Géométrie vectorielle, corrections des exercices

1 Systèmes linéaires

1. (A) : On considère le système
$$\begin{cases} 3x & +5y & = & 11 \\ 2x & +3y & = & 7 \end{cases}$$
On procède par substitution : la seconde équation donne $y = (7-2x)/3$; en insérant dans la première on obtient $3x + 5(7-2x)/3 = 11$, qui équivaut à $-x + 14 = 33$, soit $\boldsymbol{x = -19}$. On en déduit $y = (7+38)/3$, soit $\boldsymbol{y = 15}$.
(B) : On considère le système
$$\begin{cases} 2x & +5y & = & 10 \\ 2x & +3y & = & 8 \end{cases}$$
Il est cette fois plus avantageux de procéder par combinaisons linéaires. En soustrayant les deux équations on obtient directement $2y = 2$, soit $\boldsymbol{y = 1}$. En insérant dans n'importe laquelle des deux équations, par exemple la première, on obtient $2x = 5$, soit $\boldsymbol{x = 5/2}$.
(C) : On considère le système
$$\begin{cases} 5x & +10y & = & 30 \\ 3x & +\ 3y & = & 7 \end{cases}$$
On procède par substitution : la seconde équation donne $y = (7-3x)/3$; en insérant dans la première on obtient $5x + 10(7-3x)/3 = 30$, qui équivaut à $-15x + 70 = 90$, soit $\boldsymbol{x = -4/3}$. On en déduit $y = (7+4)/3$, soit $\boldsymbol{y = 11/3}$.
2. (A) : On considère le système
$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 5 \\ x & -y & -\ z & = & 1 \\ x & & +\ z & = & 3 \end{cases}$$
On procède par substitution. La troisième équation donne $z = 3-x$. En reportant dans la seconde, on obtient $x - y - (3-x) = 1$, soit $y = 2x - 4$. En reportant dans la première, on aboutit à $x + (2x-4) + 2(3-x) = 5$, soit $\boldsymbol{x = 3}$. On en déduit alors $\boldsymbol{y = 2}$ et $\boldsymbol{z = 0}$.
(B) : On considère le système
$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 0 \\ x & -y & -\ z & = & 0 \\ x & & +\ z & = & 0 \end{cases}$$
On procède encore par substitution. La troisième équation donne $z = -x$. En reportant dans la seconde, on obtient $x - y - (-x) = 0$, soit $y = 2x$. En reportant dans la première, on aboutit à $x + (2x) + 2(-x) = 0$, soit $\boldsymbol{x = 0}$. On en déduit alors $\boldsymbol{y = 0}$ et $\boldsymbol{z = 0}$.

2 Géométrie vectorielle

2.1 Exercices dans le plan

Correction de l'exercice 2.1 (Vecteurs colinéaires) *(a) : On considère les vecteurs* $\vec{u} = (1, m)$ *et* $\vec{v} = (m, 1)$. Les deux sont non-nuls. Cherchons λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Ceci revient au système d'équations $m = \lambda$ et $1 = \lambda m$, qui n'a de solution que pour $m = \pm 1$.
Alternativement, on a $\mathsf{det}(\vec{u}, \vec{v}) = 1 - m^2$. Les vecteurs sont donc colinéaires si et seulement si $m^2 = 1$, soit $m = \pm 1$.

(b) : On considère les vecteurs $\vec{u} = (m, m^2)$ *et* $\vec{v} = (m, 1)$. Le déterminant vaut $\mathsf{det}(\vec{u}, \vec{v}) = m - m^3$

Correction de l'exercice 2.2 (Equations Cartésiennes) 1. *On considère la droite du plan définie par le vecteur directeur* $\vec{d} = (1,3)$.

Il est facile de trouver un vecteur normal $\vec{n} = (x_n, y_n)$. En écrivant $\vec{n}\cdot\vec{d}$ on obtient $x_n + 3y_n = 0$, soit $x_n = -3y_n$. Une solution possible est $\vec{n} = (3,-1)$. On en déduit une équation Cartésienne : (D) est l'ensemble des vecteurs $\vec{u} = (x,y)$ tels que $\vec{u} \perp \vec{n}$, ce qui s'écrit

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x - y = 0 \ .$$

2. *On considère la droite du plan définie par le vecteur normal* $\vec{n} = (1,3)$. *Déterminer un vecteur directeur, et une équation pour cette droite.*

Correction de l'exercice 2.3 (Parallélogramme) *On considère le parallélogramme défini par les vecteurs* $\vec{u} = (1,3)$ *et* $\vec{v} = (2,-1)$. L'aire du parallélogramme vaut

$$\mathcal{A} = |\mathsf{det}(\vec{u},\vec{v})| = 7 \ .$$

On peut noter que le déterminant (qui vaut -7) est négatif, ce qui indique que les deux vecteurs forment entre eux un angle négatif.

2.2 Exercices dans l'espace

Correction de l'exercice 2.4 (Volume d'un parallélépipède) *On considère le parallélépipède engendré dans l'espace* $\mathbb{R}^3$ *par les trois vecteurs* $\vec{v}_1 = (2,0,2)$, $\vec{v}_2 = (1,2,3)$ *et* $\vec{v}_3 = (1,4,-1)$.

Le volume du parallélépipède est donné par la valeur absolue du produit mixte

$$\mathcal{V} = |[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3]| = |(2,0,2)\cdot[(1,2,3)\wedge(1,4,-1)]| = |(2,0,2)\cdot(-14,-1,2)| = 24 \ .$$

On peut noter que le produit mixte est négatif, ce qui indique que les trois vecteurs forment un trièdre indirect.

Correction de l'exercice 2.5 (Plan vectoriel dans l'espace) 1. *On considère le plan* (P) *défini par les deux vecteurs* $\vec{e}_1 = (1,0,2)$ *et* $\vec{e}_2 = (1,1,3)$.

Pour avoir l'équation Cartésienne, le plus simple est de calculer un vecteur normal, par exemple $\vec{n} = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = (-2,2,1)$. L'équation Cartésienne correspondante est alors

$$(P) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad -2x + 2y + z = 0\right\} \ .$$

Le vecteur $\vec{u} = (1,2,9)$ *est-il orthogonal à* (P) *?*

Non : il n'est pas proportionnel au vecteur normal obtenu plus haut. On peut aussi voir directement que $\vec{u}\cdot\vec{e}_1 = 19 \neq 0$.

2. *On considère le plan* (P) *défini par le vecteur normal* $\vec{n} = (1,0,2)$. Il est facile d'en obtenir une équation Cartésienne. $\vec{u} = (x,y,z) \in (P)$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{n}$, soit $x + 2z = 0$.
   Le vecteur $\vec{u} = (2,3,1)$ *appartient-il à* (P) *?* La réponse est non : $\vec{u}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$.

Correction de l'exercice 2.6 (Plan vectoriel dans l'espace) *On se donne deux vecteurs* $\vec{u} = (1,2,3)$ *et* $\vec{v} = (3,2,1)$ *dans l'espace.*

1. *Equations Cartésiennes :* Pour la droite (D_u) engendrée par $\vec{u}$, on peut écrire

$$\vec{v} = (x,y,z) \in (D_u) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \ , \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

   Ceci équivaut à dire que $y = 2x$ et $z = 3x$, ces deux équations peuvent être considérées comme équations Cartésiennes de (D_u).
   Pour la droite (D_v) engendrée par $\vec{v}$, le même raisonnement conduit à prendre comme équations Cartésiennes $x = 3z$ et $y = 2z$.

2. *Donner des équations Cartésiennes de la droite vectorielle perpendiculaire au plan engendré par* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$. En notant (D) cette droite, l'approche la plus simple consiste à dire que $\vec{w} = (x,y,z) \in (D)$ si et seulement si $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$, ce qui conduit à deux équations $x + 2y + 3z = 0$ et $3x + 2y + z = 0$. Alternativement on peut aussi calculer un vecteur directeur $\vec{d} = \vec{u}\wedge\vec{v} = (-4,8,-4)$. Par le même raisonnement que ci-dessus, on peut prendre comme équations Cartésiennes $y = -2x$ et $z = x$, ces deux équations sont équivalentes aux deux autres.

3 Géométrie affine

3.1 Droites dans le plan

Correction de l'exercice 3.1 (Droite affine dans le plan)

1. *On considère la droite (D) définie par les points $A(2,3)$ et $B(-1,4)$.*

   Un vecteur directeur de (D) est le vecteur $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (-3,1)$, un vecteur normal possible est le vecteur $\vec{n} = (1,3)$. La droite (D) peut être définie comme l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit
   $$(x-2) + 3(y-3) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{x + 3y = 11}\ .$$
   Autre approche : La droite est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ est proportionnel à $\overrightarrow{AB}$. Donc $\forall M(x,y) \in (D)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
   $$(x-2, y-3) = \lambda(-3,1) \quad \Leftrightarrow \quad x-2 = -3(y-3) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x + 3y = 11}\ .$$

2. *On considère la droite définie par les points $A(-7,-2)$ et $B(-2,-5)$.* Un vecteur directeur de (D) est le vecteur $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (5,-3)$, un vecteur normal possible est le vecteur $\vec{n} = (3,5)$. La droite (D) peut être définie comme l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit
   $$3(x+7) + 5(y+2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{3x + 5y = -31}\ .$$

3. *On considère la droite définie par les points $A(3,3)$ et $B(3,6)$.* Un vecteur directeur de (D) est le vecteur $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (0,3)$. La droite (D) est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Ceci s'écrit
   $$(x-3, y-3) = \lambda(0,3) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x = 3}\ .$$

Correction de l'exercice 3.2

1. *On considère le point $A(2,1)$ et le vecteur directeur $\vec{v} = (-3,-1)$.* On peut procéder comme plus haut : un vecteur normal est le vecteur $\vec{n} = (1,-3)$, et la droite est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, ce qui s'écrit
   $$(x-2, y-1) \cdot (1,-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2) - 3(y-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x - 3y = -1}\ .$$
2. *On considère le point $A(0,1)$ et le vecteur directeur $\vec{v} = (1,2)$.*
3. *On considère le point $A(-1,1)$ et le vecteur directeur $\vec{v} = (1,0)$.*

3.2 Droites et plans dans l'espace

Correction de l'exercice 3.3 On va voir ici quatre méthodes de résolution différentes.

1. On considère les points $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$ et $C(0,1,0)$. On a donc comme vecteurs directeurs les vecteurs $\vec{d_1} = \overrightarrow{AB} = (1,0,-1)$ et $\vec{d_2} = \overrightarrow{AC} = (0,1,-1)$, ce qui donne un vecteur normal $\vec{n} = \vec{d_1} \wedge \vec{d_2} = (1,1,1)$. Le plan peut donc être défini comme l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit
   $$(x, y, z-1) \cdot (1,1,1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{x + y + z = 1}\ .$$
   <u>Autre méthode :</u> A partir du vecteur normal obtenu, on sait que l'équation Cartésienne est de la forme $x + y + z = d$, où d est un nombre à déterminer. Il suffit alors de vérifier cette équation sur l'un des points, par exemple A, pour voir que $0 + 0 + 1 = d$ donne $d = 1$.
2. On considère les points $A(1,1,1)$, $B(2,0,1)$ et $C(-1,2,4)$. On a donc comme vecteurs directeurs les vecteurs $\vec{d_1} = \overrightarrow{AB} = (1,-1,0)$ et $\vec{d_2} = \overrightarrow{AC} = (-2,1,3)$. Le plan (P) peut donc être défini comme l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{d_1} + \mu\vec{d_2}$, soit
   $$(x-1, y-1, z-1) = (\lambda - 2\mu, -\lambda + \mu, 3\mu) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x-1 &=& \lambda - 2\mu \\ y-1 &=& -\lambda + \mu \\ z-1 &=& 3\mu \end{array} \right.$$

C'est un système linéaire, qu'on va résoudre par substitution. La dernière équation donne donc $\mu = (z-1)/3$, la seconde conduit alors à $\lambda = \mu - y + 1 = (z - 3y + 2)/3$, et la première conduit finalement à $x - 1 = (z-3y+2)/3 - 2(z-1)/3 = -y - z/3 + 4/3$. En multipliant les deux membres par 3 pour simplifier, on aboutit ainsi à

$$\boldsymbol{3x + 3y + z = 7} \ .$$

<u>Méthode "bourrin :"</u> allons-y franco ! On cherche une équation de la forme $ax + by + cz = d$; en utilisant les trois points à notre disposition, on aboutit au système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a+b+c & = & d \\ 2a \quad\ +c & = & d \\ -a+2b+4c & = & d \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c & = & d \\ 2b+c & = & d \\ 3b+5c & = & 2d \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c & = & d \\ 2b+c & = & d \\ -7c & = & -d \end{array} \right.$$

La dernière équation donne $d = 7c$, la deuxième donne $b = 3c$ et la première donne $a = d - b - c = 3c$. Les équations Cartésiennes possibles sont donc de la forme $3cx + 3cy + cz = 7c$, qui redonne l'équation précédente dans le cas particulier $c = 1$.

Correction de l'exercice 3.4 *Trouver une équation du plan (P) contenant le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants*

1. $A(1,2,1)$, $\vec{u} = (4,0,3)$, *et* $\vec{v} = (1,3,-1)$, 2. $A(1,0,2)$, $\vec{u} = (2,-1,3)$ *et* $\vec{v} = (-1,4,5)$.

Correction de l'exercice 3.5 *Trouver une équation du plan (P) contenant le point A et la droite (D) dans les cas suivants*

1. $A(0,0,0)$ *et* $(D) = \{(x,y,z) : x + y - z + 3 = 0$ *et* $4x - y + 2z = 0\}$.
2. $A(1,1,0)$ *et* $(D) = \{(t, -1+2t, 1-3t),\ t \in \mathbb{R}\}$

Correction de l'exercice 3.6

1. *On se donne une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et un point A, et on cherche la distance $d(A,(D))$ entre A et (D), c'est à dire la distance entre A et le point de D le plus proche.* Le point de la droite (D) le plus proche de A est le projeté orthogonal A_0 de A sur (D)). Soit M_0 un point quelconque de (D). On peut décomposer $\overrightarrow{AM_0} = \overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0M_0}$, de sorte que $\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM_0} = \vec{v} \wedge \overrightarrow{AA_0}$ et la norme de $\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM_0}$ est égale à $\|\vec{v}\|.\|\overrightarrow{AA_0}\|$. Comme la distance de A à (D) est égale à la norme de $\overrightarrow{AA_0}$, on en déduit

$$\boldsymbol{d(A,(D)) = \frac{\left\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM_0}\right\|}{\|\vec{v}\|}}$$

2. *Soient $A(1,2,3)$ et la droite $(D) = \{(x,y,z) : -2x + y - 3z = 1$ et $x + z = 1\}$.* (D) admet comme vecteurs normaux $\vec{n}_1 = (-2,1,-3)$ et $\vec{n}_2 = (1,0,1)$. Un vecteur directeur est donc $\vec{d} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (1,-1,-1)$, de norme $\|\vec{d}\| = \sqrt{3}$. Prenons $M_0 \in (D)$, par exemple $M_0(0,4,1)$. On a alors $\overrightarrow{AM_0} = (-1,2,-2)$ et $\vec{d} \wedge \overrightarrow{AM_0} = (0,1,1)$, et $\|\vec{d} \wedge \overrightarrow{AM_0}\| = \sqrt{2}$. Par conséquent, on obtient $\boldsymbol{d(A,(D)) = \sqrt{2/3}}$.

Correction de l'exercice 3.7

1. *Dans l'espace, on considère le point $A(1,0,2)$ et le plan $(P) = \{(x,y,z) :\ 2x + y + z + 4 = 0\}$.* D'après le cours on sait que la distance entre A et (P) est donnée par

$$d(A,(P)) = \frac{|1 \times 2 + 0 \times 1 + 2 \times 1 + 0|}{2^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ .$$

2. *Dans l'espace, on considère le point $A(3,2,1)$ et le plan $(P) = \{(x,y,z) : -x + 5y - 4z = 5\}$.* D'après le cours on sait que la distance entre A et (P) est donnée par

$$d(A,(P)) = \frac{|-1 \times 3 + 5 \times 2 - 4 \times 1 - 5|}{(-1)^2 + 5^2 + (-4)^2} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21} \ .$$