Chapitre 1 : Vecteurs dans le plan et l'espace

Table des matières

Afin de mieux comprendre la nature et le monde qui l'entoure, l'homme a depuis longtemps cherché à le décrire en développant un certain nombre de sciences telles la physique, la chimie ou la mécanique. Et pour développer ces sciences, les mathématiques se sont, au fil du temps, imposées comme outil fondamental permettant de produire un cadre rigoureux de modélisation. Ainsi, en développant l'étude des nombres entiers, l'arithmétique a permis de mieux appréhender certaines problématique de comptage d'objets ; on pourra citer, par exemple, le nombre de tête d'un bétail ou de soldats dans une armée. Les nombres réels, quant à eux, ont facilité la manipulation de quantités qui ne peuvent être comptés, comme un volume d'eau, une durée entre deux évènements ou un pourcentage. Mais il existe toutefois des quantités qui ne peuvent pas se réduire à un nombre. Ainsi :

1. la notion de déplacement d'une personne dans un grand champs ne se réduit pas à la distance qu'il parcourt. Savoir que ce dernier s'est déplacé de 3, puis 5, puis 2 mètres ne permet en effet pas de savoir où il se situe au terme de son déplacement. Il faut, pour cela, connaître la direction dans laquelle la personne a parcouru ces 3 puis 5 puis 2 mètres, et savoir si, à chaque fois, elle avançait ou reculait. Le résultat sera alors la somme de toutes ces données pour chacune des trois étapes ;

2. la notion de force, non plus, ne se réduit pas à son intensité. Une balle suspendue à un fil près d'un ventilateur subira plusieurs forces dont il faudra connaître la puissance, bien sûr, mais aussi la direction et la nature. Ainsi, la gravitation attirera la balle vers la bas avec une intensité dépendant de son poids, mais le ventilateur quant à lui pourra, selon le sens dans lequel il tourne, repousser ou attirer la balle horinzontalement, et le fil apportera une résistance parallèle à sa direction de tension. Là aussi, le mouvement de la balle sera lié à la somme de toutes ces données.

Issue de la géométrie, la notion de *vecteur* est une notion mathématique permettant de modéliser de telles situations. Comme nous venons de le voir, c'est une notion qui doit pouvoir se sommer, et de pouvoir ainsi sommer, cela donnera un cadre *algébrique* permettant de les manipuler par le calcul. Cela offrira dès lors un moyen plus facile de résoudre certains problèmes concrets, plus facile car réduit à de simples règles de calcul, et détaché de toute la complexité de la situation physique réelle.

Ce premier chapitre est dédié à l'étude de ces vecteurs.

1 Vecteurs

1.1 Définition

Reprenons les exemples donnés en introduction afin d'établir un cahier des charges pour la notion de vecteurs.

La notion de déplacement que l'on souhaite modéliser est une notion relative mesurant la différence de position entre le début et la fin du mouvement, elle ne dépend donc pas du point de départ : deux personnes se déplaçant parallèlement auront effectué le même déplacement quand bien même elles ont commencé et terminé à des endroits différents. De même, la gravitation induira une force vers le bas sur une bille de plomb quelque soit la position de la bille. La notion de vecteur ne doit donc pas être localisée à un endroit, mais doit au contraire pouvoir être transportée parallélement sans problème.

Selon que l'on étudie un véhicule sur le sol ou un drone dans les airs, un déplacement peut être considéré dans le plan ou dans l'espace. De même, selon que l'on étudie un système mécanique posé sur une table ou libre dans une pièce, l'étude des forces qui s'appliquent dessus pourra se faire dans le plan ou dans l'espace. De fait, il est possible de considérer des vecteurs en dimension 2 (dans le plan) ou en dimension 3 (dans l'espace). Il est, en réalité, également possible (et parfois nécessaire) de considérer des vecteurs en dimension 1 ou en dimension 4 et plus, mais dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons aux dimensions 2 et 3.

Que ce soit pour décrire un déplacement ou une force, un vecteur est donc caractérisé par sa *norme*, un nombre réel qui indique ou bien la distance parcourue ou bien l'intensité de la force, une direction, c'est-à-dire un axe parallélement auquel le déplacement se fait (par exemple l'axe nord/sud, est/ouest ou nord-ouest/sud-est) ou la force agit (par exemple horizontalement ou verticalement) et finalement un sens de parcours pour cet axe, selon que le déplacement se fait vers l'avant ou vers l'arrière, ou que la force est attractive ou répulsive. Il existe toutefois un cas très particulier correspondant au non-déplacement ou à l'absence de force ; il s'agit du vecteur nul. Dans ce cas, l'intensité est clairement nul, mais il est bien délicat de donner une direction. C'est pourtant un cas de figure tout aussi réel et possible que les autres, et il faudra donc le prendre en compte.

Définition
Un vecteur non-nul *dans le plan (respectivement, dans l'espace) est un objet caractérisé par :*

- *une direction (aussi appelée axe), c'est-à-dire une droite $\mathcal{D}$ dans le plan (respectivement, dans l'espace) à translation près. Cela signifiant que la direction peut être tout aussi bien donnée* *par n'importe quelle autre droite* [1] *parallèle à $\mathcal{D}$;*

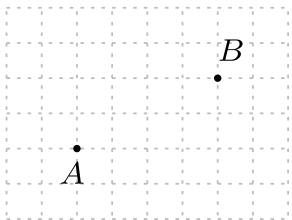
- *un sens, c'est-à-dire un sens de parcours de la droite $\mathcal{D}$;*
- *une norme, donnée par un nombre réel strictement positif.*

Le vecteur nul *est caractérisé par une norme égale à zéro ; il ne possède pas ni direction ni sens.*
Un vecteur *est, soit un vecteur non-nul, soit le vecteur nul.*

Attention ! *Dans la langue française, les mots* direction *et* sens *sont souvent employés pour désigner la même idée. Par exemple, dans la vie de tous les jours, on pourra dire "aller dans le même sens" ou "aller dans la même direction" et les deux expressions auront la même signification. En particulier, Dans le language courant, le mot* direction *regroupe souvent les notions d'axe et de sens simultanément. Par exemple, on a l'habitude de dire que "vers le Nord" et "vers le Sud" sont deux directions différentes.*

En mathématiques, et notamment dans le cadre de l'étude des vecteurs, les termes direction *et* sens *désignent deux informations bien différentes. En particulier, un déplacement vers le Nord et un déplacement vers le Sud seront mathématiquement dans la même direction (l'axe Nord-Sud), mais ne seront pas dans le même sens.*

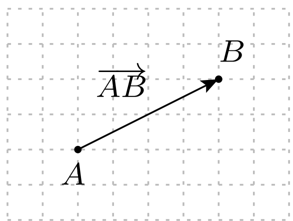
Nous avons dit plus haut qu'un déplacement, c'était la différence entre une position initiale et une position finale. La donnée de ces deux positions permet donc de figurer ce déplacement. Plus généralement, une méthode classique et efficace de représenter un vecteur est de le concevoir comme différence entre un point de départ et un point d'arrivée. Ainsi, en se donnant deux points distincts A et B du plan :



on peut y associer un vecteur non-nul dont :

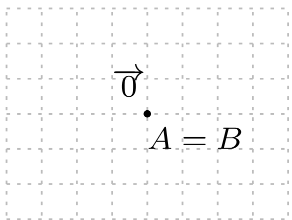
- la direction est donnée par la droite (AB) ;
- le sens est donnée comme allant de A vers B ;
- l'intensité est donnée par la distance entre A et B.

On note traditionellement ce vecteur :



.

Si les deux points sont égaux :



1. Une façon équivalente de dire cela, c'est de considérer que la direction est donnée par l'ensemble de toutes les droites parallèles à $\mathcal{D}$, autrement dit par un ensemble maximal de droites parallèles, lequel est alors entièrement caractérisé par n'importe laquelle de ces droites.

on ne peut plus parler de la droite (AB) car il y a une infinité de droites par A et $B(=A)$, on ne peut donc pas parler de direction, mais il reste une intensité qui vaut zéro. C'est le vecteur nul, lequel correspond effectivement à une absence de déplacement entre les points de départ et d'arrivée.

Dans ce qui précède, nous avons dessiné dans le plan pour des raisons évidentes, mais tout se passe de la même manière lorsque A et B sont deux points de l'espace.

Notation Par analogie avec la notation $\overrightarrow{AB}$, un vecteur ,sera en général noté surmonté d'une flèche. On parlera ainsi des vecteurs $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{\alpha}$. Ainsi, le vecteur nul est souvent noté $\overrightarrow{0}$. Et toujours par analogie avec la représentation par deux points, la norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ (ou $\overrightarrow{v}$, ou $\overrightarrow{AB}$) sera parfois appelée *longueur* du vecteur[2], et notée $\|\overrightarrow{u}\|$ (ou $\|\overrightarrow{v}\|$, ou $\|\overrightarrow{AB}\|$).

Ainsi, la donnée de deux points permet de décrire un vecteur. Réciproquement, tout vecteur peut être décrit par deux points ; on peut même choisir librement le premier point.

Proposition 1.1 *Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout point A, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB}$ représente $\overrightarrow{u}$.*

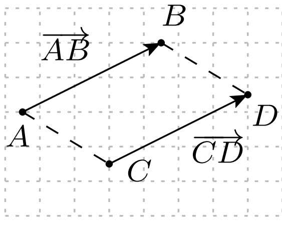
Preuve. S'il s'agit du vecteur nul, alors $B = A$ est clairement l'unique solution.Si le vecteur est non-nul, alors B doit nécessairement se positionner sur l'unique droite parallèle à l'axe de $\overrightarrow{u}$ et passant par A. Le sens de $\overrightarrow{u}$ donne même plus précisemment la demi-droite d'origine A sur laquelle B doit être. Enfin, la longueur de $\overrightarrow{u}$ donne la distance de B à A, ce qui détermine un unique point sur cette demi-droite. ■

Tout vecteur peut donc se représenter sous la forme $\overrightarrow{AB}$, avec A et B des points du plan ou de l'espace, mais cette représentation n'est pas unique puisque nous sommes libre de choisir arbitrairement A.

Remarque : *On peut faire le choix de fixer une fois pour toute un point d'origine A_0. Il y a alors une correspondance univoque entre les vecteurs ($\overrightarrow{u}$) et les points (B telle que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A_0B}$). Cette stratégie est bien adaptée à l'étude des forces exercées en un point, car on peut alors choisir le point en question comme origine, mais elle l'est moins à celle des déplacements. Par ailleurs, et comme nous le verrons dans la section suivante, le fait de ne pas fixer d'origine permettra de rendre plus claire la notion de somme de vecteurs.*

La géométrie élémentaire (dans le plan ou dans l'espace) permet d'identifier facilement lorsque deux paires de points A, B et C, D décrivent le même vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Proposition 1.2 *Soit A, B, C et D quatre points du plan ou de l'espace. On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme*

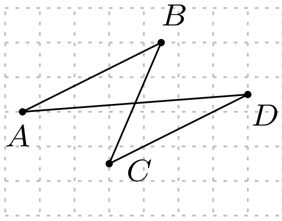


,

2. N'en déplaise aux forces, on ne parle que très rarement de l'intensité d'un vecteur...

c'est-à-dire si les droites (AB) et (CD) d'une part, et (AC) et (BD) sont parallèles.

Attention ! *L'ordre des points, et notamment l'inversion des points C et D, dans le quadrilatère $ABDC$ est important. En effet, dans $ABCD$:*



,

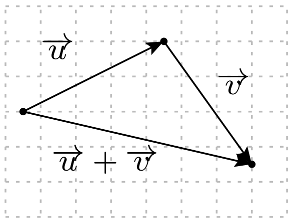
les droites (AB) et (CD) sont parallèles, mais les droites (AD) et (BC) ne le sont pas.

Remarque : *Un parallélogramme étant défini par le parallélisme de ses cotés opposés, il est clair que $ABDC$ est un paraléllogramme si et seulement si $BDCA$ l'est. On en déduit que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.*

1.2 Opérations

L'un des atouts majeurs des vecteurs est de pouvoir effectuer des calculs dessus. Mais il faut pour cela bien définir les opérations autorisées.

Dans une perspective d'étude de déplacements, ce que doit être la somme de deux vecteurs semble assez claire : on effectue d'abord le premier déplacement, puis le second en partant du point d'arrivée du premier. Dans le plan comme dans l'espace, on définit donc graphiquement la somme de vecteurs comme suit :



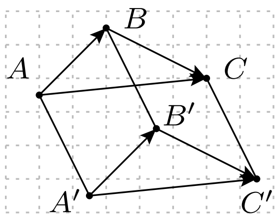
.

Pour formaliser cela, on peut utiliser la représentation par couples de points.

Définition *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois pojnts tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. On définit $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ comme le vecteur $\overrightarrow{AC}$. Par définition, on a donc*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad \textit{(relation de Chasles).}$$

Cette définition a du sens car on peut fixer un point A et alors, d'après la proposition 1.1, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et, ensuite, un unique point C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$. Il faut toutefois faire attention, car le résultat pourrait dépendre du choix, a priori arbitraire, du point A. Il faut donc s'assurer que, pour un autre choix de point A', les points B' et C' vérifiant $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{v}$ sont tels que $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$. On peut toutefois vérifier cela à l'aide de la proposition 1.2 et d'un peu de géométrie élémentaire. On montre en effet que, dans la configuration suivante :

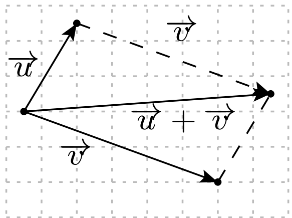


,

si les quadrilatères $ABB'A'$ et $BCC'B'$ sont des parallélogrammes, alors le quadrilatère $ACC'A'$ l'est aussi.

Du point de vue de l'analyse des forces agissant sur un objet, la notion de somme de vecteurs semble moins évidente. Mais au vu de la définition ci-dessus, couplée à la proposition 1.2, on peut donner la définition alternative, mais équivalente, suivante :

Définition alternative *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On définit $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ comme le vecteur $\overrightarrow{AD}$ où D est l'unique point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme :*



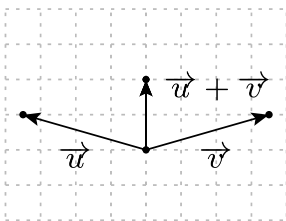
.

Remarque : *Nous nous sommes servi ici d'une interprétation "déplacement" des vecteurs pour définir une notion de somme que nous avons ensuite transposée au cadre de l'études des forces sur un objet. Or il s'avère qu'une telle définition de la résultante de deux forces fonctionne parfaitement avec les règles de la mécanique classique. On voit ici l'intérêt de développer une théorie abstraite des vecteurs, laquelle peut s'inspirer de situations très différentes, et permettre des interactions entre des domaines a priori distincts.*

Attention ! *Nous venons de voir une notion de somme pour les vecteurs. Puisqu'il existe également une notion de somme pour les nombres réels et que les longueurs des vecteurs sont des nombres réels, il peut être tentant de penser que ces deux notions sont compatibles, c'est-à-dire que la longueur de la somme de deux vecteurs est égale à la somme des longueurs des deux vecteurs. IL N'EN EST RIEN ! Les deux sont reliés par ce qu'on appelle l'*inégalité triangulaire *:*

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|,$$

vraie pour n'importes quels vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, aussi bien dans le plan que dans l'espace, mais l'égalité est en général fausse, comme on pourra s'en convaincre, entre autre, sur l'exemple suivant :



.

Enumérons maintenant les propriétés fondamentales de la somme pour les vecteurs.

Propriétés 1.10 *Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a :*

1. $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$ *; autrement dit, lorsqu'on somme trois vecteurs, l'ordre dans lequel on fait les opération n'importe pas. On dit que la somme est* associative.
2. $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ *; autrement dit, l'ordre des vecteurs dans la somme n'importe pas. On dit que la somme est* commutative.
3. $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$*. On dit que le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est un* élément neutre *pour la somme.*
4. *il existe un vecteur $\overrightarrow{u}'$ tel que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}'=\overrightarrow{0}$. On dit que $\overrightarrow{u}$ admet un* inverse *et on note en général cet inverse $-\overrightarrow{u}$.*

Preuve.

1. Cela provient de la relation de Chasles. En effet, en prenant des points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{CD}$, on a

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w} &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots+\overrightarrow{CD}\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\ &= \overrightarrow{AB}+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}.\end{aligned}$$

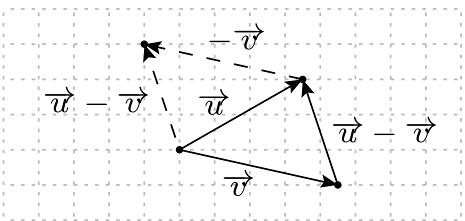
2. Ce résultat est évident au vu de la définition alternative de la somme.
3. Cela provient encore de la relation de Chasles. En effet, en prenant des points A et B tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$, on a $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$.
4. Cela provient toujours de la relation de Chasles. En effet, en prenant des points A et B tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$, on peut poser $\overrightarrow{u}'=\overrightarrow{BA}$ et l'on a alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}'=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$.

■

Remarque : *On peut montrer que l'inverse d'un vecteur est unique, il correspond à changer le sens du vecteur sans modifier ni la direction ni la longueur. En accord avec les notations, cela permet de définir de manière générale la différence de deux vecteurs par la formule*

$$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}:=\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{v}).$$

On peut alors vérifier que l'égalité $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}$ est équivalente, dans le sens où l'une est vraie si et seulement si l'autre l'est, à l'égalité $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$. Autrement dit, la différence $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, c'est qu'il faut ajouter à $\overrightarrow{v}$ pour obtenir $\overrightarrow{u}$:



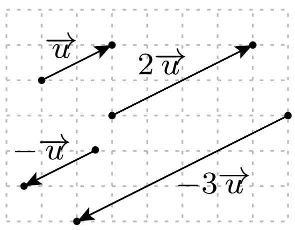
.

Que ce soit au sujet d'un déplacement ou d'une force, il semble assez naturel de savoir ce que signifie de le multiplier par un nombre réel positif : on garde la même direction et le même sens, et on multiplie la longueur par le dit nombre réel. Ainsi, on pourra dire d'un déplacement qu'il est égal à une fois et demi un autre déplacement s'il consiste à parcourir une fois et demi la longueur du second dans la même direction et le même sens ; et on pourra dire d'une force qu'elle est égale à deux fois une autre si elle tire dans le même sens, mais deux fois plus fort. Par ailleurs, nous avons donné ci-dessus un sens à la multiplication par -1, à savoir l'opposé qui, dans le cadre des déplacements, correspond à parcourir le même chemin en sens inverse pour revenir au point de départ et, dans le cadre des forces, à une force de même intensité mais de sens contraire. En combinant les deux, nous pouvons donc définir ce qu'est la multiplication d'un vecteur par un nombre réel quelconque. Dans ce cadre, le nombre réel est souvent appelé *scalaire*.

Définition *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire.*

- *Si $\lambda > 0$, on définit $\lambda.\overrightarrow{u}$ comme le vecteur ayant même direction et même sens que $\overrightarrow{u}$ mais dont la longueur vaut $\lambda.\|\overrightarrow{u}\|$.*
- *Si $\lambda < 0$, on définit $\lambda.\overrightarrow{u}$ comme le vecteur $|\lambda|.(-\overrightarrow{u})$, c'est-à-dire que la direction est conservée, que le sens est inversé et que la longueur est multipliée par la valeur absolue de λ.*
- *Si $\lambda = 0$, on définit $\lambda.\overrightarrow{u}$ comme étant le vecteur nul.*

Exemple.

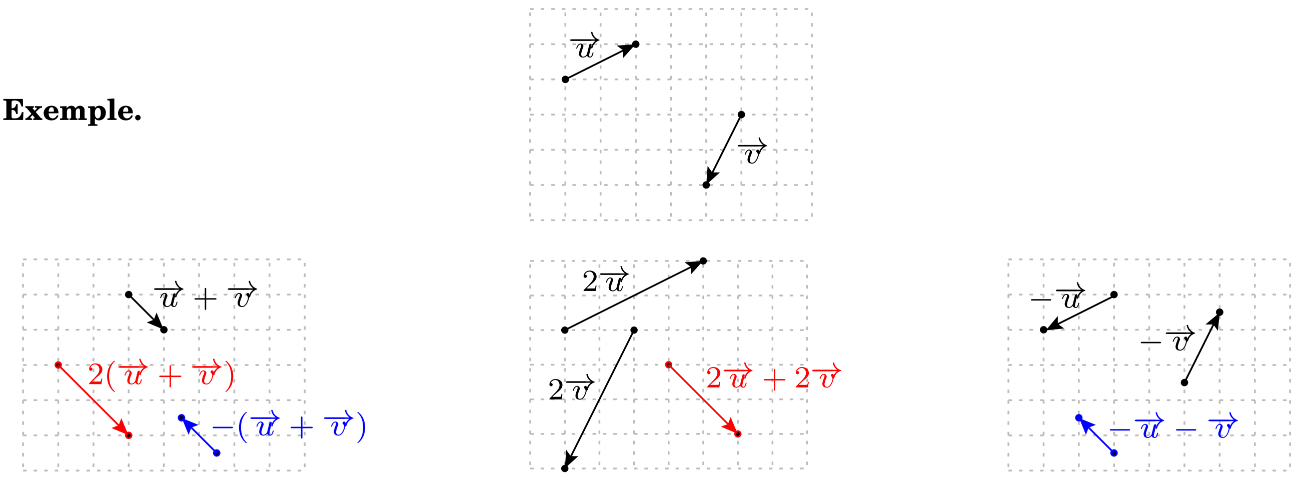


A l'aide de géométrie élémentaire, et en particulier du théorème de Thalès, on peut montrer, en faisant une étude au cas par cas, les propriétés de calcul suivantes :

Propriétés 1.14 *Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et tous scalaires λ et μ, on a :*

1. $\lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v}$.
2. $(\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}$.
3. $\lambda.(\mu.\overrightarrow{u}) = (\lambda.\mu).\overrightarrow{u}$.
4. $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ *et* $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
5. $\lambda.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
6. $\|\lambda.\overrightarrow{u}\| = |\lambda|.\|\overrightarrow{u}\|$.

Exemple.



2 Bases

Nous allons maintenant définir un cadre plus algébrique pour manipuler les vecteurs. Cela nous permettra de déterminer des sommes et des normes de vecteurs de façon purement calculatoire. Pour cela nous allons avoir besoin de vecteurs de "référence" (deux dans le plan, trois dans l'espace) qui formeront des *bases* du plan ou de l'espace. Un vecteur quelconque pourra alors se décomposer suivant cette base en deux ou trois coordonnées, permettant ainsi de le représenter par un couple ou un triplet de nombres réels.

2.1 Dans le plan

Définition *Deux vecteurs non-nuls du plan $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits* colinéaires *s'ils ont la même direction ou si, de manière équivalente, il existe un nombre réel non nul λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{v}$.*
Par convention, le vecteur nul est colinéaire avec tout autre vecteur.

Proposition 2.1 *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont représentés par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ alors les deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si les trois points A, B, C sont alignés.*

Remarque : *La proposition précédente ne s'applique que si les deux vecteurs ne sont représentés qu'à l'aide de* trois *points. En effet, si A, B, C et D sont les* quatre *sommets d'un parallélogramme non aplati, nous avons vu que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors que les points ne sont pas alignés.*

Attention ! *Les adjectifs "colinéaires" et "alignés" ne s'appliquent pas aux mêmes objets. L'alignement concerne les points alors que la colinéarité concerne les vecteurs. Il est donc incorrect de dire que deux vecteurs sont alignés.*

Définition *Deux vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan qui ne sont pas colinéaires forment ce qu'on appelle une* base *du plan. On notera alors cette base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.*

Attention ! *L'ordre des vecteurs dans une base est important. La base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ n'est pas égale à la base $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1})$.*

Exemple. *Une base qui est utilisée dans la plupart des cas est la base dite* canonique. *Cette base est constituée des deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ tel que $\overrightarrow{e_1}$ est le vecteur de norme 1 sur la demie-droite Ox (l'axe des abcisses), et $\overrightarrow{e_2}$ est le vecteur de norme 1 sur la demie-droite Oy (l'axe des ordonnées). En l'absence d'indication contraire, c'est cette base que l'on utilisera.*

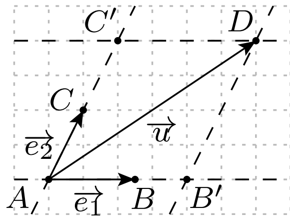
L'intérêt d'une base est de pouvoir décomposer un vecteur quelconque en une combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Théorème 2.1 *Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque du plan. Alors il existe deux réels u_1 et u_2 tels que*

$$\overrightarrow{u} = u_1.\overrightarrow{e_1} + u_2.\overrightarrow{e_2}.$$

Ces nombres sont uniques et sont appelés coordonnées *du vecteur $\overrightarrow{u}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.*

Preuve. On choisit des représentants des trois vecteurs $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD}$. On construit la droite parallèle à (AB) passant par D. Cette droite coupe (AC) en un point C'. De même la droite parallèle à (AC) passant par D coupe la droite (AB) en un point B'. Le quadrilatère $AB'DC'$ est un parallèlogramme, et de plus $\overrightarrow{AB'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$. Il existe donc deux réels u_1 et u_2 tels que $\overrightarrow{AB'} = u_1.\overrightarrow{AB} = u_1.\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{AC'} = u_2.\overrightarrow{AC} = u_2.\overrightarrow{e_2}$. On obtient donc bien $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2}$.



Pour démontrer que ces nombres sont uniques on raisonne par l'absurde. Supposons donc qu'il existe des réels u_1' et u_2' tels que $\overrightarrow{u} = u_1'.\overrightarrow{e_1} + u_2'.\overrightarrow{e_2}$ et tels que $u_1 \neq u_1'$. On a alors $u_1.\overrightarrow{e_1} + u_2.\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{u} = u_1'.\overrightarrow{e_1} + u_2'.\overrightarrow{e_2}$ et donc $(u_1 - u_1')\overrightarrow{e_1} = (u_2' - u_2)\overrightarrow{e_2}$ avec $(u_1 - u_1') \neq 0$. Cela implique que

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{u_2' - u_2}{u_1 - u_1'}\overrightarrow{e_2},$$

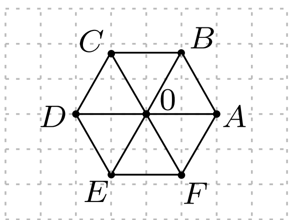
et donc que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont colinéaires. Cela donne une contradiction, car $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base du plan. ∎

Remarque : *Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie. Si aucune information n'est donnée sur la base, on supposera que c'est la base* canonique *qui est utilisée.*

Si une base du plan est fixée, on notera un vecteur via la notation en colonne

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = u_1.\overrightarrow{e_1} + u_2.\overrightarrow{e_2}$$

Exemple. *On considère les points suivants du plan :*



.

On peut vérifier que $\mathcal{B}_1 := (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $\mathcal{B}_2 := (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$ et $\mathcal{B}_3 := (\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{AB})$ forment trois bases du plan. Concernant le vecteur $\overrightarrow{AC}$, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -2.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\ ; \\
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = -\overrightarrow{OE} + 2.\overrightarrow{OC} = 2.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE}\ ; \\
\overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{DF} + 0.\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

On en déduit que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont :

- $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *dans la base $\mathcal{B}_1$;*

- $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *dans la base* $\mathcal{B}_2$ *;*
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *dans la base* $\mathcal{B}_3$.

Notons au passage que la base $\mathcal{B}_4 := (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{DC})$ *est égale à* $\mathcal{B}_1$ *puisque* $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB}$. *Les coordonnées de* $\overrightarrow{AC}$ *dans la base* $\mathcal{B}_4$ *sont donc également* $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a les propriétés suivantes :

Propriétés 2.9 *Soit* $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ *une base du plan,* λ *un nombre réel, et deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *dont les coordonées dans la base* $\mathcal{B}$ *sont*

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\bullet\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases} ; \qquad \bullet\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} ; \qquad \bullet\ \lambda.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}.$$

Preuve. On a $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{u} = u_1.\overrightarrow{e_1} + u_2.\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{v} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$.
On en déduit que :

- $$\begin{aligned} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} &\iff \dots\overrightarrow{e_1} + \dots\overrightarrow{e_2} = \dots\overrightarrow{e_1} + \dots\overrightarrow{e_2} \\ &\iff \begin{cases} u_1 = \dots \\ u_2 = \dots \end{cases} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= \dots\dots\dots\dots + \dots\dots\dots\dots \\ &= (\dots\dots\dots)\overrightarrow{e_1} + (\dots\dots\dots)\overrightarrow{e_2} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- $$\lambda.\overrightarrow{u} = \lambda.(\dots\dots\dots + \dots\dots\dots) = \dots\overrightarrow{e_1} + \dots\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}$$

■

Une fois choisie une base du plan (par exemple la base canonique), les manipulations de vecteurs (somme, multiplication par un scalaire, équations) se traduisent entièrement par des manipulations de nombres réels qui pourront être effectués de manière beaucoup plus simple.

Exemple. *Si* A *et* B *sont deux points du plan donnés par leurs coordonnées dans le repère* Oxy, *de sorte que* $A = (x_A, y_A)$ *et* $B = (x_B, y_B)$. *Alors les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *dans la base canonique sont données par*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Attention ! *Ne pas confondre les coordonnées d'un point et les coordonnées d'un vecteur. Même si les deux objets sont tous les deux représentés par un couple de nombres réels, il ne vivent pas dans le même monde. C'est pourquoi on essaiera autant que possible d'écrire les coordonnées des points en ligne, par exemple le point* $A = (2, 1)$, *et les coordonnées des vecteurs en colonne, par exemple le vecteur* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour savoir si deux vecteurs du plan sont colinéaires, il faut déterminer si l'un est produit de l'autre par un nombre réel. Lorsque les vecteurs sont donnés avec leurs coordonnées, cela peut se faire assez rapidement par analyse-synthèse.

Exemple. *Les vecteurs* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$ *sont-ils colinéaires ?*

En regardant la première coordonnée des deux vecteurs, on voit facilement que $-8 = 6 \times (\dots)$. *Il reste alors à vérifier si* $-9 \times (\dots)$ *donne bien la deuxième coordonnée de* $\vec{v}$*, et en effet* $-9 \times (\dots) = 12$. *On en déduit que* $\vec{v} = (\dots)\vec{u}$ *et donc que les vecteurs sont colinéaires.*

Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *sont-ils colinéaires ?*

En regardant la première coordonnée, on voit que $2 = 1 \times (2)$. *Mais on calcule que* $3 \times (2) = 6 \neq 4$. *On en déduit que* $\vec{v}$ *et* $\vec{u}$ *ne sont pas colinéaires.*

Il existe une deuxième méthode pour déterminer si deux vecteurs du plan sont colinéaires. Celle-ci utilise la notion de *déterminant*.

Définition *Soit* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ *une base du plan, et deux vecteurs* $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. *Le* déterminant *des vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*, noté* $\det(\vec{u}, \vec{v})$*, est le nombre :*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Proposition 2.2 *Deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires si et seulement si* $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. *Autrement dit, deux vecteurs du plan forment une base si et seulement si leur déterminant est non-nul.*

Preuve. Supposons, pour commencer, que $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$. Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$; mais alors $v_1 =$ ...., $v_2 =$ .... et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1 =$ .... $= 0$. Réciproquement, si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, alors $u_1 v_2 - u_2 v_1 =$ ...... et donc on a $\frac{u_1}{v_1} =$ .... On pose $\lambda := \frac{u_1}{v_1}$. On alors $u_1 = \lambda$...... et, de même, $u_2 =$ .... On en déduit que $\vec{u} =$ ....$\vec{v}$ et donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Les cas, plus simples, où $v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$ sont laissés en exercices. ■

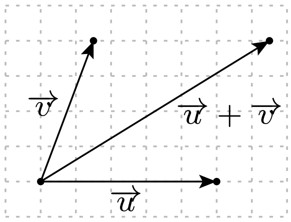
Remarque : *Si deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la valeur (non-nulle) du déterminant dépend de la base qu'on a choisie pour écrire les vecteurs.*

Attention ! *La méthode du déterminant pour déterminer si deux vecteurs sont colinéaires ne marche que pour des vecteurs du plan.*

2.2 Dans l'espace

Définition *Soient* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *trois vecteurs de l'espace. On dit que* $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont coplanaires si, lorsqu'on choisit des représentants avec un même point de départ* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ *et* $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$*, les quatre points* A, B, C, D *sont dans un même plan.*

Attention ! *Ne pas confondre les notions de colinéarité et de coplanarité. Trois vecteurs peuvent être coplanaires, sans qu'aucune paire de vecteur ne soit colinéaire. Il suffit, pour voir cela, de considérer deux vecteurs non colinéaires et de rajouter leur somme qui sera alors bien entendu dans le même plan :*



.

Cependant, si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors nécessairement $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ seront coplanaires, quel que soit le vecteur $\overrightarrow{w}$. En particulier, si un des vecteurs est nul, alors les trois vecteurs sont coplanaires.

Proposition 2.3 *Soit trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ tels qu'aucun n'est colinéaire à l'un des deux autres. Alors $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement il existe deux réels λ, μ tels que*

$$\overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}.$$

Preuve. Si les vecteurs sont coplanaires, alors on peut raisonner dans le plan qui les contient. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant non colinéaires, ils forment une base de ce plan, et d'après la section précédente, il existe bien des réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$, alors on peut écrire $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ avec A, B, C des points de l'espace, et les trois vecteurs sont alors clairement dans le plan qui contient les points A, B et C. ∎

Définition *Trois vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de l'espace qui ne sont pas coplanaires forment ce qu'on appelle une* base *de l'espace. On notera alors cette base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.*

De la même façon que dans le plan, une base de l'espace nous permet de décomposer un vecteur quelconque en une combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Théorème 2.2 *Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de l'espace, et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur quelconque de l'espace, alors il existe trois réels u_1, u_2 et u_3 tels que*

$$\overrightarrow{u} = u_1.\overrightarrow{e_1} + u_2.\overrightarrow{e_2} + u_3.\overrightarrow{e_3}$$

Ces nombres sont uniques et sont appelés coordonnées *de $\overrightarrow{u}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.*

La preuve de ce résultat est quasiment identique à la preuve similaire dans le plan. Et comme dans le cas du plan, on a les propriétés suivantes :

Propriétés 2.19 *Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de l'espace, λ un nombre réel, et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dont les coordonées dans la base $\mathcal{B}$ sont*

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\bullet\, \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}, \qquad \bullet\, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}, \qquad \bullet\, \lambda.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}.$$

Exemple. *Comme dans le cas du plan, il existe une base, dite* canonique*, communément utilisée dans l'espace. Elle est formée de trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ unitaires, portés respectivement les demi-droites Ox, Oy et Oz. En l'absence d'indication contraire, c'est cette base que l'on utilisera.*

Dans cette, base, si A et B sont deux points donnés par leurs coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans le repère $Oxyz$, alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer si trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires, il suffit de vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et de déterminer si $\overrightarrow{w}$ peut s'écrire ou non comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Cela se fait en résolvant un système d'équation linéaire.

Exemple. *Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?*

On essaie de trouver des réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} 1 = \lambda + 2\mu \\ 1 = -2\lambda - \mu \\ -1 = 3\lambda + 2\mu \end{cases} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \begin{cases} 2 = -2\lambda \\ 1 = -2\lambda - \mu \\ -1 = 3\lambda + 2\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ 1 = 2 - \mu \\ -1 = -3 + 2\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \\ -1 = -3 + 2.1 \end{cases}.$$

Ici, le passage du premier au second système a été fait en retranchant la troisième ligne à la première. On voit que la toute dernière équation donne $-1 = -1$, ce qui est tout à fait vrai. On en déduit que $\lambda = -1$ et $\mu = 1$ est solution de notre système de départ, autrement dit que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$. Les trois vecteurs sont donc coplanaires, et ne forment de fait pas une base.

Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

On observe rapidement que $\overrightarrow{v} = -2.\overrightarrow{u} = -2.\overrightarrow{u} + 0.\overrightarrow{w}$, et donc que $\overrightarrow{v}$ s'exprime comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$. les trois vecteurs sont donc coplanaires, et ne forment de fait pas une base. On peut remarquer toutefois qu'en dépit de cela, $\overrightarrow{w}$ ne peut pas s'exprimer comme combianison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$; vérifier ce dernier point n'est donc pas suffisant pour s'assurer que les vecteurs forment une base.

Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, car d'après les premières et troisième coordonnées, un tel coefficient de coliénarité devrait être simultanément égale à 2 et -1. On essaie maintenant de *trouver des réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire tels que*

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda + \mu \\ 1 = -2\lambda + 3\mu \\ -3 = \lambda - \mu \end{cases}.$$

En sommant des équations, on cherche ensuite à faire disparaitre λ ou μ dans une des équations. Par exemple, ici, on peut remplacer la première ligne par la somme des deux premières. Cela donne

$$\begin{cases} 2 = 4\mu \\ 1 = -2\lambda + 3\mu \\ -3 = \lambda - \mu \end{cases}.$$

Cela permet de trouver la valeur de μ, que l'on peut donc remplacer dans les deux autres équations :

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{2} \\ 1 = -2\lambda + 3.\frac{1}{2} = -2\lambda + \frac{3}{2} \\ -3 = \lambda - \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ce qui permet de trouver la valeur de λ, que l'on peut remplacer dans la dernière équation :

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{2} \\ 2\lambda = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4} \\ -3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

On voit que la dernière équation est impossible, c'est donc qu'il n'existe pas de tels λ et μ. On en déduit donc que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires et qu'ils forment donc une base de l'espace.

On verra un peu plus loin une deuxième méthode pour déterminer si trois vecteurs sont coplanaires.

2.3 Bases orthonormées

Nous allons maintenant définir un cas très particulier de bases (dans le plan ou dans l'espace), pour lesquels certains calculs seront très grandement facilités.

Définition

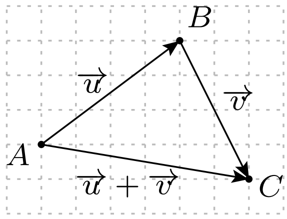
- *On dit qu'un vecteur est* unitaire *si sa norme est égale à* 1.
- *On dit que deux vecteurs sont* orthogonaux, *si les directions des deux vecteurs sont perpendiculaires. Par convention, ondit également que le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs.*

Définition *Une base du plan et de l'espace est dite* orthogonale *si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Une base est dite* orthonormée *si elle est orthogonale et que tous les vecteurs de la base sont unitaires.*

Exemple. *La base canonique que nous avons évoquée plus haut est une base orthonormée.*

Le pouce, l'index et le majeur de votre main droite peuvent vous donner une idée d'une base orthonormée de l'espace : On écarte les trois doigts et on imagine un vecteur $\overrightarrow{i}$ qui suit le pouce,

$\overrightarrow{j}$ qui suit l'index et $\overrightarrow{k}$ qui suit le majeur :



On peut faire cet exercice avec chacune des deux mains ; les deux bases ainsi obtenues, toutes les deux orthonormées, sont l'une par rapport à l'autre des images dans un miroir et ne peuvent pas être superposées, même en tournant et déplacant les mains. Il existe donc deux sortes de bases orthonormées dans l'espace : celles qui correspondent à la main droite, appelées *base directe* et celles qui correspondent à la main gauche, appelée *base indirecte*.

3 Produit scalaire, Produit vectoriel

Pour la suite du cours, on ne considèrera que des bases orthonormées $\mathcal{B}$ du plan ou de l'espace. Toutes les coordonnées des vecteurs seront données dans une telle base.

3.1 Produit scalaire

3.1.1 Définition géométrique du produit scalaire

Inspiré par l'interprétation "force" des vecteurs, le produit scalaire entre deux vecteurs est une un nombre réel qui mesure à quel point deux forces agissent de concert ou non. Plus la valeur est positive, plus les forces tirent dans un même sens ; plus elle est négative, plus elles tirent dans des sens contraires. Et si la valeur vaut zéro, c'est qu'ils tirent dans des directions "orthogonales". Le produit scalaire dépendra donc de l'intensité des forces et de l'angle entre leurs directions.

Définition *L'angle entre deux vecteurs est l'angle formé par deux représentants de ces vecteurs partant d'un même point.*

Exemple.

- *Deux vecteurs orthogonaux forment un angle de* $\frac{\pi}{2}$.
- *Deux vecteurs colinéaires forment un angle nul si ils sont de même sens, et un angle* π *si ils sont de sens opposés.*

Définition *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs du plan ou de l'espace. Et soit* θ *l'angle entre ces deux vecteurs. Le produit scalaire de* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *est le nombre réel.*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos(\theta)$$

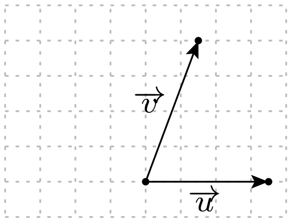
Remarque : *Si un des vecteurs est le vecteur nul, on ne peut pas définir l'angle entre les deux vecteurs. Cependant, comme la norme du vecteur nul est égale à* 0*, on peut quand même définir le produit scalaire d'un vecteur avec le vecteur nul comme étant égal à* 0.

On a directement d'après cette définition :

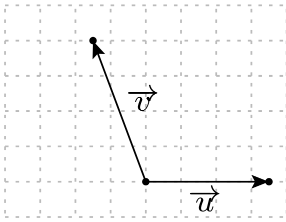
Propriété 3.5 *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs non nuls. L'angle entre* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *est*

- *aigu si et seulement si* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} > 0$*;*

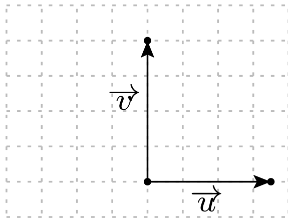
- *obtus si et seulement si* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} < 0$*;*
- *droit si et seulement si* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.



aigu



obtu



droit

La définition que nous venons de voir est très utile pour donner un sens géométrique ou physique à certaines quantité. Cependant, cette définition n'est pas toujours adéquate pour faire des calculs, notamment lorsque les forces sont données par les coordonnées des vecteurs correspondant. C'est pourquoi on va définir le produit scalaire d'une façon plus algébrique ; nous montrerons ensuite que les deux définitions coïncident.

3.1.2 Définition algébrique du produit scalaire

On se donne une base orthonormée du plan ou de l'espace. Dans ce qui suit, toutes les coordonnées seront prises dans cette base.

Définition • *Soient* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ *deux vecteurs du plan. Le produit scalaire de* $\overrightarrow{u}$ *et de* $\overrightarrow{v}$ *est le nombre défini par*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

- *Soient* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *deux vecteurs de l'espace. Le produit scalaire de* $\overrightarrow{u}$ *et de* $\overrightarrow{v}$ *est le nombre défini par :*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

En calculant avec les coordonnées, on vérifie facilement les propriétés suivantes.

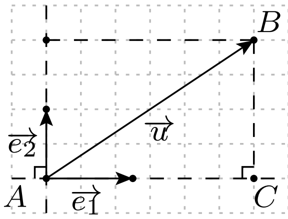
Propriétés 3.7 *Soient* $\overrightarrow{u}$*,* $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *des vecteurs et* λ *un nombre réel. On a :*
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ *(commutativité) ;*
- $(\lambda.\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda.\overrightarrow{v})$ *(homogénéité) :*
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ *(distributivité).*

Il est clair qu'une force tire toujours dans le même sens qu'elle-même, et ce avec une intensité qui dépend directement de la norme du vecteur associé. De fait, la notion de norme de vecteur est fortement liée à la notion de produit scalaire :

Proposition 3.1 *La norme de tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *est donnée par* $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$*. Autrment dit :*
- *si* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *est un vecteur du plan, sa norme est donnée par* $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$*;*
- *si* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *est un vecteur de l'espace, sa norme est donnée par* $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Attention ! *Les formules ci-dessus ne sont valable que si u_1, u_2, (u_3), v_1, v_2, (v_3) sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans une base* orthonormée. *Si la base n'est pas orthonormée, alors cela devient faux.*

Preuve. On établit le résultat dans le cas d'un plan, le résultat dans un espace étant totalement similaire. On commence par choisir un représentant $\overrightarrow{AB}$ du vecteur $\overrightarrow{u}$. On sait qu'on peut décomposer $\overrightarrow{AB} = u_1.\overrightarrow{e_1} + u_2.\overrightarrow{e_2}$. On représente le vecteur $u_1\overrightarrow{e_1}$ par $\overrightarrow{AC}$. D'après la relation de Chasles, on obtient $\overrightarrow{CB} = u_2.\overrightarrow{e_2}$. Or les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux puisque $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ le sont ; le triangle ACB est donc un triangle rectangle en C.

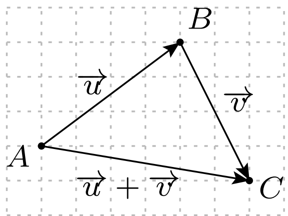


Les normes des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont données par $||\overrightarrow{AC}|| = |u_1|\,||\overrightarrow{e_1}|| = |u_1|$ et $||\overrightarrow{CB}|| = |u_2|\,||\overrightarrow{e_2}|| = |u_2|$. La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est la longueur du segment $\overrightarrow{AB}$. Il suffit donc d'utiliser le théorème de Pythagore qui nous dit

$$||\overrightarrow{u}|| = AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{||\overrightarrow{AC}||^2 + ||\overrightarrow{CB}||^2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2} = \sqrt{u_1u_1 + u_2u_2} = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}.$$

■

Attention ! *Une erreur courante, mais non moins impardonnable, est de croire que $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$, mais cette formule est en générale fausse ! En effet, en prenant A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$:*



cela signifierait qu'on parcourt la même distance en allant de A à C directement ou en passant par B, autrement dit que de faire un détour, aussi long soit-il, cela ne rallonge pas le chemin...
*Il est par contre vrai que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points. L'*inégalité triangulaire *suivante :*

$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$$

est donc, elle, toujours vraie. Le cas d'égalité n'est vraie que lorsque, passer par B, cela ne fait pas faire de détour, c'est-à-dire lorsque B est entre A et C, c'est-à-dire lorsque $\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ou, cas atrophié, lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

La notion d'orthogonalité est également liée à celle de produit scalaire :

Proposition 3.2 *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$*

Preuve. On choisit des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a alors :

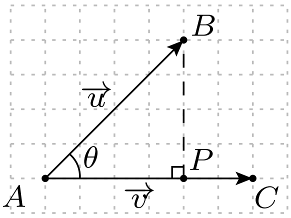
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff ABC \text{ est un triangle rectangle en } A \\
&\iff BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (par le théorème de Pythagore)} \\
&\iff \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
&\iff (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 \\
&\iff u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 \\
&\iff -2(u_1v_1 + u_2v_2) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0.
\end{aligned}$$

■

3.1.3 Equivalence des deux définitions

Proposition 3.3 *Les deux définitions du produit scalaire sont équivalentes.*

Preuve. Soient des représentants $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$ de deux vecteurs donnés. On considère la droite perpendiculaire à (AC) qui passe par B, et on note P le point d'intersection de cette droite avec (AC), et θ l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:



.

On a alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}$. Le triangle APB étant rectangle en P, on en déduit que $\cos(\theta) = \frac{AP}{AB}$. En séparant les cas où l'angle est aigu ou obtu afin de rajouter un signe − dans ce dernier cas, on en déduit que $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{u}\|\cos(\theta)$. De plus, le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est positivement colinéaire à $\overrightarrow{v}$, cela implique que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{AP}\|\,\|\overrightarrow{v}\|$. D'autre part le vecteur $\overrightarrow{PB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$, donc $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

On en déduit que :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{AP}\|\,\|\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos(\theta).$$

■

On peut donc calculer l'angle entre deux vecteurs en calculant leurs normes et leur produit scalaire.

Exemple. *On considère les vecteurs* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *On a*

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\ldots^2 + \ldots^2} = \ldots, \quad \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\ldots^2 + \ldots^2} = \ldots, \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots = \ldots$$

On en déduit $\cos\theta = \frac{\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{}{}$ *et donc* $\theta = \ldots.$

3.2 Produit vectoriel

Problème physique : Si une particule chargée électriquement (un électron par exemple) se déplace à une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un champ magnétique décrit par le vecteur $\overrightarrow{B}$, alors elle subit les effets d'une force (dite force de Lorentz) qui est perpendiculaire à la fois à la vitesse de la particule et au champ magnétique.

Comme on peut s'y attendre, cette force dépend de la norme des vecteurs $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{v}$, mais dépend aussi de l'angle entre la vitesse $\overrightarrow{v}$ de la particule et le champ $\overrightarrow{B}$. Pour trouver l'intensité de cette force, on utilise la notion de produit vectoriel de deux vecteurs.

Attention ! *Tout ce qui est suit ne concerne que les vecteurs dans l'espace, et non ceux dans le plan !*

3.2.1 Définition géométrique

Définition *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace formant un angle θ. Le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ est le vecteur, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, tel que :*

1. *la direction de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonale à chacun des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$;*
2. *le sens de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ donne au triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ une orientation* directe[3] *;*
3. *la norme de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est égale à $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, |\sin(\theta)|$.*

Attention ! *Le produit vectoriel de deux vecteurs est également un vecteur. C'est donc une opération très differente du produit scalaire qui donne, lui, un nombre réel.*

De la défintion du produit vectoriel, on peut déduire facilement les propriétés suivants :

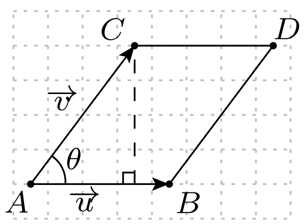
Propriétés 3.14 *Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs de l'espace et λ un nombre réel. On a :*

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *;*
- $\overrightarrow{u} \wedge v = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$ *;*
- $(\lambda.\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \wedge (\lambda.\overrightarrow{v})$ *;*
- $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$.

La norme $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ d'un produit vectoriel est directement lié à l'aire du parallélogramme décrit par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

Proposition 3.4 *Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de l'espace, alors l'aire du parallélogramme $ABDC$, avec D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ (ou, de manière équivalente, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$) vaut $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$.*

Preuve. L'aire d'un parallélogramme est égale à la base fois la hauteur. Or, en prenant le segment AB comme base, la hauteur se calcule comme $\|\overrightarrow{AC}\| \, |\sin\theta|$, où θ est l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:



On a donc Aire$(ABDC) = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AC}\| \, |\sin(\theta)| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, |\sin(\theta)| = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$. ∎

Or, par symétrie, l'aire du parallélogramme $ABDC$ est égale à deux fois celle du triangle ABC. On a donc :

3. C'est-à-dire que, si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non-colinéaires, le triplet suit la règle de la main droite. S'ils sont colinéaires, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ vaut de toute façon $\overrightarrow{0}$ du fait du troisième point.

Corollaire 3.15 *Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de l'espace, alors l'aire du triangle ABC vaut $\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{2}$.*

Nous verrons dans la section suivante que cela permet de calculer très facilement l'aire d'un triangle décrit par deux vecteurs, même si ces vecteurs sont dans un plan.

3.2.2 Calcul du produit vectoriel en coordonnées

Le produit vectoriel peut se calculer facilement lorsque les vecteurs font partie d'une base orthonormée :

Propriété 3.16 *Si $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base orthonormée directe, alors*

$$\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3}, \qquad \vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \vec{e_1}, \qquad \vec{e_3} \wedge \vec{e_1} = \vec{e_2}.$$

Grace à ces simplifications, on peut facilement calculer le produit vectoriel de deux vecteurs, lorsque ceux-ci sont donnés par leur coordonnées dans une base orthonormée directe.

Théorème 3.1 *Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace et leurs coorodnnées dans une base orthonormée. Les coordonnées du produit vectoriel dans cette même base sont alors données par :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : *Pour se souvenir de la formule, on peut appliquer la* règle du gamma *suivante. On commence par écrire en colonne les coordonnées des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ côte-à-côte, en répétant cycliquement u_1, v_1, u_2 et v_2 :*

$$\begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{array}.$$

Pour obtenir la première coordonnée $u_2v_3 - u_3v_2$, on commence à la deuxième ligne et on trace un γ :

$$\begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{array};$$

la formule est obtenue en prenant le produit des deux premiers termes rencontrés moins le produit des deux derniers. Pour obtenir la deuxième et troisième coordonnées, on procède de même, mais en *commençant, respectivement, à la troisième et quatrième ligne :*

$$\begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{array} .$$

Afin de gagner un peu de temps, on peut procéder à la règle du gamma directement sur les vecteurs tels qu'ils apparaissent dans l'écriture $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$*. Dans ce cas, il faut ignorer la ligne de la coordonnée que l'on veut calculer et, attention, pour la seconde coordonnée, le gamma est à l'envers :*

$$\begin{array}{cc} \cancel{u_1} & \cancel{v_1} \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ \cancel{u_2} & \cancel{v_2} \\ u_3 & v_3 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ \cancel{u_3} & \cancel{v_3} \end{array} .$$

Preuve. On décompose les vecteurs selon la base orthonormée directe de l'espace

$$\overrightarrow{u} = u_1.\overrightarrow{e_1} + u_2.\overrightarrow{e_2} + u_3.\overrightarrow{e_3} \qquad \overrightarrow{v} = v_1.\overrightarrow{e_1} + v_2.\overrightarrow{e_2} + v_3.\overrightarrow{e_3}.$$

On développe alors le produit en utilisant les propriétés vues précedemment

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} =& (u_1.\overrightarrow{e_1} + u_2.\overrightarrow{e_2} + u_3.\overrightarrow{e_3}) \wedge (\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2} + v_3\overrightarrow{e_3}) \\ =& ((u_1.\overrightarrow{e_1}) \wedge (v_1\overrightarrow{e_1})) + ((u_1.\overrightarrow{e_1}) \wedge (v_2\overrightarrow{e_2})) + ((u_1.\overrightarrow{e_1}) \wedge (v_3\overrightarrow{e_3})) \\ &+ ((u_2.\overrightarrow{e_2}) \wedge (v_1\overrightarrow{e_1})) + ((u_2.\overrightarrow{e_2}) \wedge (v_2\overrightarrow{e_2})) + ((u_2.\overrightarrow{e_2}) \wedge (v_3\overrightarrow{e_3})) \\ &+ ((u_3.\overrightarrow{e_3}) \wedge (v_1\overrightarrow{e_1})) + ((u_3.\overrightarrow{e_3}) \wedge (v_2\overrightarrow{e_2})) + ((u_3.\overrightarrow{e_3}) \wedge (v_3\overrightarrow{e_3})) \\ =& (u_2v_3 - u_3v_2)\overrightarrow{e_1} + (u_3v_1 - u_1v_3)\overrightarrow{e_2} + (u_1v_2 - u_2v_1)\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

■

Combiné avec la proposition 3.4 et à son corollaire, ces formules permettent de très facilement calculer l'aire d'un triangle donné par ses sommets.

Exemple. *On veut calculer l'aire du triangle ABC avec $A = (1, -2, 1)$, $B = (0, 3, -1)$ et $C = (-1, -1, 1)$. D'après le corollaire de la proprosition 3.4, on a Aire$(ABC) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2}$. Or*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5.0 - (-2).1 \\ (-2).(-2) - (-1).0 \\ (-1).1 - 5.(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$\textit{Aire}(ABC) = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2 + 9^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 16 + 81}}{2} = \frac{\sqrt{101}}{2}.$$

S'il s'agit d'un triangle dans le plan, il suffit de le plonger dans l'espace en rajoutant une troisième coordonnée nulle. Ainsi, pour calculer l'aire du triangle dans ABC avec $A = (2, -3)$, $B = (1, -2)$

et $C = (0,2)$*, on commence par considérer* $A' = (2,-3,0)$*,* $B' = (1,-2,0)$ *et* $C' = (0,2,0)$ *dans l'espace, et on calcule*

$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} 1.0 - 0.5 \\ 0.(-2) - (-1).0 \\ (-1).5 - 1.(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$\textit{Aire}(ABC) = \textit{Aire}(A'B'C') = \frac{\sqrt{(-3)^2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Enfin, deux vecteurs étant colinéaires si et seulement si ils décrivent un triangle aplati, c'est-à-dire si et seulement si l'aire du dit triangle est nulle, on obtient un critère pour déterminer si deux vecteurs sont colinéaires :

Propriété 3.19 *Deux vecteurs de l'espace* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires si et seulement si* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

3.3 Produit mixte

En combinant le produit vectoriel et le produit scalaire, on obtient une opération définie sur un triplet de vecteur très utile en géométrie.

Définition *Soient* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *des vecteurs de l'espace. On appelle* produit mixte *le nombre réel*

$$[\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$$

Ce nombre est aussi appelé *déterminant* du triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et peut se noter $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. Avec des arguments similaires à ceux de la proposition 3.4, on montre que la valeur absolue du produit mixte est égal au volume du parallélépipède ayant comme côtés les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Or un tel parallélépipède étant de volume nul si et seulement si il est aplati, c'est-à-dire si et seulement si tous ses sommets sont coplanaires, l'application principale que nous ferons du produit mixte sera de déterminer si trois vecteurs de l'espace sont coplanaires en utilisant la propriété suivante :

Proposition 3.5 *Soient* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *des vecteurs de l'espace. On a :*

$$[\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}] = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \textit{ sont coplanaires}.$$

De façon équivalente, ils forment une base de l'espace si et seulement si leur produit mixte est non-nul, c'est à dire $[\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}] \neq 0$.

Exemple. *Les vecteurs* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *forment-ils une base de l'espace ?*

On calcule

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2).(-1) - 1.3 \\ 1.1 - 2.(-1) \\ 2.3 - (-2).1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

et

$$[\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\,;\overrightarrow{w}\,] = (\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\,).\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}-1\\3\\8\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = (-1).1+3.1+8.(-3) = -22 \neq 0.$$

Les vecteurs forment donc bien une base de l'espace.

Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$***,*** $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ ***et*** $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ***sont-ils coplanaires ?***

On calcule

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-2).2-3.(-1)\\3.2-1.2\\1.(-1)-(-2).2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$$

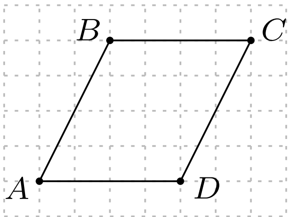
et

$$[\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\,;\overrightarrow{w}\,] = (\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\,).\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = (-1).1+4.1+3.(-1) = 0.$$

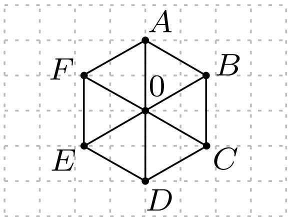
Les vecteurs sont donc coplanaires (et ne forment donc pas une base de l'espace).

A Exercices

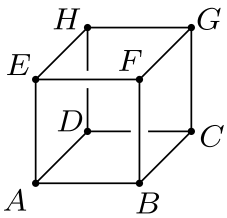
Exercice 1. Pour chacune des figures suivantes, faire la liste exhaustive mais sans répétition (ne pas donner deux fois le même vecteur avec des écritures différentes) de tous les vecteurs réalisables avec les points indiqués.

1. Un parallélogramme : 

.

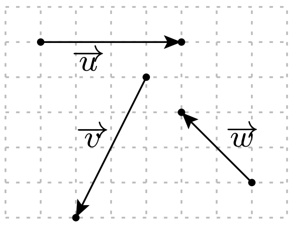
2. Un hexagone : 

.

3. Un cube (dans l'espace) : 

.

Exercice 2. On considère les trois vecteurs suivants :



.

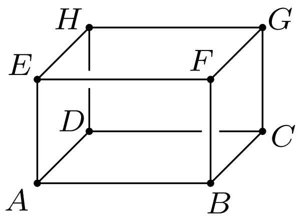
Sur une feuille quadrillée, représentez les vecteurs :

1. $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$;
2. $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$;
3. $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+3\overrightarrow{w}$;
4. $3\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}+4\overrightarrow{w}$;
5. $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}$;
6. $2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}$;
7. $\overrightarrow{v}+2(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w})$;
8. $3(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+2(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{v})$.

Exercice 3. Soit A, B, C, D et E cinq points du plan. Exprimer de la manière la plus compacte possible les vecteurs suivants :

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC}$;
2. $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}$;
3. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$;
4. $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$;
5. $3\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CD}$;
6. $12\overrightarrow{BD}-9\overrightarrow{ED}+3\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AE}$.

Exercice 4. On considère les sommets du pavé suivant :



.

Exprimer de la manière la plus compacte possible les vecteurs suivants :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$;
2. $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$;
3. $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$;
4. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}$.

Exercice 5. Soit A, B et C trois points de l'espace non alignés et soit G un quatrième point vérifiant $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$. Montrer que, pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{GM}$.

Exercice 6. Relativement à une base $\mathcal{B}$ du plan, on donne les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

Exercice 7. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base du plan. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = (x+y+1)\overrightarrow{i} + (2x+y)\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{b} = (x+y)\overrightarrow{i} + (3x+y+1)\overrightarrow{j}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$ des paramètres. Déterminer x, y tels que $3\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{b}$.

Exercice 8. Les points M, N, P, Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$. Le point O est l'intersection des deux diagonales AC et BD. (Faire une figure)

1. Donner, dans la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{CM}$$

2. Même question, mais relativement à la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{OC})$.

Exercice 9. On se fixe une base du plan $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, et on donne les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \qquad \overrightarrow{b} = -5\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{w}, \qquad \overrightarrow{c} = \frac{1}{3}\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{w}$$

2. Déterminer les nombres λ et μ tels que $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

Exercice 10. Déterminer si les triplets de vecteurs suivants forment une base de l'espace :

1. $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{c_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{b_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{c_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{b_3} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{c_3} = \begin{pmatrix}k\\3\\2\end{pmatrix}$ (on distinguera des cas selon la valeur de k).

Exercice 11. Dans chacun des cas suivants, calculer la norme de chaque vecteur, ainsi que de leur somme :

1. $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}1\\4/3\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}-3/2\\-2\end{pmatrix}$.
3. $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix}-4\\3\\3\end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{u_4} = \begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2/3\end{pmatrix}$.

Exercice 12. Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs sont orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$.
3. $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix}62\\-37\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix}37\\62\end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{u_4} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$.
5. $\overrightarrow{u_5} = \begin{pmatrix}6\\1\\4\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_5} = \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$
6. $\overrightarrow{u_6} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_6} = \begin{pmatrix}2\\7\\-4\end{pmatrix}$.
7. $\overrightarrow{u_7} = \begin{pmatrix}k\\k\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_7} = \begin{pmatrix}k-1\\4\\2\end{pmatrix}$, avec k un nombre réel.

Exercice 13. Calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

1. $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}1\\3\sqrt{3}\end{pmatrix}$.
3. $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{u_4} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 14. Soient les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

1. Déterminer un vecteur non nul $\overrightarrow{a}$ orthogonal $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2. Déterminer un vecteur unitaire $\overrightarrow{b}$ formant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
3. Déteminer un vecteur unitaire $\overrightarrow{c}$ formant un angle de $\frac{3\pi}{4}$ avec les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exercice 15. Soient les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\overrightarrow{a} \wedge b$, $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}$.
2. Calculer $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})$. Le produit vectoriel est-il associatif?
3. Calculer le produit mixte $[\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c}]$. Les trois vecteurs forment-ils une base de l'espace?

4. Calculer les produits mixtes $[\vec{b}\,;\vec{c}\,;\vec{a}\,]$ et $[\vec{a}\,;\vec{c}\,;\vec{b}\,]$ et les comparer à $[\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,]$.

Exercice 16. Soient les points $A(-2,1,-1), B(-1,4,0), C(4,5,2)$ et $D(3,2,1)$.

1. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$

Exercice 17. Soient les points du plan $A(1,-1)$, $B(-2,0)$ et $C(-3,2)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 18. Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de x et y, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{p}$ sont-ils colinéaires ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de x et y, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{p}$ sont-ils orthogonaux ?