Université Paul Sabatier – L1 – Analyse
Feuille de TD 2008-5 : Intégration, primitives

Exercice 1. Montrer que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

En déduire la limite suivante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right).$$

Retrouver la valeur de cette limite en utilisant le résultat de cours

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx,$$

où f est une fonction continue sur $[0,1]$ (à déterminer).

Exercice 2. (i) Reprendre la méthode de l'exercice 1 pour calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin(x/n) + \sin(2x/n) + \ldots + \sin((n-1)x/n)\right).$$

(ii) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right).$$

Exercice 3. *Inégalités.* Montrer que $2x/\pi \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$. En déduire que

$$x^2/\pi \leq 1 - \cos x \leq x^2/2 \quad \text{pour tout } x \in [0, \pi/2].$$

Montrer que

$$\left|\int_0^1 \frac{\cos x}{x+1}\right| dx \leq \log 2.$$

Exercice 4. *Théorème de la moyenne.* Montrer qu'il existe $\xi_1, \xi_2 \in [0,1]$ tels que

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x^2+1} = \frac{2}{\pi(\xi_1^2+1)} = \frac{\pi \sin(\pi \xi_2)}{4}.$$

Exercice 5. *Intégration par parties.* Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on pose $I(m,n) = \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$.

(i) Montrer que $I(m,n) = I(n,m)$. Calculer $I(m,0)$.

(ii) Calculer $I(m,n)$ en intégrant par parties.

(iii) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}(t)\,\sin^{2n+1}(t)\,dt$ lorsque $m, n \in \mathbb{N}$ (poser $x = \sin^2 t$).

(iv) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^p(t)\,dt$ et calculer ces intégrales (intégrer par parties).

Exercice 6. Calculer $\displaystyle\int_1^x t^n \ln(t)\, dt$ avec $n \in \mathbb{Z}$, en utilisant des intégrations par parties.

Exercice 7. *Changements de variable.* Calculer les intégrales suivantes, ou retrouver les résultats donnés, en utilisant des changements de variables judicieux.

$$\int_0^a x^2 e^{\sin(x^3)} \cos(x^3) dx = (e^{\sin(a^3)} - 1)/3, \qquad \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \pi^2/32,$$
$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \pi/3, \qquad \int_{-2}^2 \frac{1}{16-x^2} dx = (\ln 3)/4$$
$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{u}\sinh^2(\sqrt{u})} du \quad \text{avec } x > 0, \qquad \int_0^1 \frac{1}{(3+2x-x^2)^{3/2}} dx = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Exercice 8. En précisant auparavant les intervalles de définition, calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{1}{x^2+4}\, dx, \quad \int \frac{1}{x^2-4}\, dx, \quad \int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx,$$
$$\int e^x \sin x\, dx, \quad \int \tan^3 x\, dx, \quad \int \frac{1}{\tan^3 x}\, dx,$$
$$\int a^x\, dx, \quad \int \ln_a x\, dx, \quad \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^m}\, dx, \ m \in \mathbb{N}^*,$$
$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx, \quad \int \frac{1}{\sinh^5 x}\, dx.$$

Exercice 9. Intégrations par parties

$$\int e^x \cos \pi x\, dx, \quad \int e^x \cos^2 x\, dx, \quad \int e^x (x^2+3x+1)\, dx,$$
$$\int \arcsin x\, dx, \quad \int x^2 \sin x\, dx, \quad \int \frac{\ln x}{x^n}\, dx,$$
$$\int \arctan x\, dx, \quad \int x \arctan x\, dx.$$

Exercice 10. Calculer les primitives suivantes en utilisant le changement de variables indiqué.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+(2+x)^{1/3}}\, dx, \quad \text{avec } t = (2+x)^{1/6},$$
$$\int \frac{1}{((x-2)^2-4)^2}\, dx, \quad \text{avec } x-2 = 2\tanh t \quad \text{ou } x-2 = 2\coth t \text{ suivant l'intervalle},$$
$$\int x\sqrt{1+x^2}\, dx, \quad \int x^2\sqrt{1+x^3}\, dx.$$

Exercice 11. Polynômes en sin, cos, sinh, cosh.

$$\int (\cos x\ \cos 2x + \sin x\ \sin 3x)\, dx, \quad \int \cos x\ \sin^4 x\, dx,$$
$$\int (\sin^3 x\ \cos^2 x\, dx, \quad \int \cos x\ \sin^3 x\, dx,$$
$$\int \sin^4 x\, dx, \quad \int \cos^6 x\, dx,$$
$$\int \sinh^2 x\ \cosh^2 x\, dx, \quad \int \sinh x\ \cosh^3 x\, dx, \quad \int \cosh x\ \sinh^3 x\, dx.$$

Exercice 12. Fractions rationnelles.

$$\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}\, dx, \quad \int \frac{1}{(x^4+1)^2}\, dx, \quad \int \frac{x}{x^4+x^2+1}\, dx, \quad \int \frac{1}{(x-1)(x^2-2x+2)^2}\, dx,$$
$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2-2x-2)^2}\, dx.$$