EPCM1 2006-2007 TD math, Feuille n°2

# Suites et séries de fonctions

**Exercice 1** (Étude de domaine de convergence de suites de fonctions)**.**

- $a_n(x) = \sin(\frac{x}{2^n})$ sur $[-1,1]$ :
  - Convergence simple : Pour tout $x \in [-1,1]$, $\frac{x}{2^n}$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini, donc, par continuité de la fonction sinus, $(a_n)$ converge simplement vers la fonction nulle.
  - Convergence uniforme : Pour tout $x \in [-1,1]$, $|\sin(\frac{x}{2^n}) - 0| \leq |\sin(\frac{1}{2^n})|$ qui tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini. Il y a donc convergence uniforme.

- $b_n(x) = \sin(\frac{x}{2^n})$ sur $\mathbb{R}$ :
  - Convergence simple : Idem.
  - Convergence uniforme : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, pour $x = 2^n$, $|b_n(2^n) - 0| = \sin(1)$. Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme.

- $c_n(x) = \frac{1}{1+n\cos(x)}$ sur $[0,\pi]$ :
  - Convergence simple : Pour tout $x \in [0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, $|1 + n\cos(x)|$ tend vers l'infini quand $n$ augmente et $c_n(x)$ converge alors vers 0. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, la suite est constante égale à 1. Il y a donc convergence simple vers la fonction constante égale à zéro sauf en 1, où elle vaut 1.
  - Convergence uniforme : Une suite de fonctions continues converge vers une fonction discontinue, la convergence ne peut donc pas être uniforme.

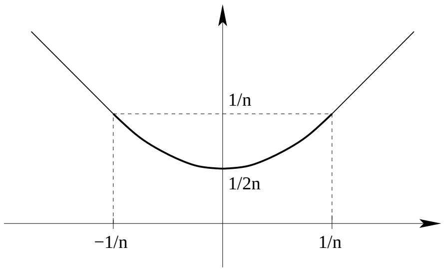
- $d_n(x) = xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$ :
  - Convergence simple : D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{-nx}$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini. D'autre part, pour $x = 0$, la suite $(d_n(0))$ est constante égale à 0. Il y a donc convergence simple vers la fonction nulle.
  - Convergence uniforme : En étudiant les variations de $f(x) = |xe^{-nx} - 0| = xe^{-nx}$, on observe que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq xe^{-nx} \leq ne^{-n^2} \leq n^2e^{-n^2}$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} n^2e^{-n^2} = \lim\limits_{m\to\infty} me^{-m} = 0$ avec le changement de variable $m = n^2$. Il y a donc convergence uniforme.

- $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ sur $]0,1]$ :
  - Convergence simple : D'une part, pour tout $x \in ]0,1[$, $nx^n$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini. D'autre part, pour $x = 0$, la suite $(f_n(0))$ est constante égale à 0. Il y a donc convergence simple vers la fonction nulle.
  - Convergence uniforme : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, pour $x = e^{-\frac{1}{n}}$, $|f_n(x) - 0| = \frac{1}{e}$. Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme.

- $g_n(x) = n^2(1-x)^n \sin(\frac{\pi}{2}x)$ sur $[0,2]$ :
  - Convergence simple : D'une part, pour tout $x \in ]0,2[$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(1-x)^n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2(y)^n = 0$ avec le changement de variable $y = 1 - x \in ]-1,1[$. D'autre part, pour $x = 0$ et $x = 2$, la suite $(g_n(x))$ est constante égale à 0. Il y a donc convergence simple vers la fonction nulle.
  - Convergence uniforme : Considérons la suite $x_n = \frac{1}{n}$. D'après les nombreux exercices traitant cela dans la feuille de TD n°1, on a $\lim\limits_{n\to\infty} (1-x_n)^n = \dfrac{1}{e}$. De plus, on a également $\sin(\frac{\pi}{2}x_n) \sim \frac{\pi}{2n}$. On a donc, au final, $g_n(x_n) \sim \frac{n\pi}{2e}$, ce qui, notamment, empêche la suite $\max\limits_{x\in[0,2]} |g_n(x) - 0|$ de tendre vers 0 (comparez avec l'exercice 4). Il n'y a donc pas convergence uniforme.

**Exercice 2** (Suite de fonctions $C^1$ convergeant vers la valeur absolue)**.**

Avant de commencer, un petit dessin du graphe de $f_n$ ne fera pas de mal :




(1) La continuité et la dérivabilité sont claires sur les intervalles $]-\infty,-\frac{1}{n}[$, $]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$ et $]\frac{1}{n},\infty[$. Il suffit donc de vérifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
   - $f_n(-\frac{1}{n}^-) = \frac{1}{n} = \frac{n}{2n^2} + \frac{1}{2n} = f_n(-\frac{1}{n}^+)$ ;
   - $f_n(\frac{1}{n}^-) = \frac{n}{2n^2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} = f_n(\frac{1}{n}^+)$ ;
   - $f_n'(-\frac{1}{n}^-) = -1 = -\frac{n}{n} = f_n'(-\frac{1}{n}^+)$ ;
   - $f_n'(\frac{1}{n}^-) = \frac{n}{n} = 1 = f_n'(\frac{1}{n}^+)$.

(2) En étudiant les variations du polynôme $(\frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n})$, on observe que pour $x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, on a $0 \leq f_n(x) \leq |x|$, ce qui donne immédiatement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\big|f_n(x) - |x|\big| \leq \frac{1}{n}$ qui tend bien vers 0 lorsque $n$ augmente. La suite de fonctions $(f_n)$ converge donc uniformèment vers la valeur absolue.

**Exercice 3** (Etude de convergence)**.**

Commençons par étudier la convergence simple de $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{x}{1/n+nx^2}$. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(1/n + nx^2)$ tend vers l'infini lorsque $n$ tend vers l'infini. La suite $(f_n(x))$ tend donc, alors, vers 0. D'autre part, pour $x = 0$, la suite $(f_n(0))$ est constante égale à 0. Il y a donc convergence simple vers la fonction nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, pour $x_n = \frac{1}{n}$, $|f_n(x) - 0| = \frac{1}{2}$. Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
Cet argument, cependant, ne peut pas être utilisé sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$, la suite $(x_n)$ sortant de cet intervalle pour $n$ assez grand. Et pour cause, l'étude des variations de la fonction $f_n$ montre, justement, qu'elle est décroissante tendant vers 0 pour $x \geq \frac{1}{n}$. On a donc, pour $x \in [a, +\infty[$ et $n$ assez grand, $|f_n(x) - 0| \leq f_n(a)$, qui, comme, on l'a vu, tend vers 0 lorsque $n$ augmente. Pour tout $a > 0$, il y a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

**Exercice 4** (Convergence de $f_n(x_n)$)**.**

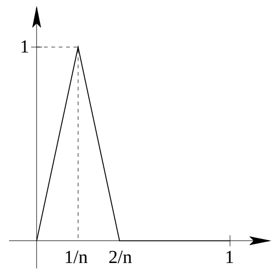
(1) Pour commencer, remarquons qu'en tant que limite uniforme de fonctions continues, la fonction $f$ est, elle-même continue. Revenons maintenant à la définition d'une suite convergente en posant $\varepsilon > 0$.
La suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformèment vers $f$, il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_1$ et tout $x$, on ait $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
De plus, la fonction $f$ étant continue, il existe également $\eta > 0$ tel que pour tout $y$ vérifiant $|y - x| < \eta$, on ait $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Or, la suite $(x_n)$ convergeant vers $x$, il existe un rang

$n_2$ à partir duquel on a bien $|x_n - x| < \eta$.
On pose maintenant $n_0 = \max(n_1, n_2)$. On a alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La suite $(f_n(x_n))$ converge donc bien vers $f(x)$.

Ici, un petit dessin du graphe de $g_n$ s'impose :




(2) D'une part, pour tout $x \in ]0, 1]$, il existe un rang à partir duquel on a $\frac{2}{n} \leq x$ et donc à partir duquel la suite $(g_n(x))$ devient constante égale à 0. D'autre part, pour $x = 0$, la suite $(g_n(0))$ est constante égale à 0. Il y a donc convergence simple vers la fonction nulle.
(3) La suite $\big(g_n(\frac{1}{n})\big)$ étant constante égale à 1, elle ne peut pas converger vers $0 = f(0)$. D'après la question (1), il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme.

Remarque : La suite de fonction de l'exercice 3 donne un autre contre–exemple.

**Exercice 5** (Suite de fonctions $C^p$)**.**

Démontrons par récurrence sur $p$ la propriété :
*Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de classe $C^p$ sur un intervalle $I$ telle que $f(x_0)$, $f'(x_0)$, …, $f^{(p-1)}(x_0)$ convergent pour un $x_0 \in I$ et telle que la suite $f_n^{(p)}$ converge uniformèment sur $I$ vers une fonction $g$. Alors $(f_n)$ converge uniformèment sur $I$ et la limite est une fonction de classe $C^p$, de dérivée $p^{\text{ième}}$ égale à $g$.*

- Le cas $p = 1$ n'est autre que le théorème de dérivabilité.
- Supposons le résultat vrai au rang $(p - 1)$.
  Soit $(f_n)$ une suite de fonctions telle que décrite dans l'énoncé. Considérons la suite de fonctions $(f_n^{(p-1)})$ :
  - toutes les fonctions $f_n^{(p-1)}$ sont dérivables ;
  - la suite $f_n^{(p-1)}(x_0)$ converge ;
  - la suite de fonctions $\big((f_n^{(p-1)})'\big) = (f_n^{(p)})$ converge uniformèment vers une fonction $g$.

  D'après le théorème de dérivabilité, $(f_n^{(p-1)})$ converge uniformément vers une fonction $h$ de classe $C^1$ de dérivée égale à $g$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence sur la suite $(f_n)$. On en conclut qu'elle converge uniformèment vers une fonction de classe $C^{p-1}$, de dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$ égale à $h$. Mais d'après ce que l'on a dit de $h$, la limite de la suite $(f_n)$ est donc même de classe $C^p$, de dérivée $p^{\text{ième}}$ égale à $g$.
- D'après le principe de raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : La propriété est même vraie pour $p = 0$, il ne s'agit que de la continuité d'une limite uniforme de fonctions continues.

**Exercice 6** (Suite de fonctions définies par des intégrales).

Commençons par définir la suite de fonctions $(g_n)$ sur $[0,\alpha]$ par $g_n(x) = g(x^n)$. Par continuité de $g$ en 0, cette suite converge simplement vers la fonction constante égale à $g(0)$. Montrons que cette convergence est même uniforme. Pour cela, le mieux est encore de revenir à la définition.
Soit $\varepsilon > 0$. Toujours par continuité de $g$ en 0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in [0,\eta[$, on ait $|g(y) - g(0)| < \varepsilon$. Or, il existe un certain rang $n_0$ à partir duquel on a également, pour tout $x \in [0,\alpha]$, $0 \leq x^n \leq \alpha^n < \eta$ et donc $|g_n(x) - g(0)| < \varepsilon$. La convergence est donc uniforme sur $[0,\alpha]$, ainsi que sur tout sous–intervalle.

D'après le théorème d'intégrabilité, à $x$ fixé, la suite $(f_n(x))$ converge vers $\int_0^x g(0)dt = xg(0)$. L'uniformité de cette convergence découle de l'étude par $\varepsilon$ précédente. On a, en effet, pour tout $x \in [0,\alpha]$ :

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - xg(0)| &\leq \int_0^x |g(t^n) - g(0)|\, dt \\
&\leq \int_0^x \varepsilon dt \qquad\qquad \text{pour } n \geq n_0 \\
&\leq \varepsilon x \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

**Exercice 7** (Non inversion limite–intégrale).

(1) Fixonx $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$. On a alors $-1 < \cos(x) < 1$, et $n\cos^n(x)$ tend vers 0 lorsque $n$ augmente. D'autre part, pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, la suite est constante égale à 0. La suite $(f_n)$ converge donc simplement vers la fonction nulle.

(2) Le calcul se fait directemet :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt &= \int_0^{\pi/2} n\cos^n(t) sin(t)dt \\
&= \left[ -\frac{n}{n+1} \cos^{n+1}(t) \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{n}{n+1} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \int_0^{\pi/2} 0dt.
\end{aligned}$$

Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme.

**Exercice 8** (Convergence uniforme de polynômes).

(1) D'après le critère de Cauchy, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq n_0$, $|P_n(x) - P_{n_0}(x)| < 1$. Le polynôme $(P_n - P_{n_0})$ est donc borné sur $\mathbb{R}$, donc constant. Autrement dit, $P_n = P_{n_0} + \text{cst}$ où la constante peut être calculée en évaluant $(P_n - P_{n_0})$ en n'importe quel réel, 0 par exemple.

(2) La convergence uniforme impliquant la convergence simple, la suite $(P_n(0))$ converge vers une limite $l$. La suite $(u_n)$ converge donc, elle aussi, vers une limite $l' = (l - P_{n_0}(0))$.

(3) Pour tout $n \geq n_0$, on a $P_n = P_{n_0} + u_n$. Or cette dernière expression converge vers $P_n = P_{n_0} + l'$ lorsque $n$ augmente. La limite $f$ est donc un polynôme.

**Exercice 9** (Étude de domaine de convergence de séries de fonctions).

-$\sum a_n(x) = \sum \frac{x}{x^2+n^2}$ sur $\mathbb{R}_+$ :

- Convergence normale : Une étude des variations de la fonction $|a_n|$ montre que son maximum est atteint pour $x = n$ et vaut $\frac{1}{2n}$. Or, la série $\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ étant divergente, $\sum a_n$ n'est pas normalement convergente.
- Convergence simple : On fixe $x \in \mathbb{R}_+$, on a alors $0 \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \frac{x}{n^2}$. Par le théorème de comparaison, la série est convergente. Il y a donc convergence simple.
- Convergence uniforme : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{x}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{x}$. Notamment, pour $x = 4n$, cela donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(4n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$.
  De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la suite $(a_n(x))$ est décroissante en $n$. On a donc, pour $k \leq 4n$, $a_k(4n) \geq a_{4n}(4n) = \frac{1}{8n}$, et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n} a_k(4n) \geq \frac{4n}{8n} = \frac{1}{2}$.
  Au final, pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, on a $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{4n} a_k(4n) - \sum_{k=1}^{n} a_k(4n)\right| \geq \frac{1}{4}$ ou encore
  $$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=1}^{4n} a_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \geq \frac{1}{4}.$$
  Le critére de Cauchy n'est donc pas verifié et la convergence ne peut pas être uniforme.

-$\sum b_n(x) = \sum e^{-\sqrt{n}\cdot x}$ sur $[a, +\infty]$ :

- Convergence normale : On a $\displaystyle\sup_{x\in[a,+\infty[} |b_n(x)| = e^{-a\sqrt{n}}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = \lim_{m\to\infty} m^4 e^{-am} = 0$ avec le changement de variable $m = \sqrt{n}$. La série $\sum e^{-a\sqrt{n}}$ est donc convergente, et la série de fonctions $\sum b_n$ converge normalement.

-$\sum c_n(x) = \sum \frac{1}{1+n^2x^2}$ sur $[1, +\infty[$ :

- Convergence normale : On a $\displaystyle\sup_{x\in[1,+\infty[} |c_n(x)| = \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Ce dernier majorant étant le terme général d'une série convergente, la série de fonctions $\sum c_n$ converge normalement.

-$\sum d_n(x) = \sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ sur $\mathbb{R}_+$ :

- Convergence normale : On a $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |d_n(x)| = \frac{1}{n}$ qui est, malheureusement, le terme général d'une série divergente.

- Convergence simple : Commençons par fixer $x \in \mathbb{R}_+$. On a alors :
  - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e^{-nx}}{n} \geq 0$ ;
  - la suite $\left(\frac{e^{-nx}}{n}\right)$ décroit vers 0.

  On peut donc appliquer le critère des séries alternées et en déduire que la série converge simplement.

- Convergence uniforme : Le critère des séries alternées cité ci-dessus permet également de majorer le reste de rang $n$ par $\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, ce qui tend bien uniformèment vers 0 lorsque $n$ augmente. Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

-$\sum f_n(x) = \sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$ :
- Convergence normale : On a $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n^2}$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc normalement.

-$\sum g_n(x) = \sum n^a x^n(1-x)$ sur $[0,1]$
- Convergence normale : L'étude des variations de $g_n$ donne
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = \frac{n^a}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{n^{a-1}}{e}.$$
Il y a donc convergence normale si et seulement si $a<0$.
- Convergence simple : On fixe $x \in ]0,1[$. Soit $y>1$ tel que $xy<1$. On a, pour $n$ assez grand, $n^a \le y^n$ et donc $n^a x^n(1-x) \le (1-x)(xy)^n$. Ce dernier majorant étant le terme général d'une série géométrique convergente, on en déduit que $\sum g_n(x)$ converge. De plus, pour $x=0$ ou $x=1$, la suite $(g_n(x))$ est constante égale à 0. Il y a donc convergence simple vers une fonction $g$.
- Convergence uniforme : La série étant déjà normalement convergente lorsque $a<0$, considérons seulement le cas $n\ge 0$. On a alors, pour tout $x\in[0,1[$ et tout $n\ge 1$, $g_n(x)\ge x^n(1-x)$ et donc $\sum_{k=1}^n g_k(x) \ge (1-x)\sum_{k=1}^n x^k \ge x(1-x^{n+1}) \ge \dfrac{x}{2}$ pour $n$ assez grand. Mais cela interdit la continuité de $g$ en 1 puisque $g(1)=0$. Il n'y a donc pas convergence uniforme.

**Exercice 10** (Un calcul de série numérique)**.**

(1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\sup_{x\in[-a,a]} |u_n(x)| = \dfrac{a^n}{n} \le a^n$. Or ce dernier majorant est le terme général d'une série géométrique convergente. La série $\sum u_n$ converge ainsi normalement sur $[-a,a]$, donc uniformément sur le même intervalle.
Toutes les fonctions $u_n$ étant continues, la limite $f$ est continue sur $[-a,a]$ pour tout $a\in[0,1[$. Elle est donc continue sur $]-1,1[$.

(2) Idem.

(3) On va raisonner sur l'intervalle $[-a,a]$. On a alors convergence uniforme de la série $\sum u_n' = \sum v_n$ d'après la question (2). De plus, la série $\sum u_n(0) = \sum 0$ converge. On peut donc appliquer le théorème de dérivabilité et en déduire que $f$ est dérivable sur $[-a,a]$ avec
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum v_n(x) \\ &= \sum_{n\ge 1}(-x)^{n-1} \\ &= \sum_{n\ge 0}(-x)^n \\ &= \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$
Cela est vrai, pour tout $a\in[0,1[$, le résultat reste donc vrai sur $]-1,1[$.
Sur cet intervalle, la fonction $f$ est donc la primitive de $\frac{1}{1+x}$ qui s'annule en 0, à savoir $\ln(1+x)$

(4) Commençons par fixer $x\in[0,1]$. On a alors :
- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{x^n}{n}\ge 0$ ;
- la suite $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ décroit vers 0.

On peut donc appliquer le critère des séries alternées et en déduire que, non seulement, la série $\sum u_n(x)$ converge, mais également qu'au rang $n$, le reste peut être majoré par $\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Le reste converge donc uniformèment vers 0 et la convergence de la série $\sum u_n$ est uniforme sur $[0, 1]$.
La fonction $f$ est donc continue sur $[0, 1]$ comme limite uniforme de fonctions continues.

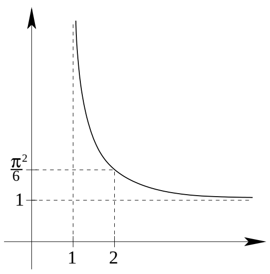
(5) On a $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1 + x) = \ln(2)$.

**Exercice 11** (Un équivalent de $\zeta$ au voisinage de 1)**.**

(1) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(x) = \frac{1}{n^x}$. On a alors $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |z_n(x)| = \dfrac{1}{n^a}$. Or, d'après le critère de Riemann, il s'agit du terme général d'une série convergente. La série $\sum z_n$ converge ainsi normalement sur $[a, +\infty[$, donc uniformément sur le même intervalle.
Toutes les fonctions $z_n$ étant continues, la limite $\zeta$ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$. Elle est donc continue sur $]1, +\infty[$.

(2) La convergence normale impliquant la convergence simple, de la question précédente on peut déduire qu'il existe $x_0$ ($x_0 = 2$ par exemple) tel que $\sum z_n(x_0)$ converge. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $z_n$ est dérivable, de dérivée égale à $z_n'(x) = \frac{-\ln(n)}{n^x}$. On a alors $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |z_n'(x)| = \dfrac{\ln(n)}{n^a}$. D'après le critère des séries de Bertrand, il s'agit du terme général d'une série convergente (Rappel : pour $n$ assez grand, majorer $\ln(n)$ par $n^{\frac{a-1}{2}}$, puis $\frac{\ln(n)}{n^a}$ par $\frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}}$ qui est convergente d'après le critère de Riemann). La série de fonctions $\sum z_n'$ converge alors normalement donc uniformèment sur $[a, +\infty[$.
On peut donc appliquer le théorème de dérivabilité, et en déduire que la fonction $\zeta$ est dérivable sur $[a, +\infty[$. Cela est vrai pour tout $a > 1$, la fonction $\zeta$ est donc $C^1$ sur $]1, +\infty[$.

(3)




Remarques sur le tracé du graphe :
- Limite en $+\infty$ : théorème de la double limite ;
- Limite en $1^+$ : On a la minoration :
$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^x} \geq \sum_1^\infty \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \int_1^\infty \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^+]{} \infty.$$

(4) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$. On a pour $x \geq 1$ fixé :
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^x} \geq 0$ ;
- la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ décroit vers 0.

On peut donc appliquer le critère des séries alternées et en déduire que, non seulement, la série $\sum a_n(x)$ converge, mais également qu'au rang $n$, le reste peut être majoré par $\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1}$. Le reste converge donc uniformèment vers 0 et la convergence de la série $\sum a_n$ est uniforme sur $[1, +\infty[$.
La fonction $a$ est continue sur $[1, +\infty[$ comme limite uniforme de fonctions continues.

(5) On a pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$ fixé :

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2^{x-1}}\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^{x-1}n^x}\\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}-\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{(2n)^x}\\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}-\sum_{n=\lfloor N/2\rfloor+1}^{N}\frac{2}{(2n)^x}.\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=\lfloor N/2\rfloor+1}^{N}\frac{2}{(2n)^x} &\leq \sum_{n=\lfloor N/2\rfloor+1}^{N}\frac{2}{(2\lfloor N/2\rfloor+2)^x}\\ &\leq \frac{2N/2}{(2N/2)^x}\\ &= \frac{1}{N^{x-1}}\xrightarrow[N\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Au final, lorsque l'on fait tendre $N$ vers l'infini, on obtient $\left(1-\frac{1}{2^{x-1}}\right)\zeta(x) = a(x)$.

(6) D'après la question précédente, on a, pour tout $x > 1$ :

$$\zeta(x) = \frac{a(x)}{1-\frac{1}{2^{x-1}}}.$$

Or, d'après l'exercice 10, $a(1) = \ln(2)$. Au final, on a donc

$$\zeta(x) \sim_{1^+} \frac{\ln(2)}{1-\frac{1}{2^{x-1}}} = \frac{2^{x-1}.\ln(2)}{2^{x-1}-1}.$$

On a, de plus,

$$\begin{aligned}2^{x-1}-1 &= e^{(x-1)\ln(2)}-1\\ &= 1+(x-1).\ln(2)-1+\circ(x-1)\\ &\sim (x-1).\ln(2).\end{aligned}$$

Au final, on a donc $\zeta(x) \sim_{1^+} \frac{2^{x-1}}{x-1}$.