Le polynôme du second degré dans tous ses états

Introduction :

La parabole :
Etymologie: du grec *parabolê, para = à côté* et *ballein = lancer, jeter.*
La parabole correspond à la trajectoire d'un projectile lancé et retombant à terre.

1. Resolution algebrique d'une equation du second degre :

Soit P(x) un polynôme de degré de 2 à coefficients constants a, b, c réels tels que $a \neq 0$.
$P(x) = ax^2 + bx + c$

mise sous forme canonique de ce polynôme :
$$P(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (1)$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$

La relation (1) devient :
$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

A partir de cette forme canonique, déterminons les solutions sur $\mathbb{C}$ de l'équation $P(x) = 0$.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Trois cas sont alors possibles :

- **1er cas $\Delta > 0$:**

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
Il existe donc deux solutions réelles que nous noterons $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et. $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- **2ème cas $\Delta = 0$:**

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$$
Il existe donc une solution réelle (racine double) que nous noterons $x_0 = \frac{-b}{2a}$

- **3eme cas$\Delta < 0$:**

L'équation$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ n'admet aucune solution réelle.

Δ étant négatif $\Delta = -|\Delta| = |\Delta|.i^2$ avec $i^2 = -1$
$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{|\Delta|i^2}}{2a} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}i = \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}i}{2a}$$

On obtient donc deux solutions complexes que nous noterons :
$z_1 = \frac{-b-\sqrt{|\Delta|}i}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{|\Delta|}i}{2a}$ avec $\overline{z_1} = z_2$

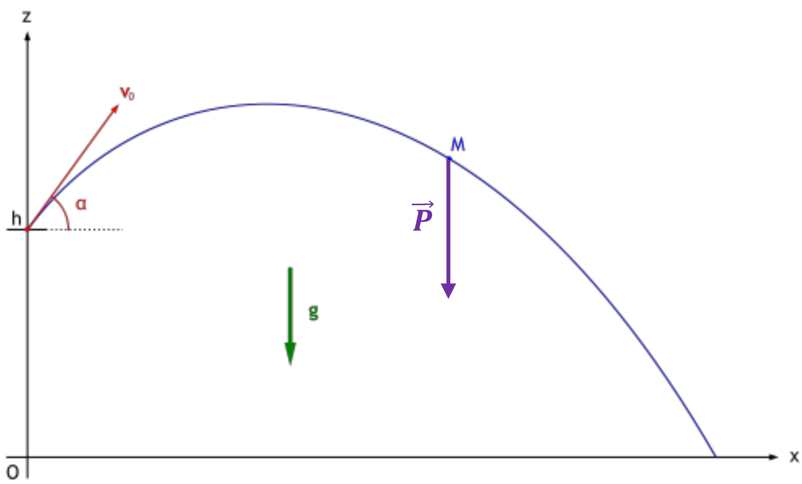
2. LE POLYNOME DU SECOND DEGRE ET LA PHYSIQUE :

On cherche à étudier le mouvement du centre de gravité d'une balle dans le cas d'une chute libre c'est à dire un cas théorique où la balle est soumise uniquement à l'attraction terrestre.
Cette balle est envoyée avec un vitesse initiale constante $\overrightarrow{v_0}$ qui fait un angle constant α par rapport à l'axe $(O,\vec{\imath})$ à une altitude h du sol.

La deuxième loi établie par Newton permet d'affirmer que dans tout référentiel galiléen, la somme des forces appliquées à un système est égale au produit de sa masse par l'accélération de son centre de gravité.

Nous passerons ici sur les définitions qui ne sont pas essentielles à la démonstration mathématique.

Les lois de la physique permettent de démontrer que le mouvement est plan. Nous nous placerons donc dans un repère cartésien à deux dimensions $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$



Le poids d'un système («objet subissant les forces ») est un vecteur défini par $\vec{P} = -m g\vec{\jmath}$ (m étant la masse et g l'intensité de la pesanteur).

Soit le vecteur accélération $\vec{a}$.

D'après la deuxième loi de Newton on a :

$\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{a} = -mg\vec{\jmath} \Leftrightarrow \vec{a} = -g\vec{\jmath}$.

Or, en physique, le vecteur accélération est défini comme la dérivée du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ en fonction de la variable temporelle t :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

Pour obtenir le vecteur vitesse il faut donc chercher la primitive de l'accélération, on obtient donc :

$\vec{v}(t) = A\vec{\imath} + (-gt + B)\vec{\jmath}$ (1) A et B étant des constantes d'intégration.

Or pour t =0, $\vec{v}(0) = v_0\cos\alpha\vec{\imath} + v_0\sin\alpha\vec{\jmath}$

Par identification, en remplaçant t par 0 dans la relation (1) on obtient :

$A = v_0 \cos\alpha$ et $B = v_0 \sin\alpha$

D'où $\vec{v}(t) = v_0 \cos\alpha \, \vec{i} + (-gt + v_0 \sin\alpha) \, \vec{j}$

En physique, le vecteur vitesse est défini comme la dérivée du vecteur position en fonction de la variable temporelle t.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}}$$

Pour obtenir le vecteur position il faut donc chercher la primitive du vecteur vitesse.
On obtient donc :

$\overrightarrow{OM}(t) = (v_0 t\cos\alpha + C)\vec{i} + (\frac{-1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + D)\vec{j}$ (2) C et D étant des constantes d'intégration.

Or pour t =0, $\overrightarrow{OM}(0) = h\vec{j}$.

Par identification, en remplaçant t par 0 dans la relation (2) on obtient :

$C = 0$ et $D = h$ d'où $\overrightarrow{OM}(t) = (v_0 t\cos\alpha)\vec{i} + (\frac{-1}{2} g t^2 + v_0 t\sin\alpha + h)\vec{j}$

Le vecteur position dépend ici du paramètre t mais nous pouvons également trouver une relation entre les coordonnées de ce vecteur.

D'une manière générale, le vecteur position s'écrit sous la forme :

$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ on a donc $x(t) = v_0 t\cos\alpha$ (3)
et
$y(t) = \frac{-1}{2} g t^2 + v_0 t\sin\alpha + h$ (4)

De la relation (3) on obtient :

$$t = \frac{x(t)}{v_0 \cos\alpha} \quad (3)'$$

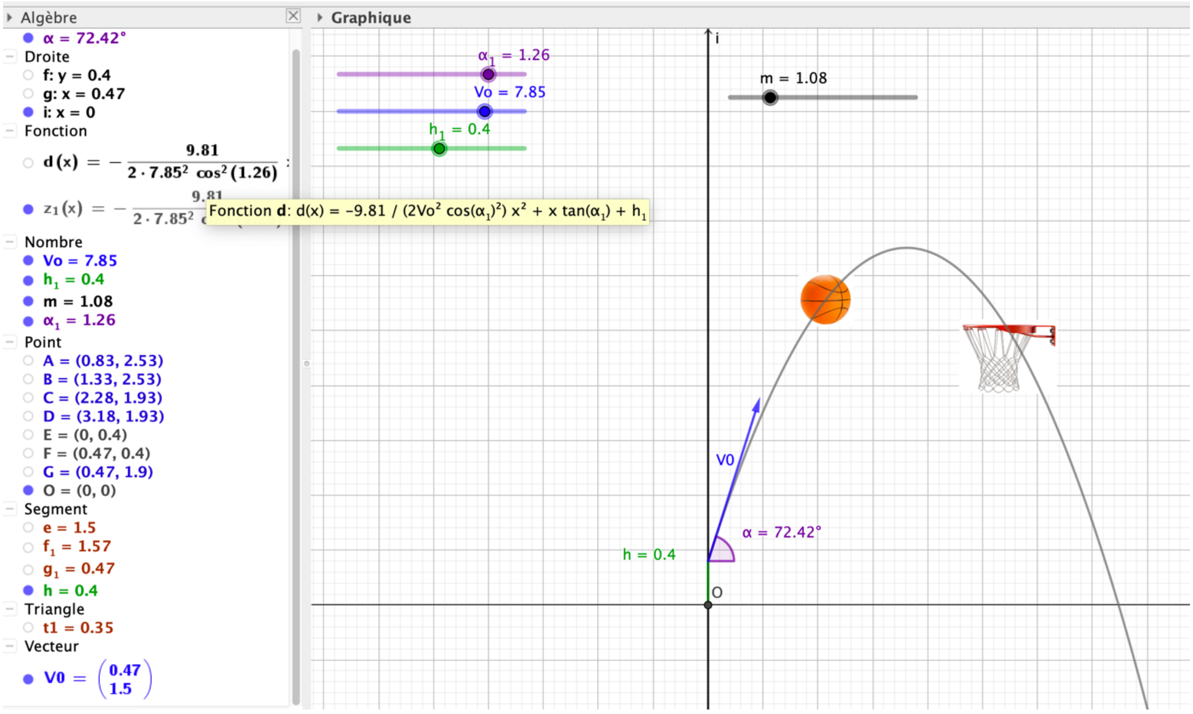
De la relation (4) et en utilisant la relation (3)' on obtient :

$$y(t) = \frac{-1}{2}\left(\frac{x(t)}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{x(t)}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha + h$$

or $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ pour tout $\alpha \neq \frac{\Pi}{2} + k * \Pi$ avec. $k \in \mathbb{N}$ d'où

$$\boxed{y(t) = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x(t)^2 + \tan\alpha\, x(t) + h.}$$

Les mathématiques permettent dans ce cas de décrire à partir d'un polynôme du second degré, la trajectoire d'une balle en chute libre et d'expliquer pourquoi quelque soit l'envoi considéré, ce mouvement sera parabolique.
On pourra utiliser Géogebra pour faire varier les paramètres afin que l'élève soit sensibiliser à la variation de la trajectoire en fonction de ces paramètres.



3. $\underline{\text{RESOUDRE L'EQUATION } x^2 + bx = c \text{ DE MANIERE GEOMETRIQUE.}}$

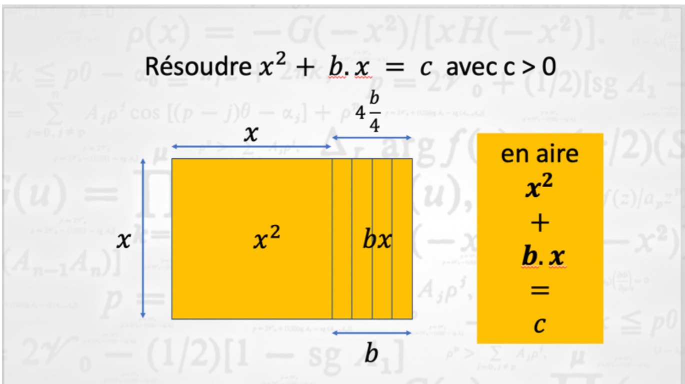
On pourrait avec des 1ère chercher à résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'une manière originale.

On choisit de se placer dans le cas où c>0 et a=1. Un changement de variable nous permet de revenir à ce cas.

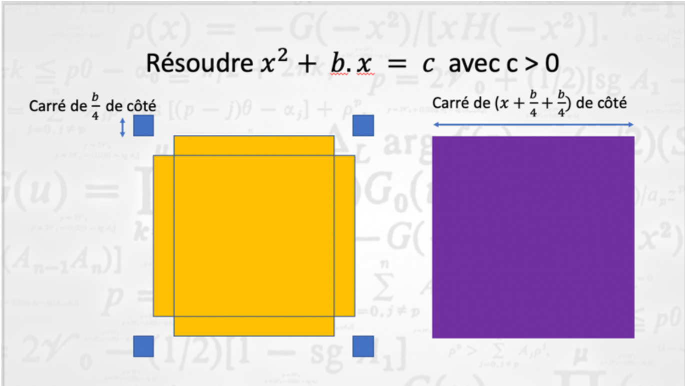
Une présentation Powerpoint permet de comprendre les différentes phases de cette présentation :

On présente le contexte

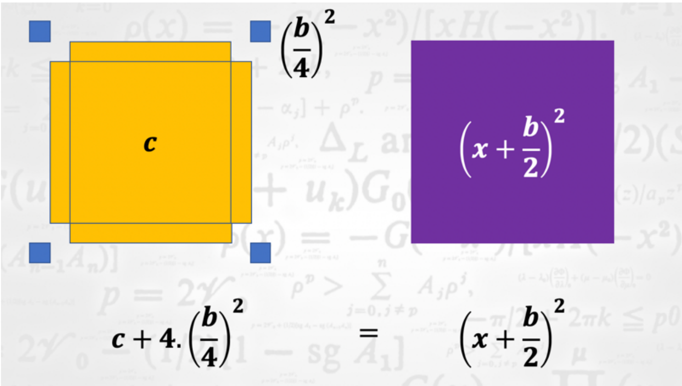
1) L'aire x^2 + l'aire $b.x$ = l'aire c, globale



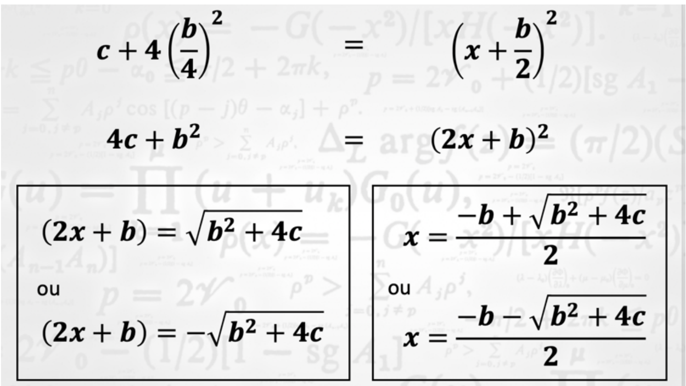
2) On peut alors déplacer les 4 bandelettes de largeur $\frac{b}{4}$ et obtient quasiment un carré dont il manque les 4 coins (carré de côté $\frac{b}{4}$).
Les côtés de ce « presque » carré mesurent $x + \frac{b}{4} + \frac{b}{4} = x + \frac{b}{2}$



3) On a donc à résoudre l'équation $c + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$



4) On retrouve les 2 solutions x_1 et x_2.

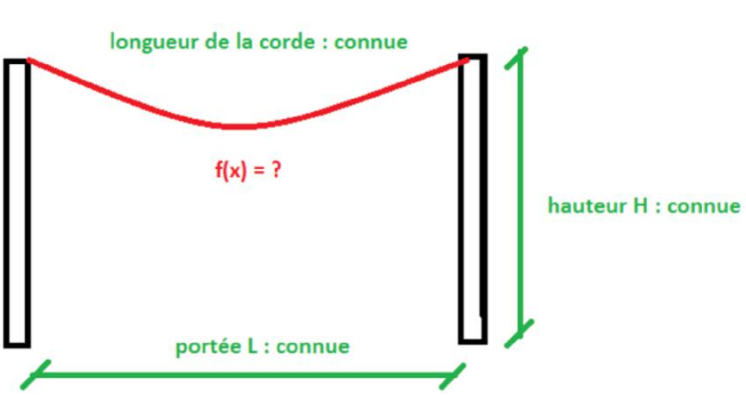


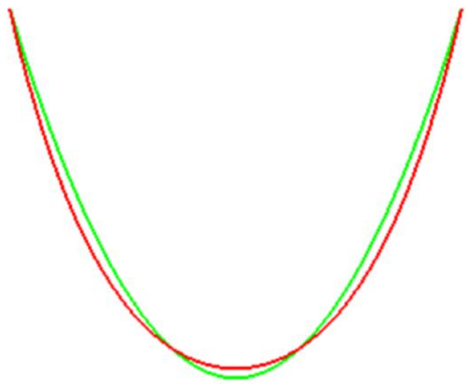
4. RECHERCHES COMPLEMENTAIRES

Pour compléter cet exposé, nous avons souhaité répondre à 2 questions :

4.1 Pour une vitesse $\overrightarrow{V_0}$ de norme constante et une hauteur h, elle aussi constante, quels sont les points du plan (P) que l'on peut atteindre en faisant varier l'angle α ?

4.2 Quelle est la forme prise par une corde suspendue par ses extrémités car l'expérience physique montre que ce n'est pas une parabole.





4.1 Pour une vitesse $\overrightarrow{V_0}$ de norme constante et une hauteur h, elle aussi constante, quels sont les points du plan (P) que l'on peut atteindre en faisant varier l'angle α ?

Pour répondre à cette question, nous allons fixer un point M de coordonnées M (x, y) dans (P).

Existe-t-il donc une valeur de α pour laquelle l'équation :

$y = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x.\tan\alpha$ est vérifiée ?

x et y étant constants et en remarquant que $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ on obtient :

$$y + \frac{g}{2V_0^2}(1 + \tan^2\alpha)\,x^2 - x.\tan\alpha = 0$$

$$\frac{gx^2}{2V_0^2}(\tan\alpha)^2 - x.(\tan\alpha) + y + \frac{gx^2}{2V_0^2} = 0$$

Cette équation n'a de solutions réelles que si le discriminant Δ est positif soit :

$$\Delta = x^2 - 4.\frac{gx^2}{2V_0^2}.\left(y + \frac{gx^2}{2V_0^2}\right) \geq 0$$

Soit $x^2 - 2.\frac{gx^2}{V_0^2}.\left(y + \frac{gx^2}{2V_0^2}\right) \geq 0$

Soit $x^2(1 - \frac{2g}{V_0^2}.\left(y + \frac{gx^2}{2V_0^2}\right)) \geq 0$, comme $x^2 \geq 0$, on obtient :

$$1 - \frac{2g}{V_0^2}.\left(y + \frac{gx^2}{2V_0^2}\right) \geq 0$$

Soit $1 - \frac{2g}{V_0^2}.y - \frac{g^2x^2}{V_0^4} \geq 0$

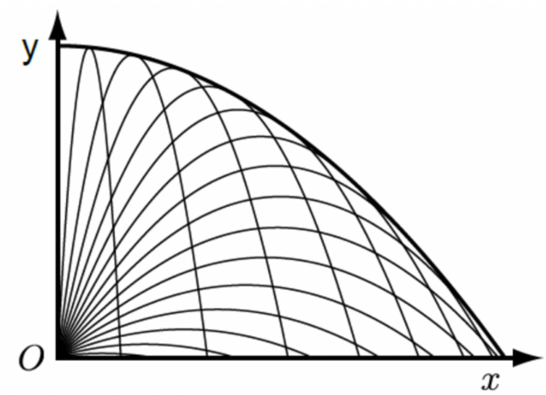
Soit $\frac{2g}{V_0^2}.y \leq 1 - \frac{g^2x^2}{V_0^4}$

Soit $y \leq \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}x^2$

Tous les points atteints se trouvent donc sous une parabole d'équation :

$$y \leq \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}x^2$$

Cette parabole est appelée en physique **parabole de sûreté.**
Une représentation graphique de cette parabole est donnée ci-contre :



4.2 Quelle est la forme prise par une corde suspendue par ses extrémités car l'expérience physique montre que ce n'est pas une parabole.

Le problème de la forme prise par un fil pesant flexible a longtemps intéressé les mathématiciens.

Galilée (1564-1642) pensait que cette forme était un arc de parabole, mais la preuve du contraire fut apportée en 1627 par Joachim Jung (1587-1657) et en 1646 par Huygens (1629-1695).

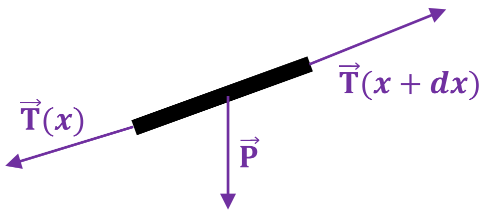
A partir d'un défi lancé en 1691 par Jacques Bernoulli (1654-1705) , Leibniz (1646-1716), Jean Bernoulli (son frère) et Huygens, démontrent quasi simultanément que la forme exacte est une chaînette.

Nous allons ci-dessous que l'équation décrivant la forme d'un fil pesant n'est pas représentée par un arc de parabole comme le pensait Galilée.

On découpe la chaînette en petits morceaux.
Chaque morceau étant compris en les abscisses x et $x + dx$, dx désignant un réel.
Soit dl la longueur d'un petit morceau de chaînette.

Physiquement, trois forces s'appliquent à cette partie de chaînette :

- Le poids $\vec{\mathrm{P}} = -\mathrm{P}.\vec{\mathrm{j}} = -\mu.\mathrm{dl}.\mathrm{g}.\vec{\jmath}$, μ représentant la masse linéique et g la constante gravitationnelle locale.
- La tension à gauche notée $\vec{T}(x)$ s'appliquant au point d'abscisse x et tangente à la chaînette
- La tension à droite notée $\vec{T}(x + dx)$ s'appliquant au point d'abscisse $x + dx$ et tangente à la chaînette



En physique, le principe fondamental de la mécanique permet d'affirmer qu'à l'équilibre, la somme des forces appliquées à un système est nulle ce qui permet d'écrire :

$$\vec{\mathrm{P}} + \vec{\mathrm{T}}(x) + \vec{\mathrm{T}}(x + dx) = \vec{0}$$

Avec $\vec{\mathrm{T}}(x) = -T_h(x)\vec{\imath} - T_v(x)\vec{\jmath}$ et $\vec{\mathrm{T}}(x + dx) = -T_h(x + dx)\vec{\imath} - T_v(x + dx)\vec{\jmath}$

T_h et T_v étant respectivement les composantes horizontales et verticales de $\vec{\mathrm{T}}(x)$.

On obtient donc :

$$\begin{cases} \textbf{(1)} \quad -\boldsymbol{T_h(x)} + \boldsymbol{T_h(x+dx)} = \boldsymbol{0} \\ \textbf{(2)} \quad -\boldsymbol{\mu.dl.g} - \boldsymbol{T_v(x)} + \boldsymbol{T_v(x+dx)} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

A partir de l'équation (1) on obtient :

(1) $\quad -T_h(x) + T_h(x+dx) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{-T_h(x) + T_h(x+dx)}{x+dx-x} = 0$ (avec $dx \neq 0$)

$\Rightarrow \quad \frac{T_h(x+dx) - T_h(x)}{x+dx-x} = 0$

Or $\lim\limits_{dx \to 0} \frac{T_h(x+dx) - T_h(x)}{x+dx-x} = T'_h(x)$

Donc $\quad T'_h(x) = 0$, ce qui implique que T_h est une fonction constante

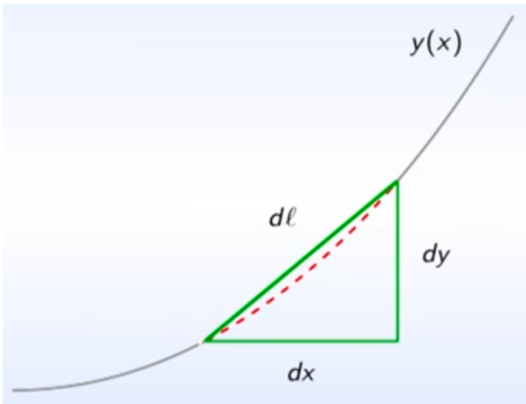
⇨ La tension horizontale le long d'un câble est indépendante de sa position horizontale c'est à dire que pour tout x, on a $T_h(x) = T_h$

A partir de l'équation (2) on obtient :

(2) $\quad -\mu.dl.g - T_v(x) + T_v(x+dx) = 0$

Donc $\quad \mu.dl.g = -T_v(x) + T_v(x+dx)$

Donc $\quad \frac{T_v(x+dx) - T_v(x)}{dx} = \frac{\mu.dl.g}{dx}$ $\qquad$ (2_{bis})



Soit M $(x, y(x))$ un point de la chaînette
On considère que chaque petit morceau de la chaînette peut être considéré comme rectiligne.

D'après le théorème de Pythagore on a :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 \quad \Rightarrow \quad dl^2 = dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \quad \Rightarrow \quad dl = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Donc $\qquad \boldsymbol{\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$

En reprenant (2_{bis})

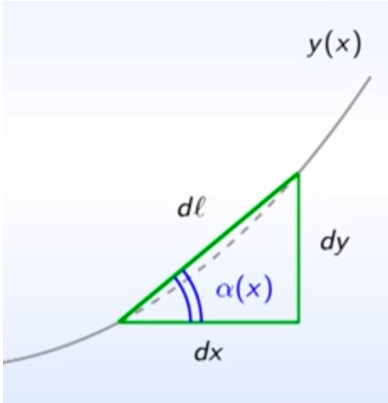
$$\frac{T_v(x+dx) - T_v(x)}{dx} = \mu g.\frac{dl}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\frac{T_v(x+dx) - T_v(x)}{dx} = \mu g.\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

On a $\lim_{dx \to 0} \frac{T_v(x+dx)-T_v(x)}{dx} = T'_v(x)$

et $\lim_{dx \to 0} \frac{dy}{dx} = y'(x)$

donc $\boldsymbol{T'_v(x) = \mu g. \sqrt{1+y'(x)^2}}$

C'est une équation différentielle entre la dérivée de la Tension verticale, $T'_v(x)$ et la dérivée de l'équation de la chaînette , $y'(x)$.



En notant $\alpha(x)$ l'angle représenté sur le schéma ci-contre.

On a : $T_h(x) = T(x).\cos(\alpha(x))$
et : $T_v(x) = T(x).\sin(\alpha(x))$

donc $\boldsymbol{T_v(x) = T_h(x).\tan(\alpha(x))}$ **(3)**

mais on a aussi

$$\boldsymbol{\tan(\alpha(x)) = \frac{dy}{dx} = y'(x)} \qquad \textbf{(4)}$$

Des équations (3) et (4) on obtient :

$\boldsymbol{T_v(x) = T_h(x).y'(x)}$ or on a vu que T_h est une fonction constante.

Donc en dérivant cette équation :

$T'_v(x) = T_h(x).y''(x)$ avec également $T'_v(x) = \mu g. \sqrt{1+y'(x)^2}$

Donc

$\boldsymbol{\mu g. \sqrt{1+y'(x)^2} = T_h.y''(x)}$

On peut poser $k = \frac{T_h}{\mu g}$ et $z(x) = y'(x)$ et obtient alors

$\sqrt{1+z(x)^2} = k.z'(x)$

Cette équation est une équation différentielle du 1er ordre que l'on peut aussi écrire :

$$\boldsymbol{\frac{z'(x)}{\sqrt{1+z(x)^2}} = \frac{1}{k}} \qquad (5)$$

Une primitive de $\frac{z'(x)}{\sqrt{1+z(x)^2}}$ est $argsh\,(z(x))$

donc en faisant la primitive dans chaque membre de l'égalité (5) , on obtient :

$\boldsymbol{argsh\,(z(x)) = \frac{x}{k} + C_1}$ où C_1 est une constante d'intégration.

Donc

$$\boldsymbol{z(x) = sh\left(\frac{x}{k} + C_1\right) = y'(x)}$$

En intégrant membre à membre cette équation on a :

$$\boldsymbol{y(x) = k.ch\left(\frac{x}{k} + C_1\right) + C_2} \quad (6)$$ où C_2 est une 2ème constante d'intégration.

On choisit un repère tel que le point le plus bas de la chaînette ait pour coordonnées (0, k). La tangente en ce point est horizontale donc $y'(0) = 0$ d'où :

D'après (6), $y(0) = k.ch(C_1) + C_2 = k$

et $y'(0) = sh(C_1) = 0$

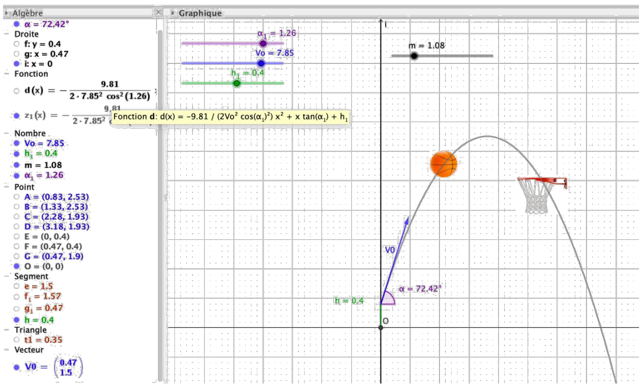
Donc $C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k.ch(0) + C_2 = k \Leftrightarrow C_2 = 0$

L'équation (6) devient alors

$$\boldsymbol{y(x) = k.ch\left(\frac{x}{k}\right)}$$

5. Reinvestissements possibles

En classe de 3eme – sur l'introduction aux fonctions



Nous avions vu qu'avec Geogebra, nous pouvions sensibiliser les élèves de collège à la variation de la trajectoire en fonction de paramètres.
(L'altitude varie en fonction de position au sol)

Nous pourrions donc avoir préparé le fichier Geogebra en annexe et donner l'énoncé suivant :

A l'INSEP (**I**nstitut **N**ational du **S**port et de l'**É**ducation **P**hysique), des bio mécaniciens étudient le shoot au lancer franc d'un célèbre basketteur. Les caractéristiques du « shoot » (lancer)sont les suivantes :

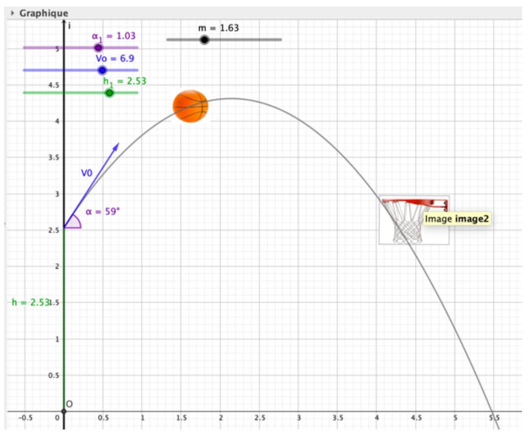
- Trajectoire parabolique avec angle de tir $\alpha = 59°$,
- Vitesse initiale $V_0 = 6{,}9\ m/s$,
- Hauteur du centre de la balle au moment du lâcher $h = 2{,}53\ m$.

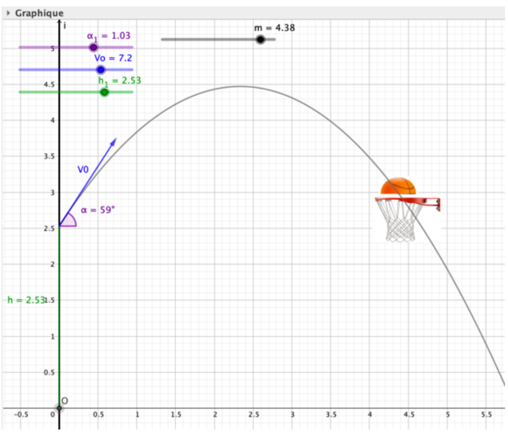
Un terrain de basket-ball est long de 28,0 m et large de 15,0 m. La ligne de lancer franc est situé à 4,40 m de la verticale du panier. Le panier est situé à une hauteur approximative de 3m du sol.

1. Le panier est-il rentré ?
2. Si non, à quelle vitesse doit-il faire son lancer pour réussir son lancer franc ?

Avec le fichier Géogebra en annexe il est possible
- de rentrer les paramètres
- de changer la position du panier (abscisse 4,4m, ordonnée 3m)

Pour la question **1.** l'élève se rend compte que le panier ne rentre pas.





Pour la question **2.** l'élève peut choisir une vitesse plus grande de 7,2 m/s par exemple.

EN CLASSE DE TERMINALE - PREPARATION DU BACCALAUREAT

L'année dernière un des exercices du Baccalauréat Terminale S est tombé sur l'étude d'une fonction dont la courbe représentative est appelée chaînette

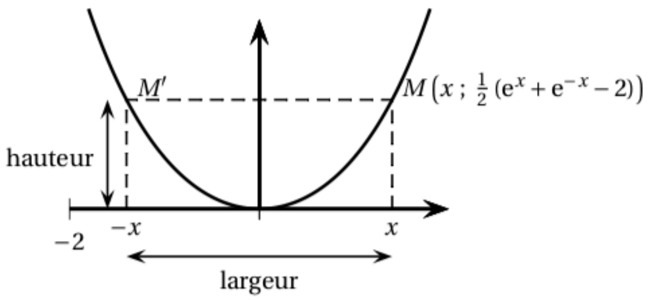
Baccalauréat S Métropole–La Réunion 22 juin 2018

Exercice 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 2\right).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».
On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.
On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$(E) : e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2.$$

a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$.

c. En posant $X = e^x$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.

5. On considère l'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

```
Tant que b − a > 0,1 faire :
        m ← (a + b)/2
        Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
                b ← m
        Sinon :
                a ← m
        Fin Si
Fin Tant que
```

a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.

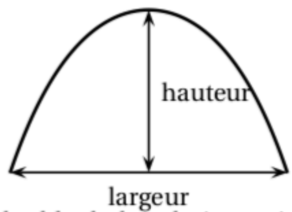
Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5			
…	…	…	

b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente?

6. La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre.
Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$(E') : e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch*.

Sans faire de cours sur les équations différentielles on peut se servir de cet exercice pour vérifier la formule trouvée au chapitre 4.

$\mu g.\sqrt{1 + y'(x)^2} = T_h.y''(x)$ qu'on peut simplifier par $\sqrt{1 + y'(x)^2} = y''(x)$

En effet si $y(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) - 1$

alors $y'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

et $y''(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

$$\left(y'(x)\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})\right]^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = \left(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}\right)$$

$$1 + \left(y'(x)\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x} = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \left[\frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})\right]^2$$

Donc

$$\sqrt{1 + y'(x)^2} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})\right]^2} = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$$

Cela permet à des élèves de Terminale de travailler les notions de dérivées multiples de la fonction exponentielle.

Bibliographie sitographie :

Sur les épaules des géants - Les plus grands textes de physique et d'astronomie
Stephen Hawking

Livre physique-chimie collection Dulaurans Durupty.

http://serge.mehl.free.fr/anx/catena.html

https://www.40tude.fr/blog/chainette/

http://www.sciences.ch/htmlfr/ingenierie/geniecivil01.php

http://math.univ-lille1.fr/~bodin/geometrie/ch_chainette.pdf

http://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/leibniz-analyse-25.pdf

https://fr.wikipedia.org/wiki/Cha%C3%AEnette