Géométrie vectorielle

L1 SPC, semestre 2

Année 2012

1 Généralités

L'objectif de ce chapitre est de faire un rapide survol des éléments essentiels de géométrie vectorielle (et un peu affine). Il s'agit de repartir de choses connues (vecteurs, droites, plans,...) de dégager des propriétés géométriques communes, avant de les présenter de façon un peu plus abstraite et systématique.

On se limitera aux cas les plus simples, à savoir l'espace $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$, avant de donner quelques éléments du cas général.

2 La géométrie du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$

Les notions de base qu'on verra ici sont les notions de vecteur et de droite vectorielle.

On considère le plan vectoriel, défini comme l'ensemble des couples de réels

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y),\ x, y \in \mathbb{R}\} \ . \tag{1}$$

On définit la notion de *base canonique* $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$, formée de deux éléments

$$\vec{\imath} = (1, 0) \ , \qquad \vec{\jmath} = (0, 1) \ . \tag{2}$$

Remarque 1 Il ne faut pas confondre les notions de base et de repère (ou référentiel) : une base est formée de 2 vecteurs, alors qu'un repère ou référentiel se rapporte également à une origine.

2.1 Vecteurs

2.1.1 Définition

On introduit parfois un vecteur à partir d'un "bipoint", formé de deux points du plan : une origine et une fin.

Dans l'approche géométrique, dûe principalement aux Grecs (voir les éléments d'Euclide, 3 siècles avant notre ère), un vecteur est représenté par un segment orienté (une flèche) ayant pour extrémités un point de départ et un point d'arrivée. L'emplacement dans le plan ou l'espace n'a pas d'importance, deux déplacements de deux points d'origine distincts peuvent correspondre au même vecteur, seuls comptent sa longueur, sa direction et son sens. Il est donc possible de le faire glisser librement dans le plan, parallèlement à lui-même.

On va ici se focaliser davantage sur l'approche algébrique (dûe essentiellement aux mathématiciens Arabes, aux environs de l'an 1000) et introduire les vecteurs comme éléments de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire par leurs coordonnées.

- Dans l'approche algébrique, un vecteur $\vec{u} = (x, y)$ est défini par ses coordonnées x et y dans la base canonique :
$$\vec{u} = (x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}\ . \tag{3}$$
- Si une origine O du plan est choisie, le vecteur $\vec{u} = (x, y)$ est assimilé à un point A de coordonnées (x, y) ; l'équivalence est réalisée par $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.
- L'approche algébrique consiste à manipuler les vecteurs de façon plus abstraite, sans se référer à des points du plan.
- Dans une autre base orthonormée $(\vec{k}, \vec{\ell})$, les coordonnées ne sont plus les mêmes. On écrit $\vec{v} = x'\vec{k} + y'\vec{\ell}$, il existe des relations permettant de passer des coordonnées initiales aux nouvelles coordonnées.

2.1.2 Algèbre

Au delà de l'approche géométrique, on peut également introduire des opérations algébriques sur les vecteurs. En particulier les opérations fondamentales de d'addition et de multiplication par un scalaire.

- Etant donnés deux vecteurs, il est possible de les additionner, et de les multiplier par un scalaire (un nombre réel).
$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')\ , \qquad \lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y)\ . \tag{4}$$
Etant donnés N vecteurs $\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_N$ et N scalaires $\lambda_1, \ldots \lambda_N$, le vecteur
$$\vec{v} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \vec{u}_n = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_N\vec{u}_N \tag{5}$$
est appelé *combinaison linéaire* de $\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_N$.
- Le vecteur $\vec{0} = (0, 0)$ est appelé vecteur nul. Pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

Exemple 1 (Changement de base) Prenons $\vec{k} = (\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$ et $\vec{\ell} = (-\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$. On peut vérifier que $(\vec{k}, \vec{\ell})$ est une base orthonormée directe, et que $\vec{\imath} = (\vec{k} - \vec{\ell})/\sqrt{2}$ et $\vec{\jmath} = (\vec{k} + \vec{\ell})/\sqrt{2}$. Un vecteur $\vec{u} = (x, y)$ s'écrit alors
$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = x(\vec{k} - \vec{\ell})/\sqrt{2} + y(\vec{k} + \vec{\ell})/\sqrt{2} = \frac{x + y}{\sqrt{2}}\vec{k} + \frac{-x + y}{\sqrt{2}}\vec{\ell} \tag{6}$$

2.1.3 Géométrie

Définition 1 (Norme et produit scalaire) *1. Longueur d'un vecteur : La norme d'un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ (qui est aussi sa longueur, d'après le théorème de Pythagore) est la quantité $\|\vec{u}\|$ définie par*
$$\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R} \tag{7}$$
2. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ est le nombre défini par
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'\ . \tag{8}$$

On peut vérifier que la norme ne dépend pas de la base orthonormée choisie. Le produit scalaire ne dépend pas lui non plus de la base orthonormée choisie, comme on peut le voir sur la formule
$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}\ . \tag{9}$$

Définition 2 (Orthogonalité, colinéarité) *1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (ou perpendiculaires, noté $\vec{u} \perp \vec{v}$) si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, c'est à dire si l'angle est égal à $\pi/2$ ou $3\pi/2$.*

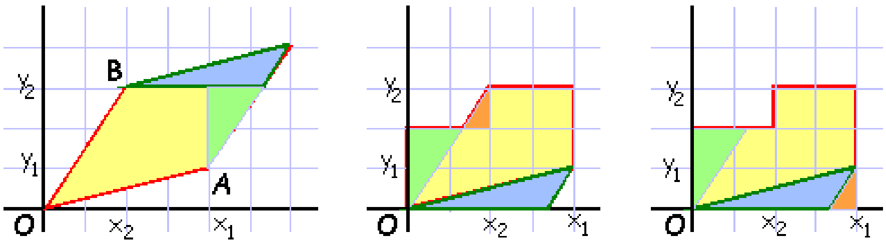


FIG. 1: Construction illustrant le lien entre l'aire du parallélogramme et le déterminant

2. *$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (ou parallèles, ou proportionnels, noté $\vec{u}//\vec{v}$) si $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, c'est à dire si l'angle est égal à 0 ou π.*

Définition 3 (Déterminant de deux vecteurs) *Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre $\mathsf{det}(\vec{u},\vec{v})$ défini par*

$$\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathsf{det}(\vec{u},\vec{v}) = xy' - x'y \in \mathbb{R} \ . \tag{10}$$

La valeur absolue du déterminant est l'aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs (voir en Figure 1 pour la construction). Son signe traduit l'orientation relative des deux vecteurs : si l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est positif (i.e. si on passe de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ par une rotation d'angle inférieur à π dans le sens trigonométrique), le déterminant est positif.

Propriétés :

1. Le déterminant est *antisymétrique :* pour tous $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathsf{det}(\vec{u},\vec{v}) = -\mathsf{det}(\vec{v},\vec{u}) \ . \tag{11}$$

2. Le déterminant est *bilinéaire :* pour tous $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, et $\lambda, \underline{u} \in \mathbb{R}$,

$$\mathsf{det}(\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}',\vec{v}) = \lambda\mathsf{det}(\vec{u},\vec{v})+\mu\mathsf{det}(\vec{u}',\vec{v}) \ , \quad \text{et} \quad \mathsf{det}(\vec{u},\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}') = \lambda\mathsf{det}(\vec{u},\vec{v})+\mu\mathsf{det}(\vec{u},\vec{v}') \ . \tag{12}$$

Proposition 1 *1. Deux vecteurs $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ sont colinéaires si et seulement si $\mathsf{det}(\vec{u},\vec{v}) = 0$. Ils sont orthogonaux si et seulement si $\mathsf{det}(\vec{u},\vec{v}) = \pm\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.*

2. Plus généralement, on a

$$\mathsf{det}(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\vec{u},\vec{v}) \ .$$

Exemple 2 On considère deux vecteurs $\vec{u} = (1,0)$ et $\vec{v} = (1,3)$. Le calcul donne $\mathsf{det}(\vec{u},\vec{v}) = 3$. Pour faire le lien entre déterminant et aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut se rappeler que l'air d'un parallélogramme est égal à sa base multipliée par sa hauteur. Ici la base vaut $\|\vec{u}\| = 1$, et la hauteur vaut $\|\vec{v}\|.\sin(\theta)$, où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On retrouve bien l'expression vue dans la proposition 1.

2.2 Droite vectorielle

Une droite vectorielle du plan est un sous-ensemble $(D) \subset \mathbb{R}^2$ constitué de tous les vecteurs proportionnels à un vecteur (non nul) $\vec{d}$, appelé vecteur directeur. Si une origine du plan est choisie, on peut également la représenter comme un ensemble de points, qui passe obligatoirement par l'origine.

Plus précisément, plusieurs définitions équivalentes sont possibles

– Droite définie par un *vecteur directeur* (VD) $\vec{d} \in \mathbb{R}^2$:

$$(D) = \left\{ \vec{u} = \lambda \vec{d},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} . \tag{13}$$

– Droite définie par un *vecteur normal* (VN) $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$:

$$(D) = \left\{ \vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \right\} \tag{14}$$

– Droite définie par une équation linéaire homogène, appelée *équation Cartésienne* (EC) :

$$(D) = \left\{ \vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ ax + by = 0 \right\} \tag{15}$$

a et b sont deux réels.

Remarque 2 1. L'équation Cartésienne n'est pas unique. Par exemple, $2ax + 2by = 0$ est une autre équation Cartésienne de la droite (15).

2. Si la droite est définie par un vecteur directeur $\vec{d} = (x_0, y_0)$, alors une équation pour la droite est $y_0 x - x_0 y = 0$, ce qui revient à dire $\mathsf{det}(\vec{u}, \vec{d}) = 0$.
3. Si la droite est définie par un vecteur normal $\vec{n} = (x_0, y_0)$, alors une équation pour la droite est $x_0 x + y_0 y = 0$.

Exemple 3 (Equivalence) On considère une droite (D) d'équation $3x+5y = 0$. On peut donc écrire $y = -3x/5$, de sorte que tous les vecteurs de (D) sont de la forme $(x, -3x/5)$ avec $x \in \mathbb{R}$. Un vecteur directeur possible pour (D) est donc $\vec{d} = (5, -3)$. Un vecteur normal possible est le vecteur $\vec{n} = (3, 5)$.

Proposition 2 *Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'une droite vectorielle D, leur somme $\vec{u} + \vec{v}$ appartient elle aussi à la droite D. De même, pour tout $\vec{u} \in D$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{u} \in D$.*

Théorème 1 *1. Deux droites vectorielles non confondues ont une intersection réduite au vecteur nul $\vec{0}$.*

2. *Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ sont non-confondues si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs non colinéaires.*
3. *Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ sont non-confondues si et seulement si elles ont des vecteurs normaux non colinéaires.*

Proposition 3 *Soient D_1 et D_2 deux droites vectorielles non confondues de $\mathbb{R}^2$. Alors tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ admet une unique décomposition comme somme d'un vecteur $\vec{v}_1 \in D_1$ et d'un vecteur $\vec{v}_2 \in D_2$*

$$\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2\ , \quad \vec{v}_1 \in D_1\ ,\ \vec{v}_2 \in D_2\ . \tag{16}$$

Pour effectuer la décomposition décrite dans la Proposition, on se ramène à un système linéaire à résoudre, comme on le fait dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 4 (Décomposition) On considère la droite (D_1) d'équation Cartésienne $2x - 3y = 0$, et la droite (D_2) d'équation $4x + y = 0$. On peut voir facilement que des vecteurs directeurs de ces deux droites sont $\vec{d_1} = (3, 2)$ et $\vec{d_2} = (1, -4)$. Soit maintenant $\vec{u} = (x, y)$, et cherchons une décomposition $\vec{u} = \lambda_1 \vec{d_1} + \lambda_2 \vec{d_2}$. Cette équation s'écrit aussi $(x, y) = (3\lambda_1 + \lambda_1, 2\lambda_1 - 4\lambda_2)$, d'où le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3\lambda_1 + \lambda_2 & = & x \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 & = & y \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 12\lambda_1 + 4\lambda_2 & = & 4x \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 & = & y \end{array} \right.$$

d'où on déduit

$$\lambda_1 = \frac{4x + y}{14}\ , \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = x - 3\lambda_1 = x - \frac{12x + 3y}{14} = \frac{2x - 3y}{14}\ .$$

On écrit donc

$$\vec{u} = (x, y) = \frac{4x + y}{14}(3, 2) + \frac{2x - 3y}{14}(1, -4) = \frac{4x + y}{14}\vec{d_1} + \frac{2x - 3y}{14}\vec{d_2}$$

2.3 Droites affines du plan

Une droite affine du plan est un sous-ensemble $(D) \subset \mathbb{R}^2$ du plan. Contrairement à une droite vectorielle, une droite affine ne passe pas nécessairement par l'origine du plan.

Plus précisément, plusieurs définitions équivalentes sont possibles

- Droite définie par un *vecteur directeur* (VD) $\vec{d} \in \mathbb{R}^2$ et un point A du plan :

$$(D) = \left\{ M(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{d}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \ . \tag{17}$$

- Droite définie par un *vecteur normal* (VN) $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et un point A du plan :

$$(D) = \left\{ M(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \right\} \tag{18}$$

- Droite définie par une équation linéaire homogène, appelée *équation Cartésienne* (EC) :

$$(D) = \left\{ \vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax + by = c \right\} \tag{19}$$

  a et b sont deux réels.

Remarque 3 (Distances) Dans le plan, la distance entre deux points est facile à calculer. La distance entre un point et une droite est quant à elle définie comme la distance entre ce point et le point de la droite qui est le plus proche. On peut montrer que la distance de $M_0(x_0, y_0)$ à la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par

$$d(M,(D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ . \tag{20}$$

3 La géométrie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$

On considère l'espace, défini comme l'ensemble des triplets de réels

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y), \ x,y,z \in \mathbb{R}\} \ . \tag{21}$$

La *base canonique* $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$ est formée des trois éléments

$$\vec{\imath} = (1,0,0) \ , \qquad \vec{\jmath} = (0,1,0) \ , \qquad \vec{k} = (0,0,1) \ . \tag{22}$$

3.1 Vecteurs

3.1.1 Définition

- Un vecteur est défini par ses coordonnées dans la base canonique :

$$\vec{u} = (x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \ . \tag{23}$$

- Si une origine O du plan est choisie, le vecteur $\vec{u} = (x,y)$ est assimilé à un point $A(x,y,z)$; l'équivalence est réalisée par $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

3.1.2 Algèbre

Comme dans l'espace $\mathbb{R}^2$, on peut introduire sur les vecteurs un certain nombre d'opérations algébriques, en particulier les opérations fondamentales d'addition et de multiplication scalaire.

- Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, il est possible de les additionner et les multiplient par un scalaire (un nombre)

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z') \;, \qquad \lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \;. \tag{24}$$

  Une combinaison linéaire de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_N \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_N\vec{u}_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \vec{u}_n \;, \tag{25}$$

  où $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$.
- Le vecteur $\vec{0} = (0,0,0)$ est appelé vecteur nul : on a évidemment $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{e} = \vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

3.1.3 Géométrie

Définition 4 (Norme et produit scalaire) *1. La longueur d'un vecteur est définie par sa norme (d'après le théorème de Pythagore/Parseval)*

$$\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R} \tag{26}$$

La norme ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

2. Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ est défini de la façon suivante : si $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \in \mathbb{R} \;. \tag{27}$$

Remarque 4 La norme et le produit scalaire ne dépendent pas de la base orthonormée choisie. En particulier,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}, \vec{v}) \;. \tag{28}$$

Définition 5 (Orthogonalité, colinéarité) *1. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ($\vec{u} \perp \vec{v}$) si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, c'est à dire si l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à $\pi/2$ ou $3\pi/2$.*

2. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (ou parallèles, ou proportionnels, $\vec{u}//\vec{v}$) si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.

Définition 6 (Produit vectoriel, produit mixte) *1. Le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est le vecteur de $\mathbb{R}^3$*

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v} = (x, y, z) \wedge (x', y', z') = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx') \in \mathbb{R}^3 \tag{29}$$

2. Le produit mixte de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est le nombre défini par le produit scalaire du premier vecteur avec le produit vectoriel des deux autres :

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \in \mathbb{R} \tag{30}$$

Par exemple, il est facile de vérifier que si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$, ainsi que $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$ et $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$.

Remarque 5 La valeur absolue du produit mixte de trois vecteurs est le volume du parallélépipède défini par ces vecteurs. Son signe traduit l'orientation. On note aussi le produit mixte sous la forme

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \tag{31}$$

Le produit mixte est aussi appelé *déterminant* $\mathsf{det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ des trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$.

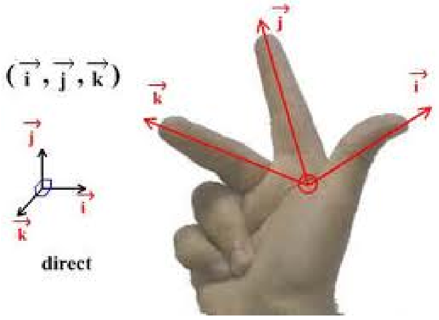


FIG. 2: Règle des trois doigts de la main droite : $\vec{k} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$

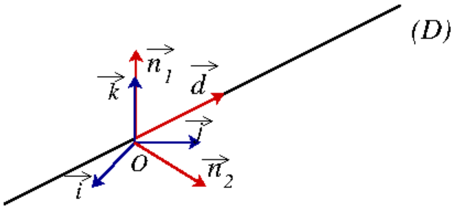
Définition 7 (Coplanarité) *Trois vecteur non nuls de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires si leur produit mixte est nul. De façon équivalente, chacun d'entre eux peut s'écrire comme une combinaison linéaire nulle de des deux autres vecteurs.*

Propriétés :

- Le produit vectoriel est *antisymétrique* (on dit aussi *anti-commutatif*) :
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \ . \tag{32}$$
Il n'est pas associatif : en général, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, on a
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin(\vec{u}, \vec{v})| \ . \tag{33}$$
On voit ainsi que si deux vecteurs sont colinéaires, le sinus de l'angle est nul, et le produit vectoriel est nul aussi.
- Le produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal à chacun de ces deux vecteurs. En effet, calculons par exemple
$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = x(yz' - zy') + y(zx' - xz') + z(xy' - yx') = 0 \ .$$
On montre de même que $\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$. De plus, l'orientation est donnée par la règle des trois doigts de la main droite (voir la figure 2 pour une illustration).
- Le produit mixte est invariant par permutation circulaire
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] \tag{34}$$

Exemple 5 (Force de Lorentz) La règle des trois doigts de la main droite permet d'interpréter géométriquement le phénomène d'induction de Lorentz (conducteur électrique en mouvement dans un champ magnétique constant) régi par la formule :
$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{F} \ .$$
La force de Lorentz $\vec{F}$ s'exerce sur les porteurs de charge et explique la naissance d'une f.e.m. induite dans le circuit en mouvement générant un courant circulant dans la même direction que la force de Lorentz.

Exemple 6 (Moment cinétique) Pour un point matériel M de vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, le moment cinétique (ou moment angulaire) $\vec{L}_O$ par rapport à l'origine O est défini par
$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{p} \ ,$$



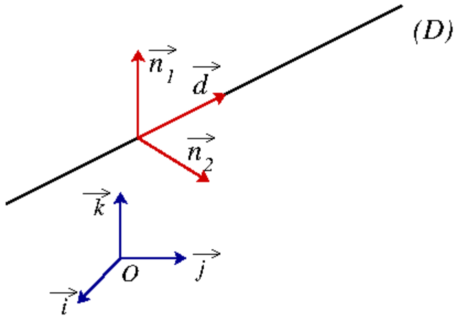


FIG. 3: Droites dans l'espace, avec un vecteur directeur et deux vecteurs normaux : droite vectorielle (gauche) et droite affine (droite).

où $\vec{p} = m\vec{v}$ est la quantité de mouvement de la particule. Le moment cinétique est donc le moment de cette dernière par rapport à O.

L'intérêt de l'introduction de cette grandeur vient de la relation entre sa variation temporelle (dérivée) et la somme des moments des forces extérieures appliquées au système : c'est le théorème du moment cinétique.

3.2 Droite vectorielle

– Dans le plan $\mathbb{R}^2$, une droite est définie par une relation entre les deux coordonnées x et y. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, deux relations sont nécessaires pour caractériser une droite.

$$(D) = \left\{ \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{array}{ccc} ax + by + cz & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z & = & 0 \end{array} \right\} \tag{35}$$

a, a', b, b', c et c' sont des réels ; les deux équations ne sont pas uniques.

– Comme dans le plan $\mathbb{R}^2$, un unique vecteur directeur $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ suffit à définir une droite :

$$(D) = \left\{ \vec{u} = \lambda \vec{d}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \tag{36}$$

– Par contre, deux vecteur normaux non colinéaires $\vec{n}_1, \vec{n}_2 \in \mathbb{R}^3$ sont nécessaires pour définir une droite

$$(D) = \left\{ \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 0 \right\} \ . \tag{37}$$

Un exemple de droite vectorielle de l'espace $\mathbb{R}^3$, avec des exemples de vecteurs directeur et normaux se trouve en Figure 3.

Exemple 7 (Equivalence des trois descriptions) On considère la droite d'équations $x - 2y + z = 0$ et $2x + 3y - z = 0$.

– La seconde équation implique $z = 2x + 3y$, et la première donne $x - 2y + (2x + 3y) = 0$, d'où $y = -3x$ et donc $z = -7x$. Un vecteur directeur est donc $\vec{d} = (1, -3, -7)$.

– On trouve facilement deux vecteurs normaux $\vec{n}_1 = (1, -2, 1)$ et $\vec{n}_2 = (2, 3, -1)$. En effet, les deux équations Cartésiennes de la droite s'écrivent aussi sous la forme $\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 0$.

3.3 Plan vectoriel

– Un plan vectoriel de l'espace est défini par une équation linéaire :

$$(P) = \left\{ \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ ax + by + cz = 0 \right\} \tag{38}$$

a, b et c sont trois réels ; cette équation n'est pas unique.

– Deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{d_1}, \vec{d_2} \in \mathbb{R}^2$ sont nécessaires pour définir un plan vectoriel

$$(P) = \left\{ \vec{u} = \lambda \vec{d_1} + \mu \vec{d_2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \tag{39}$$

– Un plan vectoriel de l'espace peut être défini par un vecteur normal $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$:

$$(P) = \left\{ \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \right\} \tag{40}$$

Exemple 8 (Equivalence des trois descriptions) On considère le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x + y + z = 0$.

– On voit bien que cette équation équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, où $\vec{n}$ est le vecteur défini par $\vec{n} = (1, 1, 1)$, qui est donc un vecteur normal au plan.
– A partir de l'équation Cartésienne, on voit que chaque couple (x, y) détermine un vecteur de la droite. En prenant $(x, y) = (1, 0)$ on obtient $z = -1$, d'où un premier vecteur $\vec{d_1} = (1, 0, -1)$. En prenant $(x, y) = (0, 1)$ on obtient $z = -1$, d'où un premier vecteur $\vec{d_2} = (0, 1, -1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, et peuvent donc être utilisés comme vecteurs directeurs du plan.

3.4 Doites et plans affines

1. Droite affine :
   – Définie par deux équations Cartésiennes

$$(D) = \left\{ M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{array}{rcl} ax + by + cz & = & d \\ a'x + b'y + c'z & = & d' \end{array} \right\} \tag{41}$$

   $a, a', b, b', c, c', d, d'$ sont des réels.
   – Définie par un point $A \in (D)$ et un unique directeur $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$

$$(D) = \left\{ M : \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{d},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \ . \tag{42}$$

   – Définie par deux vecteur normaux non colinéaires $\vec{n}_1, \vec{n}_2 \in \mathbb{R}^3$

$$(D) = \left\{ M : \quad \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_2 = 0 \right\} \ . \tag{43}$$

2. Plan affine :
   – Défini par une équation linéaire :

$$(P) = \left\{ \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax + by + cz = d \right\} \tag{44}$$

   a, b, c, d sont des réels.
   – Défini par un point $A \in (P)$ et deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{d_1}, \vec{d_2} \in \mathbb{R}^2$

$$(P) = \left\{ M :\ \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{d_1} + \mu \vec{d_2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \tag{45}$$

   – Défini par un point $A \in (P)$ et un vecteur normal $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$:

$$(P) = \left\{ M :\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \right\} \ . \tag{46}$$

Exemple 9 (Droite affine) On considère la droite d'équations $x - 2y + z = 1$ et $2x + 3y - z = 2$.

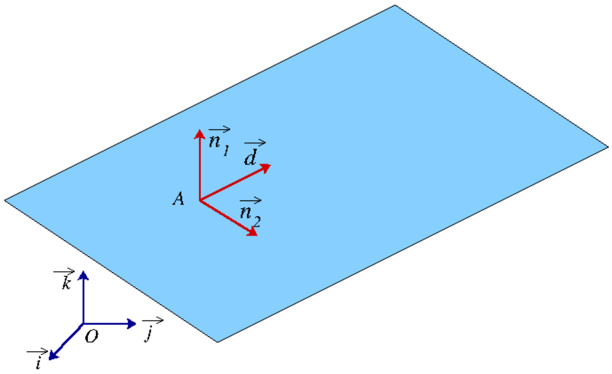


Fig. 4: Plan affine : vecteurs directeurs et vecteur normal.

– Pour obtenir les autres descriptions, on doit résoudre des systèmes linéaires. Par exemple, les deux équations Cartésiennes sont équivalentes au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} -2y+z & = & 1-x \\ 3y-z & = & 2-2x \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 3-3x \\ z & = & 1-x+2y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 3-3x \\ z & = & 7-7x \end{array}\right.$$

On peut donc écrire que

$$(D) = \{(0,3,7) + x(1,-3,-7) \ , \quad x \in \mathbb{R}\} \ ;$$

de sorte que (D) peut être définie par le point $A(0,3,7)$ et le vecteur directeur $\vec{d} = (1,-3,-7)$.

– Etant donné le point $A(0,3,7)$ trouvé ci-dessus, les deux équations Cartésiennes s'écrivent aussi sous la forme $x-2(y-3)+(z-7)=0$ et $2x+3(y-3)-(z-7)=0$, ce qui équivaut à deux équations du type $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}_1 = 0$ et $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}_2 = 0$, en prenant $\vec{n}_1 = (1,-2,1)$ et $\vec{n}_2 = (2,3,-1)$.

– On peut aussi vérifier que $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (-1,3,7)$ est proportionnel à $\vec{d}$. Ainsi, connaissant les deux vecteurs normaux on pouvait déterminer un vecteur directeur.

Exemple 10 (Plan affine) On considère le plan d'équation Cartésienne $x-2y+z=1$.

– On voit facilement que $A(1,0,0) \in (P)$. L'équation Cartésienne s'écrit sous la forme $(x-1)+y+z = \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$, où $\vec{n} = (1,-2,1)$ est un vecteur normal au plan.

– Avec le point A obtenu ci-dessus, on a donc

$$\overrightarrow{AM} = (x-1,y,z) = (x-1,y,1-x+2y) = (x-1).(1,0,-1) + y.(0,1,2) \ ,$$

et $\overrightarrow{AM}$ s'écrit donc comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{d}_1 = (1,0,-1)$ et $\vec{d}_2 = (0,1,2)$. On vérifie aussi que $\vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2 = (1,-2,1) = \vec{n}$.

Remarque 6 *La distance d'un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ à un plan (P) d'équation $ax+by+cz+d=0$ est donnée par la formule :*

$$d(M_0,(P)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2} \ . \tag{47}$$