Corrections

1 Familles libres, liées, génératrices, bases

Correction de l'exercice 1.1 (Vecteurs colinéaires de $\mathbb{R}^2$) (a) On considère les vecteurs $\vec{u} = (1, m)$ et $\vec{v} = (m, 1)$. Il suffit de calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 - m^2$, qui diffère de zéro si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq -1$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires si et seulement si $m = 1$ ou $m = -1$.

(b) On considère les vecteurs $\vec{u} = (m, m^2)$ et $\vec{v} = (m, 1)$. Là encore il suffit de calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}) = m - m^3$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires si et seulement si $m = 1$ ou $m = -1$ ou $m = 0$.

Correction de l'exercice 1.2 (Décomposition d'un vecteur sur une base) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$: $\vec{u} = (1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 2)$. Soit $\vec{a} = (1, -3)$, et cherchons un couple de réels (λ, μ) tel que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Cette équation équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda + \mu & = & 1 \\ \lambda + 2\mu & = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \lambda + \mu & = & 1 \\ \mu & = & -4 \end{array}\right.$$

d'où la solution $\boldsymbol{(\lambda, \mu) = (5, -4)}$.

Correction de l'exercice 1.3 (Vecteurs colinéaires et coplanaires de $\mathbb{R}^3$) 1. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1, m, m)$ et $\vec{v} = (m, 1, 1)$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ vérifiant $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, ce qui équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} m & = & \lambda \\ 1 & = & \lambda m \\ 1 & = & \lambda m \end{array}\right.$$

On voit facilement qu'il n'existe de solution que si $\boldsymbol{m = \pm 1}$ (la solution étant alors $\lambda = \pm 1$).

2. (a) On considère les vecteurs $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, 1)$ et $\vec{c} = (2, 1, 1)$. Leur déterminant vaut $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -4$, c'est donc une famille libre, et les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ ne sont donc pas coplanaires.

(b) On considère les vecteurs $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (3, 2, 1)$ et $\vec{c} = (5, 0, 5)$. Leur déterminant vaut $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, c'est donc une famille liée. Les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont donc coplanaires (ils ne sont pas colinéaires).
On peut en fait aller plus loin , et montrer (ou vérifier) que $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

(c) On considère les vecteurs $\vec{a} = (1, -3, 5)$, $\vec{b} = (2, 2, 2)$ et $\vec{c} = (4, 0, -2)$. Leur déterminant vaut $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -80$, c'est donc une famille libre. Les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ ne sont donc pas coplanaires.

Correction de l'exercice 1.4 (Familles libres) (a) Dans $\mathbb{R}^2$, la famille constituée de $\vec{e}_1 = (1, 2)$, $\vec{e}_2 = (2, 5)$, $\vec{e}_3 = (6, 17)$ et $\vec{e}_4 = (4, 1)$ ne peut pas être une famille libre, car elle est constituée de plus de deux vecteurs.

(b) Dans $E = \mathbb{R}^3$: la famille constituée de $\vec{e}_1 = (1, 1, 2)$, $\vec{e}_2 = (2, 1, 2)$ et $\vec{e}_3 = (1, 0, 1)$ peut être libre ; son déterminant vaut $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = -1 \neq 0$, donc c'est une famille libre (et par là même une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Dans $E = \mathbb{R}^4$, la famille constituée de $\vec{e}_1 = (1, 2, 4, 3)$, $\vec{e}_2 = (2, 5, 3, 4)$ et $\vec{e}_3 = (6, 17, 7, 10)$ peut être libre. Pour s'en assurer, supposons qu'il existe une combinaison linéaire égale au vecteur nul : $x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \vec{0}$ équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 6x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 17x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 6x_3 & = & 0 \\ x_2 + 5x_3 & = & 0 \\ -5x_2 - 17x_3 & = & 0 \\ -2x_2 - 8x_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 6x_3 & = & 0 \\ x_2 + 5x_3 & = & 0 \\ 8x_3 & = & 0 \\ 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où on déduit que nécessairement $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. La famille est donc libre.

Correction de l'exercice 1.5 (Familles génératrices) (a) Dans $E=\mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1=(1,2)$ et $\vec{e}_2=(2,5)$ forment une famille génératrice ; en effet, ils ne sont pas colinéaires, c'est donc une famille libre et donc une base de $\mathbb{R}^2$. Donc c'est une famille génératrice.

(b) Dans $E=\mathbb{R}^3$, on considère $\vec{e}_1=(1,0,1)$, $\vec{e}_2=(1,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,1,1)$ et $\vec{e}_4=(1,1,1)$. Soit $\vec{u}=(x,y,z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, cherchons s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1$,...$\vec{e}_4$ sous la forme $\vec{u}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3+a_4\vec{e}_4$. Cette équation vectorielle équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1+a_2 \qquad +a_4 &=& x\\ a_2+a_3+a_4 &=& y\\ a_1 \qquad +a_3+a_4 &=& z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a_1+a_2 \qquad +a_4 &=& x\\ a_2+a_3+a_4 &=& y\\ -a_2+a_3 &=& z-x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a_1+a_2 \qquad +a_4 &=& x\\ a_2+a_3+a_4 &=& y\\ 2a_3+a_4 &=& z+y-x\end{array}\right.$$

C'est un système linéaire échelonné, à 3 équations et 4 inconnues, il y a donc une infinité de solutions. Donc la famille est génératrice.

(c) Dans $E=\mathbb{R}^4$, on considère $\vec{e}_1=(1,0,0,0)$, $\vec{e}_2=(1,1,0,0)$, $\vec{e}_3=(1,1,1,0)$ et $\vec{e}_4=(1,1,1,1)$. Comme c'est 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$, pour vérifier s'ils forment une famille génératrice il suffit de vérifier que leur déterminant est non nul ; ce dernier se calcule facilement (c'est le déterminant d'une matrice triangulaire) et vaut 1, donc la famille est génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice 1.6 (Bases) (a) $\vec{e}_1=(4,6)$ et $\vec{e}_2=(6,9)$ ne sont pas colinéaires, c'est donc une famille libre dans $\mathbb{R}^2$, et donc une base.

(b) La famille constituée des 3 vecteurs $\vec{e}_1=(1,1,1)$, $\vec{e}_2=(0,1,1)$ et $\vec{e}_3=(0,0,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si c'est une famille libre, i.e. si son déterminant est non nul. Ce dernier vaut 1, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) La famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ constituée de $\vec{e}_1=(1,0,1,0)$, $\vec{e}_2=(1,0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,1,0,1)$ et $\vec{e}_4=(0,1,0,1)$ n'est pas libre, car des vecteurs sont identiques (sans doute une erreur dans l'énoncé ;-)

Correction de l'exercice 1.7 (Familles libres et familles génératrices) 1. Soient $\vec{e}_1=(0,1,1)$, $\vec{e}_2=(1,0,1)$ et $\vec{e}_3=(1,1,0)$. Calculons $\mathsf{det}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=2$, la famille est libre, et comme elle est composée de 3 vecteurs c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Ecrivons $\vec{u}=(1,1,1)=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$. Ceci équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 \qquad +a_3 &=& 1\\ +a_2+a_3 &=& 1\\ a_1+a_2 \qquad &=& 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a_1 \qquad +a_3 &=& 1\\ +a_2+a_3 &=& 1\\ a_2-a_3 &=& 0\end{array}\right.$$

qui admet comme solution (unique) $a_1=a_2=a_3=1/2$.

2. Exemple de famille libre de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas génératrice : toute famille de 2 vecteurs non colinéaires, par exemple $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$.
3. Exemple de famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas libre : $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ et $(1,1,1)$.

Correction de l'exercice 1.8 (Familles libres et familles génératrices) 1. Dans $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs ne sont pas toujours libres : s'ils sont colinéaires ils sont liés. Deux vecteurs peuvent être générateurs de $\mathbb{R}^2$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ et$\mathbb{R}^4$, deux vecteurs ne sont pas nécessairement libres (même situation que ci dessus). Par contre ils ne forment jamais une famille génératrice (il en faut plus).
3. Trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ne peuvent jamais être libres. Ils ne sont pas toujours générateurs de $\mathbb{R}^2$, par exemple lorsqu'ils sont proportionnels.
4. Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne sont pas nécessairement libres ; s'ils sont proportionnels, ou coplanaires ils sont liés. Ils peuvent être générateurs de $\mathbb{R}^3$ (s'ils ne sont pas liés). Trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ ne sont pas toujours libres, et ne sont jamais générateurs de $\mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice 1.9 (Bases, et sous-espaces engendrés) 1. La famille constituée de $\vec{v}_1=(1,1,1)$, $\vec{v}_2=(3,0,-1)$ et $\vec{v}_3=(-1,1,-1)$ est libre (son déterminant vaut 8). C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La famille constituée de $\vec{v}_1 = (1,2,3)$, $\vec{v}_2 = (3,0,-1)$ et $\vec{v}_3 = (1,8,13)$ est liée (son déterminant est nul). Cherchons les vecteurs $\vec{u} = (x,y,z)$ tels qu'il existe trois réels a_1, a_2 et a_3 vérifiant $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k\vec{v}_k$. Ceci équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_1 + 3a_2 + a_3 & = & x \\ 2a_1 \quad\quad + 8a_3 & = & y \\ 3a_1 - a_2 + 13a_3 & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a_1 + 3a_2 + a_3 & = & x \\ \quad - 6a_2 + 6a_3 & = & y - 2x \\ \quad - 10a_2 + 10a_3 & = & z - 3x \end{array}\right.$$

qui admet des solutions si et seulement si $10(y-2x) = 6(z-3x)$. Le sous-espace engendré par ces trois vecteurs est donc le plan, d'équation Cartésienne $\boldsymbol{x - 5y + 3z = 0}$. Ce plan peut être caractérisé par deux vecteurs directeurs, par exemple $\vec{e}_1 = (5,1,0)$ et $\vec{e}_2 = (-3,0,1)$., ou un vecteur normal $\vec{n} = (1,-5,3)$.

3. La famille constituée de $\vec{v}_1 = (1,2,-3)$, $\vec{v}_2 = (1,0,-1)$ et $\vec{v}_3 = (1,10,-11)$ est liée (son déterminant est nul). Cherchons les vecteurs $\vec{u} = (x,y,z)$ tels qu'il existe trois réels a_1, a_2 et a_3 vérifiant $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k\vec{v}_k$. Ceci équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 + a_3 & = & x \\ 2a_1 \quad\quad + 10a_3 & = & y \\ -3a_1 - a_2 - 11a_3 & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a_1 + 3a_2 + a_3 & = & x \\ \quad - 2a_2 + 8a_3 & = & y - 2x \\ \quad 2a_2 - 8a_3 & = & z + 3x \end{array}\right.$$

qui admet des solutions si et seulement si $y - 2x = -(z+3x)$. Le sous-espace engendré par ces trois vecteurs est donc le plan, d'équation Cartésienne $\boldsymbol{x + y + z = 0}$.

Correction de l'exercice 1.10 (Rang d'une famille de vecteurs) Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace engendré par ces vecteurs.

1. Soient $\vec{u}_1 = (1,-1,2)$, $\vec{u}_2 = (2,3,3)$ et $\vec{u}_3 = (2,-7,7)$. La famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est libre (son déterminant est non-nul) et est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Son rang est donc 3.
2. $\vec{u}_1 = (1,0,0,-1)$, $\vec{u}_2 = (1,1,1,1)$, $\vec{u}_3 = (1,2,3,4)$ et $\vec{u}_4 = (2,1,1,0)$. Pour caractériser le rang de la famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$, il faut résoudre un système linéaire, en utilisant le pivot. On montre que le rang vaut 3.
3. $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ avec $\vec{u}_1 = (1,2,3)$, $\vec{u}_2 = (2,3,1)$, $\vec{u}_3 = (4,5,-3)$ et $\vec{u}_4 = (1,1,-2)$. Le rang est égal à 2.

Correction de l'exercice 1.11 (Rang d'une famille de vecteurs, suite) Soit $F = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ une famille de vecteur avec $\vec{u}_1 = (a,1,1)$, $\vec{u}_2 = (-1,-a,-1)$ et $\vec{u}_3 = (-1,-1,a)$, où a est un réel. Discuter le rang de F selon les valeurs de a.

2 Changement de base

Correction de l'exercice 2.1 (Changement de base 1)

1. On considère les vecteurs $\vec{f}_1 = (1,2)$ et $\vec{f}_2 = (3,1)$ de $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et son inverse vaut

$$P^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées dans cette base d'un vecteur $\vec{u} = (x,y)$ quelconque sont données par

$$M(\vec{u})_{\mathcal{F}} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x+3y)/5 \\ (-2x+y)/5 \end{pmatrix} .$$

2. On considère les vecteurs $\vec{f_1} = (1,1,1)$, $\vec{f_2} = (1,1,0)$ et $\vec{f_3} = (1,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{F} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ est une famille libre (son déterminant vaut -1), c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse vaut

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque dans cette base sont données par

$$M(\vec{u})_{\mathcal{F}} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2.2 (Changement de base 2) 1. On considère une base $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ de $\mathbb{R}^2$, et on pose

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} \ , \qquad \vec{v} = \vec{a} - \vec{b} \ .$$

La famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$? Si oui, écrire la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{F}}$. Donner la matrice $M(\vec{v})_{\mathcal{F}}$ d'un vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont x et y.

2. On considère une base $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ de $\mathbb{R}^3$ et on pose

$$\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} \ , \qquad \vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c} \ , \qquad \vec{w} = 3\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} \ .$$

La famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, écrire la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{F}}$. Donner la matrice $M(\vec{v})_{\mathcal{F}}$ d'un vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont x, y et z.

Correction de l'exercice 2.3 (Matrices de passage) 1. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ est la base canonique et $\mathcal{B}' = \{(0,1,1), (1,-1,1), (1,1,0)\}$. La matrice de passage est la matrice

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ et $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage est l'inverse de la matrice précédente, c'est à dire

$$P_2 = {P_1}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Dans $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{B}$ est la base canonique et $\mathcal{B}' = \{(1+i, 1-i, 0), (0,0,2i), (-i,1,2i)\}$. La matrice de passage vaut

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -i \\ 1-i & 0 & 1 \\ 0 & 2i & 2i \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2.4 (Matrices de passage) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} , \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix} .$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit une matrices de passage est que son déterminant soit non-nul. Il suffit de calculer les déterminants de ces matrices. $\mathsf{det}(A) = 0$, $\mathsf{det}(B) = 0$, $\mathsf{det}(C) = 2$ et $\mathsf{det}(D) = \mathsf{det}(C) = 2$ (D s'obtient à partir de C par permutations de colonnes). Donc C et D sont des matrices de passage.

Correction de l'exercice 2.5 (Un petit dernier pour la route) Soient $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ et $\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ les familles définies par

$$\vec{e}_1 = (-1,-1,3)\ , \quad \vec{e}_2 = (-4,-4,4)\ , \quad \vec{e}_3 = (-1,-2,4) \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \vec{f}_1 & = & \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 & = & 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 & = & 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{array}\right.$$

Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{R}^3$, et déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Correction de l'exercice 2.6 (Allez, encore un petit) Soient $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ et $\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ les familles définies par

$$\vec{e}_1 = (-3,-1,1)\ ,\ \vec{e}_2 = (-3,0,5)\ , \vec{e}_3 = (4,5,-2)\ ; \quad \vec{f}_1 = (3,1,3)\ ,\ \vec{f}_2 = (-5,5,-3)\ ,\ \vec{f}_3 = (-5,-2,3)\ .$$

Pour montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{R}^3$, il suffit de calculer le déterminants de ces deux familles de vecteurs :

$$\mathsf{det}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 46 \neq 0\ ; \qquad \mathsf{det}(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 162 \neq 0\ .$$

On en déduit que chacune des deux familles est une famille libre ; comme ce sont des familles de 3 vecteurs, ce sont donc deux bases de $\mathbb{R}^3$.

Pour déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, on peut procéder de deux façons différentes.

La façon la plus directe (mais la moins rapide) est d'exprimer chacun des vecteurs $\vec{f}_i$ en fonction des vecteurs $\vec{e}_j$. Par exemple, cherchons à écrire $\vec{f}_1 = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3$. Ceci équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} -3p_1 - 3p_2 + 4p_3 & = & 3 \\ -p_1 \qquad\ + 5p_3 & = & 1 \\ p_1 + 5p_2 - 2p_3 & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3p_1 - 3p_2 + 4p_3 & = & 3 \\ 3p_2 + 11p_3 & = & 0 \\ 12p_2 - 2p_3 & = & 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3p_1 - 3p_2 + 4p_3 & = & 3 \\ 3p_2 + 11p_3 & = & 0 \\ -46p_3 & = & 12 \end{array}\right.$$

On a donc $p_3 = -6/23$, $p_2 = -11p_3/3 = 22/23$, et $p_1 = -1 - p_2 + 4p_3/3 = -53/23$, d'où

$$\boldsymbol{\vec{f}_1 = \frac{1}{23}(-53\vec{e}_1 + 22\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3)}\ .$$

Ensuite, cherchons à écrire $\vec{f}_2 = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3$. Ceci équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} -3p_1 - 3p_2 + 4p_3 & = & -5 \\ -p_1 \qquad\ + 5p_3 & = & 5 \\ p_1 + 5p_2 - 2p_3 & = & -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3p_1 - 3p_2 + 4p_3 & = & -5 \\ 3p_2 + 11p_3 & = & 20 \\ 12p_2 - 2p_3 & = & -14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3p_1 - 3p_2 + 4p_3 & = & -5 \\ 3p_2 + 11p_3 & = & 20 \\ -46p_3 & = & -94 \end{array}\right.$$

On a donc $p_3 = 47/23$, $p_2 = (20 - 11p_3)/3 = -19/23$, et $p_1 = (5 - 3p_2 + 4p_3)/3 = 120/23$, d'où

$$\boldsymbol{\vec{f}_2 = \frac{1}{23}(120\vec{e}_1 - 19\vec{e}_2 + 47\vec{e}_3)}\ .$$

Finalement, cherchons à écrire $\vec{f}_3 = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3$. Ceci équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} -3p_1 - 3p_2 + 4p_3 & = & -5 \\ -p_1 \qquad\ + 5p_3 & = & -2 \\ p_1 + 5p_2 - 2p_3 & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3p_1 - 3p_2 + 4p_3 & = & -5 \\ 3p_2 + 11p_3 & = & -1 \\ 12p_2 - 2p_3 & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3p_1 - 3p_2 + 4p_3 & = & -5 \\ 3p_2 + 11p_3 & = & -1 \\ -46p_3 & = & 8 \end{array}\right.$$

On a donc $p_3 = -4/23$, $p_2 = (-1 - 11p_3)/3 = 7/23$, et $p_1 = 26/23$, d'où

$$\boldsymbol{\vec{f}_3 = \frac{1}{23}(26\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3)}\ ,$$

et finalement

$$\boldsymbol{P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -53 & 120 & 26 \\ 22 & -19 & 7 \\ -6 & 47 & -4 \end{pmatrix}}$$

Plus directement, on peut aussi remarquer que

$$P_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} , \qquad P_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

et voir que

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_0}P_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}'} \ .$$

Le calcul montre que

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}} = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} -25 & 14 & -15 \\ 3 & 2 & 11 \\ -5 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

et le produit des deux matrices redonne le même résultat que plus haut.

3 Bases et applications linéaires

Correction de l'exercice 3.1 (Changement de base et application linéaire)

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Expliciter la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{F}$.
2. Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Ecrire la matrice de ϕ dans la base canonique et dans la base $\mathcal{F}$.

Correction de l'exercice 3.2 (Matrice de passage) On considère une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, et une famille de trois vecteurs $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ donnés par

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \ , \qquad \vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 \ , \qquad \vec{f}_3 = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et expliciter la matrice de changement de base $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{F}}$.
2. Calculer l'inverse de la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{F}}$.
3. Calculer les composantes dans la base $\mathcal{F}$ des vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ suivants, définis par leur matrice colonne dans la base $\mathcal{B}$:

$$M(\vec{v}_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \qquad M(\vec{v}_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} , \qquad M(\vec{v}_3)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

Correction de l'exercice 3.3 (Suite) Avec les notations de l'exercice précédent, soit φ l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \ , \qquad \varphi(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 \ , \qquad \varphi(\vec{e}_3) = 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3 \ .$$

Expliciter la matrice $M(\varphi)_{\mathcal{B}}$ de φ dans la base $\mathcal{B}$, en déduire la matrice $M(\varphi)_{\mathcal{F}}$ de φ dans la base $\mathcal{F}$.

Correction de l'exercice 3.4 (Matrices et changement de base) On considère la matrice $A = M(\varphi)_{\mathcal{B}}$ de l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dans une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ -3 & 7/2 \end{pmatrix} ,$$

et une seconde base $\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, donnée par

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \ , \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \ .$$

1. Expliciter la matrice de passage
$$P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \ ,$$
et calculer sa matrice inverse.
2. En déduire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$
$$D = M(\varphi)_{\mathcal{B}'} \ ,$$
et vérifier qu'elle est diagonale.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier positif n, on a
$$A^n = P D^n P^{-1} \ .$$
4. En déduire l'image par l'application linéaire φ^n d'un vecteur quelconque $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Que se passe-t-il quand $n \to \infty$?