, calculer $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ revient à chercher le seul nombre x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x)=\frac{1}{2}$.

L'analyse du cercle trigonométrique nous indique que l'équation $\sin(x)=\frac{1}{2}$ a deux solutions entre $-\pi$ et π : $x=\frac{\pi}{6}$ et $x=\frac{5\pi}{6}$. Parmi ces solutions, il n'y a que $\frac{\pi}{6}$ qui soit dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc conclure en disant que

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

De même, la fonction réciproque de la restriction à l'intervalle $x\in[0;\,\pi]$ de $\cos(x)$ s'appelle Arccos :

$$\arccos:[-1;\,1]\to[0;\,\pi],$$

$$\cos(\arccos(x))=x\quad \arccos(\cos(x))=x.$$

5.5. **Tangente et arctangente.** La fonction obtenue en divisant le sinus d'un angle par son cosinus s'appelle la tangente de l'angle en question :

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Comme la fonction $\cos(x)$ est placée au dénominateur, on ne peut calculer la tangente d'un angle dont le cosinus fait zéro, à savoir un angle de la forme $x=\frac{\pi}{2}+k\,\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Par conséquent, le domaine de la fonction tangente est l'ensemble $\mathbb{R}$ dont on enlève l'ensemble infini $\left\{\frac{\pi}{2}+k\,\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

A la différence des fonctions sinus et cosinus, qui sont périodiques de période $2\,\pi$, la fonction tangente est périodique, mais sa période est de seulement π.

Théorème 25. *On a*

$$\tan(x+\pi)=\tan(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\,\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Preuve du Théorème : Rappelons qu'une fonction $f(x)$ est dite périodique s'il existe un nombre $T > 0$ tel que la relation $f(x) = f(x+T)$ est valable pour tous les $x \in \mathbb{R}$; la période de la fonction est la plus petite valeur $T > 0$ qui satisfait cette relation.

Pour démontrer que π est la période de la fonction tangente, il faut d'abord prouver que $\tan(x+\pi) = \tan(x)$.

On a

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)};$$

parce que

$$\begin{aligned}\sin(x+\pi) &= \sin(x)\ \cos(\pi) + \cos(x)\ \sin(\pi)\\ &= \sin(x) \times (-1) + \cos(x) \times 0 = -\sin(x),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\cos(x+\pi) &= \cos(x)\ \cos(\pi) - \sin(x)\ \sin(\pi)\\ &= \cos(x) \times (-1) - \sin(x) \times 0 = -\cos(x),\end{aligned}$$

il résulte que

$$\tan(x+\pi) = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La fonction tangente est donc périodique. Soit $T > 0$ un nombre réel tel que $\tan(x+T) = \tan(T)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, $\tan(0) = \tan(0+T)$, donc $\tan(T) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = 0$. Mais $\tan(T) = 0$ implique que $\sin(T) = 0$, et alors $T = k, \pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

On a ainsi prouvé que tout nombre $T > 0$ tel que la relation $\tan(x+T) = \tan(T)$ est satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}$ est plus grand ou égal que π (plus précisément, c'est un multiple de π). Le nombre π est donc la période de la fonction tangente. □

On peut facilement calculer la tangente d'une somme de deux nombres :

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\ \cos(y) + \cos(x)\ \sin(y)}{\cos(x)\ \cos(y) - \sin(x)\ \sin(y)};$$

en simplifiant la fraction avec l'expression $\cos(x)\ \cos(y)$ on obtient que

$$\frac{\sin(x)\ \cos(y) + \cos(x)\ \sin(y)}{\cos(x)\ \cos(y) - \sin(x)\ \sin(y)} = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\ \tan(y)},$$

donc

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\ \tan(y)}.$$

Sur la base de ce résultant, on peut calculer la dérivée de la fonction tangente.

Théorème 26. *On a*

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

Preuve du Théorème : Commençons par le calcul de deux limites. Parce que

$$\lim_{h\to 0} \sin(h) = \sin(0) = 0, \quad \lim_{h\to 0} \cos(h) = \cos(0) = 1,$$

il résulte que

$$\lim_{h\to 0} \tan(h) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = 0.$$

En rappelant que $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$, on déduit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tan(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \times \frac{1}{\lim_{h\to 0} \cos(h)} = 1 \times \frac{1}{1} = 1.$$

Revenons au calcul de la dérivée ; on a

$$\tan'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan(x)}{h};$$

parce que

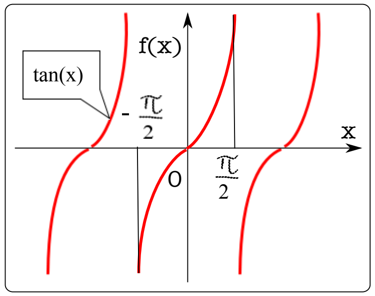
$$\begin{aligned}\tan(x+h) - \tan(x) &= \frac{\tan(x) + \tan(h)}{1 - \tan(x)\tan(h)} - \tan(x)\\ &= \frac{\tan(x) + \tan(h) - \tan(x) + \tan^2(x)\tan(h)}{1 - \tan(x)\tan(h)}\\ &= \frac{\tan(h)(1 + \tan^2(x))}{1 - \tan(x)\tan(h)},\end{aligned}$$

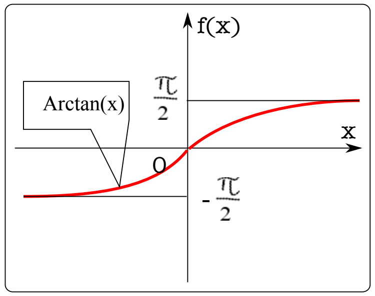
on obtient que

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{\tan(h)}{h}\right)\times\frac{1+\tan^2(x)}{1-\tan(x)\times\left(\lim\limits_{h\to 0}\tan(h)\right)} \\ &= 1\times\frac{1+\tan^2(x)}{1-\tan(x)\times 0} = 1+\tan^2(x). \end{aligned}$$

□

Par conséquent, la tangente est une fonction strictement croissante sur chaque intervalle de la forme $\left]\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\,\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$.





La fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ s'appelle la fonction arctangente, noté $\arctan(x)$. En d'autres mots, arctangente est la seule fonction telle que

$$\arctan:\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[,$$

$$\tan(\arctan(x)) = x \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

$$\arctan(\tan(x)) = x \quad \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[.$$

Parmi les propriétés utiles de la fonction arctangente, mentionnons que

$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

B Exercices

Remarque : *Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.*

Exercice 1. Résoudre sur leur domaine de validité les équations et inéquations suivantes :

- $\sqrt{7x-1} = \sqrt{x+7}$;
- $\sqrt{x+21} \leqslant \sqrt{2x+3}$;
- $\sqrt{2x+1} = x-1$;
- ♣ $\sqrt{x^2-8} - 2x = -5$;
- ♣ $\sqrt{x(10-x)} = \sqrt{-3-x}$;
- $\dfrac{2x+1}{x+2} \geqslant 0$;
- $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{1}{x}$;
- ♣ $\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{2}{x^2+1} = \dfrac{4}{x^2-1}$;
- ♣ $-x+3 < x+1 < -3x+7$;
- $|x+2| = \dfrac{4}{3}$;
- $\left|\dfrac{3}{2} - x\right| = 3$;
- $|x-2| = 2-x$;
- ♣ $|x|+5 = -1$;
- ♣ $|5-4x| = 3x-2$.

Exercice 2. Donner les domaines de définition dans $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \sqrt{x-4}\sqrt{x+6}$;
- $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-3}$;
- $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$;
- $f_4(x) = \sqrt{x-x^2}$;
- $f_5(x) = \dfrac{2x}{x^2-4} - \dfrac{2}{x^2-2x}$;
- $f_6(x) = \ln(2x-1-x^2)$;
- ♣ $f_7(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$;
- ♣ $f_8(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;
- ♣ $f_9(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$;
- ♣ $f_{10}(x) = \sqrt{-1-x^2}$;
- ♣ $f_{11}(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$;
- ♣ $f_{12}(x) = \dfrac{\cos(x)+\cos^2(x)}{x+\sin(x)}$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

• $f_1(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; • $f_2(x) = e^{-x}+e^{x}$; • $f_3(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$; • $f_4(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$; • $f_5(x) = |x+1|+|x-1|$.

Exercice 4. On considère les fonctions $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$, $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x^2 \end{array}$.

1. Déterminer si les compositions $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ h$ et $h\circ g$ sont possibles.
2. Parmi les compositions précédentes, lesquelles sont commutatives et lesquelles ne le sont pas ?

Exercice 5. ♣ On considère les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+1 \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}, \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{1+x^2} \end{array} \quad \text{et} \quad k : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

Peut-on définir les fonctions $f\circ g$, $g\circ f$, $h\circ k$ et $k\circ h$? Si oui, les déterminer.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$, vérifier que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ puis déterminer sa fonction réciproque f^{-1} :

- $f(x) = e^{e^{x+1}}$ et $I = \mathbb{R}$;
- $f(x) = \sqrt[3]{x+1} + 1$ et $I = \mathbb{R}$;
- $f(x) = x^2 - 1$ et $I = [1, +\infty[$;
- $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $I =]-\infty, 2]$;
- $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ et $I =]-2, +\infty[$;
- $\clubsuit$ $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$ et $I = [\frac{-3}{2}, +\infty[$;
- $\clubsuit$ $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ et $I =]-\infty, 0]$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
- $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{6} - x)$;
- $\sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
- $\cos(x - \frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6} - x)$;
- $\clubsuit$ $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$;
- $\clubsuit$ $\cos(3x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 8.

1. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, donner trois formules pour $\cos(2x)$ et une formule pour $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
2. Montrer, pour certaines valeurs de x qui seront précisées, que $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
3. Donner une expression de $\tan(x+y)$ et $\tan(x-y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$ en précisant les valeurs de x et y qui conviennent.
4. Pour tout x qui convient, donner une formule pour $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.

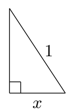
Exercice 9. Calculer

- $\arcsin\left(\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right)$;
- $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$;
- $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$;
- $\arccos\left(\cos(4\pi)\right)$;
- $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$;
- $\arccos\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right)$.

Exercice 10. Trouver toutes les valeurs de $x \in [0, 2\pi]$ telles que $\sin(x) + \cos(x) \geqslant 1$.

Exercice 11. $\clubsuit$ Montrer que, $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Indication : on pourra séparer la preuve en cinq cas : $x = -1, 0, 1$, $x \in]0, 1[$ *puis* $x \in]-1, 0[$. *Dans le cas où* $x \in]0, 1[$*, on pourra utiliser le triangle rectangle ci-contre.*



Exercice 12. Calculer lorsqu'elles existent les limites en 0, $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{5x - 2}$;
- $g(x) = \dfrac{-3x^4 + 5x^3}{x^4 + x^2}$;
- $h(x) = \dfrac{2x^2}{3x-1} - x + 1$.

Exercice 13. Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$;
- $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$;
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-x+3}{2x^2+3x-1}$;
- $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}$;
- $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$;
- $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$;
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-\sqrt{x}}{x}$.

- ♣ $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}-(x+1)$.
- ♣ $\lim_{x\to +\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)(x^3+1)}{x^2+1}$.
- ♣ $\lim_{x\to 2} \frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{3}{x-2}$.
- ♣ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$.
- ♣ $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$.
- ♣ $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$.

Exercice 14. On considère la fonction $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[-1,1]$.

Exercice 15. On considère l'application $f:I\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x\in I.$$

Déterminer le domaine de définition I de f. f est-elle continue sur I ?

Exercice 16. ♣ Étudier la continuité de la fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$h(x)=\begin{cases} \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0. \end{cases}$$

Exercice 17. ♣ On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{si} \quad x\neq 2 \\ \alpha & \text{si} \quad x=2. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de α la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 18. Déterminer un réel a tel que la fonction suivante soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}+1 & \text{si} \quad x<0, \\ a & \text{si} \quad x=0, \\ 2+x\ln(x) & \text{si} \quad x>0. \end{cases}$$

Avec la valeur a trouvée, la fonction est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 19. Donner le domaine de définition et de dérivabilité des applications suivantes puis calculer leurs dérivées :

- $f_1(x) = \dfrac{x^3+2x+3}{x^2+2x+7}$;
- $f_2(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$;
- $f_3(x) = \ln(2x+9)$;
- $f_4(x) = \arcsin(3x+9)$;
- $f_5(x) = \dfrac{1}{x}\arccos(2x+1)$;
- $f_6(x) = \sqrt{x^2+2x-1}\arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$;
- $f_7(x) = \ln(1+x^2)$;
- $f_8(x) = \sqrt{e^x-1}$;

♣ $f_9(x) = \exp\left(\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+1}}\right)$;

♣ $f_{10}(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+x-1}{-3x+5}\right)$;

♣ $f_{11}(x) = \ln(\arctan(3x+1))$;

♣ $f_{12}(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{\ln(x)}}$;

♣ $f_{13}(x) = \ln(3-x^2-2x)+\arctan(\sqrt{3-x})$;

♣ $f_{14}(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$;

♣ $f_{15}(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$;

♣ $f_{16}(x) = \arccos(\sin(x))$.

Exercice 20. Appliquer la règle de l'Hospital pour calculer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 :

- $f : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x)^2-1}$; • $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$; • $h : x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{\tan(x)}$; • $k : x \mapsto \dfrac{x-\sin(x)}{x^3}$.

Exercice 21. Montrer que les équations suivantes ont des solutions dans l'intervalle I donné.
- $\sqrt{x^3+6x+1} = 2$ et $I = [0,+\infty[$;
- $\cos(2x) = 2\sin(x)-2$ et $I = \left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$;
- $x^7-x^2+1 = 0$ et $I = [-2,0]$.

Exercice 22. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, prouver que les équations suivantes admettent au moins une solution dans leurs domaines de définition :

- $x^2+\ln(x) = 0$;
- $\sin(x)+\cos(x) = \frac{3}{2}$;

♣ $x^{17} = 1-x^{11}$;

♣ $x^3+x+\frac{1}{x} = 0$.

Exercice 23. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les résultats suivants :
- pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \leq x$;

♣ pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $-x^2 \leq \cos(x)-1 \leq 0$.