Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 5 – POLYNÔMES – CORRIGÉ TD1

Exercice 1. *Déterminer le* pgcd *de* $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ *et* $Q = X^5 - X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 13X + 6$.

On remarque que $P = (X-1)^3$. Ainsi, $X-1$ est le seul diviseur irréductible de P. Pour savoir s'il divise aussi Q, on effectue la division euclidienne de Q par $X-1$. On obtient $Q = (X-1)(X^4-6X^2+7X-6)$, ce qui implique que $X-1$ divise Q. On effectue ensuite la division euclidienne du facteur X^4-6X^2+7X-6 par $X-1$. On obtient

$$X^4 - 6X^2 + 7X - 6 = (X-1)(X^3 + X^2 - 5X + 2) - 4.$$

Cette fois-ci, le reste est non nul, donc $X-1$ ne divise pas $X^4 - 6X^2 + 7X - 6$, et donc $(X-1)^2$ ne divise pas Q. Finalement, $\text{pgcd}(P, Q) = X - 1$.

Exercice 2. *Déterminer le* pgcd *et le* ppcm *de* P *et* Q*, ainsi qu'une relation de Bézout.*

1. $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$

   Pour trouver une relation de Bézout entre P et Q, on procède par divisions euclidiennes successives.

$$\begin{aligned} X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1 &= X(X^3 + X^2 - X - 1) - (2X^2 + 3X + 1) \\ X^3 + X^2 - X - 1 &= \left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right)(2X^2 + 3X + 1) - \frac{3}{4}(X+1) \\ 2X^2 + 3X + 1 &= \frac{3}{4}(X+1)\left(\frac{8}{3}X + \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

   On repart du dernier reste non nul.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}(X+1) &= \left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right)(2X^2 + 3X + 1) - (X^3 + X^2 - X - 1) \\ &= -\frac{1}{4}(2X-1)(X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1) + \frac{1}{4}(2X^2 - X - 4)(X^3 + X^2 - X - 1) \end{aligned}$$

   Ainsi $\frac{1}{3}(1-2X)P + \frac{1}{3}(2X^2 - X - 4)Q = X+1$ est une relation de Bézout. En effet, la relation montre que tout polynôme qui divise P et Q divise aussi $X+1$, et on vérifie que $P = (X+1)(X^3-3X-1)$ et $Q = (X+1)^2(X-1)$. On en déduit que

$$\text{pgcd}(P, Q) = X + 1 \qquad \text{et} \qquad \text{ppcm}(P, Q) = (X+1)^2(X-1)(X^3 - 3X - 1).$$

   Rappel : les coefficients de la relation de Bézout ne sont pas uniques.

2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$

$$\frac{1}{7}(X+3)P + \frac{1}{7}(-X^3 - 3X^2 + X + 4)Q = 1$$

$$\text{pgcd}(P, Q) = 1 \qquad \text{ppcm}(P, Q) = PQ$$

Exercice 3.

1. *Trouver le* pgcd *de* $X^{24}-1$ *et* $X^{15}-1$ *; de* $X^{42}-1$ *et* $X^{18}-1$.

   En procédant par divisions euclidiennes successives, on obtient $\text{pgcd}(X^{24}-1, X^{15}-1) = X^3-1$ et $\text{pgcd}(X^{42}-1, X^{18}-1) = X^6-1$.

2. *Soient* m *et* n *deux entiers strictement positifs tels que* m *divise* n*. Montrer que* X^m-1 *divise* X^n-1.

   Il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = km$. On a alors $X^n-1 = (X^m-1)\sum_{j=0}^{k-1} X^{mj}$. Ainsi, X^m-1 divise X^n-1.

3. *Soient* a *et* b *deux entiers strictement positifs. On note* r *le reste de la division euclidienne de* a *par* b*. Déterminer le reste de la division euclidienne de* X^a-1 *par* X^b-1.

   Soit q le quotient de la division euclidienne de a par b (on a donc $a = qb+r$, $q \in \mathbb{N}$ et $0 < r < b$). Alors
   $$X^a-1 = (X^b-1)\sum_{j=0}^{q-1} X^{bj+r} + (X^r-1).$$
   Donc le reste de la division euclidienne de X^a-1 par X^b-1 est X^r-1.

4. *Déterminer le* pgcd *de* X^a-1 *et* X^b-1.

   Lorsqu'on applique l'algorithme d'Euclide (divisions euclidiennes successives) à a et b, le dernier reste non nul est $\text{pgcd}(a,b)$. D'après la question précedente, le dernier reste non nul lorsqu'on applique l'algorithme d'Euclide à X^a-1 et X^b-1 est donc $X^{\text{pgcd}(a,b)}-1$. Ainsi $\text{pgcd}(X^a-1, X^b-1) = X^{\text{pgcd}(a,b)}-1$.

Exercice 4. *On définit par récurrence les polynômes de Tchebychev par*

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

1. *Calculer* T_2*,* T_3 *et* T_4.

   $T_2 = 2X^2-1$, $T_3 = 4X^3-3X$, $T_4 = 8X^4-8X^2+1$.

2. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, déterminer le degré et le coefficient dominant de* T_n.

   On vérifie par récurrence généralisée sur $n \in \mathbb{N}$ que le degré de T_n est n. En effet, c'est vrai pour $n = 0, 1$ et on a $\deg(T_{n+1}) = \deg(XT_n) = \deg(T_n)+1$ car $\deg(T_{n-1}) < \deg(XT_n)$.
   Le coefficient dominant de T_0 est 1 et on vérifie par récurrence généralisée sur $n \in \mathbb{N}^*$ que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour tout $n > 0$.

3. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* T_n *et* T_{n+1} *sont premiers entre eux.*

   On procède à nouveau par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Les polynômes T_0 et T_1 sont bien premiers entre eux. Supposons que T_{n-1} et T_n sont premiers entre eux. Si P est un polynôme unitaire qui divise T_{n+1} et T_n, la relation $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ montre qu'il divise aussi T_{n-1} ; alors P divise T_{n-1} et T_n, donc $P = 1$. On en déduit que T_n et T_{n+1} sont premiers entre eux.

4. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$*, calculer* $T_n\big(\cos(\theta)\big)$.

   Montrons, par récurrence généralisée sur $n \in \mathbb{N}$, que $T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$ (hypothèse qui nous vient après avoir calculé $T_n\big(\cos(\theta)\big)$ pour de petits n). On a bien $T_0\big(\cos(\theta)\big) = 1 = \cos(0)$ et $T_1\big(\cos(\theta)\big) = \cos(\theta)$. Supposons l'hypothèse vérifiée jusqu'au rang n et calculons $T_{n+1}\big(\cos(\theta)\big)$. En utilisant la définition de T_{n+1} et l'hypothèse de récurrence aux rangs n et $n-1$, on obtient :

$$\begin{aligned} T_{n+1}\big(\cos(\theta)\big) &= 2\cos(\theta)T_n\big(\cos(\theta)\big) - T_{n-1}\big(\cos(\theta)\big) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos\big((n-1)\theta\big) \end{aligned}$$

Or les relations trigonométriques

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\big((n+1)\theta\big) = \cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta) \\ \cos\big((n-1)\theta\big) = \cos(\theta)\cos(n\theta) + \sin(\theta)\sin(n\theta) \end{array} \right.$$

donnent $\cos\big((n+1)\theta\big)+\cos\big((n-1)\theta\big) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$. On en déduit $T_{n+1}\big(\cos(\theta)\big) = \cos\big((n+1)\theta\big)$.

Exercice 5. *Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On note $p = \deg(P)$ et $q = \deg(Q)$. On suppose $p, q > 0$. On considère l'application*

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X]_{q-1} \times \mathbb{K}[X]_{p-1} & \to & \mathbb{K}[X]_{p+q-1} \\ (U,V) & \mapsto & UP+VQ \end{array} \right. .$$

À quelle condition sur P et Q l'application ϕ est-elle bijective ?

Supposons d'abord que P et Q ne sont pas premiers entre eux, c'est-à-dire que $\mathrm{pgcd}(P,Q) \neq 1$. Comme tout polynôme de la forme $UP+VQ$ est divisible par $\mathrm{pgcd}(P,Q)$, l'image de ϕ ne contient que des polynômes divisibles par $\mathrm{pgcd}(P,Q)$; en particulier elle ne contient pas 1. Dans ce cas, l'application ϕ n'est pas surjective. On pouvait aussi montrer qu'elle n'est pas injective. En effet, il existe des polynômes R et S tels que $P = R.\mathrm{pgcd}(P,Q)$ et $Q = S.\mathrm{pgcd}(P,Q)$. On a alors $\deg(R) < q$, $\deg(S) < p$ et $\phi(R,S) = 0 = \phi(0,0)$.
Supposons maintenant P et Q premiers entre eux. Alors il existe des polynômes A et B tels que $AP+BQ = 1$. Si $S \in \mathbb{K}[X]_{p+q-1}$, on a $S = SAP + SBQ$. Par division euclidienne, il existe des polynômes T, R tels que $SA = TQ + R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$. Donc $R \in \mathbb{K}[X]_{q-1}$ et $S = RP + (TP+SB)Q$. Si $\deg(TP+SB) \geq p$, alors $\deg\big((TP+SB)Q\big) \geq p+q$ et donc, comme $\deg(RP) < p+q$, $\deg(S) = \deg\big((TP+SB)Q\big) \geq p+q$. C'est contradictoire puisque $S \in \mathbb{K}[X]_{p+q-1}$. Donc $\deg(TP+SB) < p$ et $S = \phi(R, TP+SB)$. Ainsi ϕ est surjective.
Prenons maintenant $U, S \in \mathbb{K}[X]_{q-1}$ et $V, T \in \mathbb{K}[X]_{p-1}$ et supposons que $\phi(U,V) = \phi(S,T)$. Alors $UP+VQ = SP+TQ$ implique $(U-S)P = (T-V)Q$. Comme Q est premier avec P, on en déduit que Q divise $U-S$. Or $\deg(Q) > \deg(U-S)$, donc $U-S = 0$. Ainsi, $U = S$, et par suite, $V = T$. Donc ϕ est injective.
Finalement, ϕ est bijective si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.