Chapitre 3. Formes linéaires, espace dual, bidual

Exercice 40. (Sous-espace annulateur)
On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^5$. Déterminer l'orthogonal (l'annulateur) F° dans $E^\star$ du sous-espace vectoriel $F = \text{vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, avec

$$v_1 = (1, 3, -2, 2, 3), \;\; v_2 = (1, 4, -3, 4, 2), \;\; v_3 = (2, 3, -1, -2, 9).$$

Exercice 41. (Exemples de formes linéaires)

1. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $\psi : E \to E, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t, x \in [0, 1], f \in E$, est un endomorphisme de E.
2. Soit $f_0 \in E$ fixé. Montrer que l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}, \varphi(f) = \int_0^1 f_0(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur E.
3. Montrer que $\delta : E \to \mathbb{R},\ \delta(f) = f(0), f \in E$ est une forme linéaire (fonctionnelle de Dirac).

Exercice 42. (Transposée de l'inverse)
Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On note ${}^t f$ la transposée de f. Vérifier que

1. La transposition est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F^\star, E^\star)$.
2. Si f est bijective, alors ${}^t f$ est aussi bijective et nous avons l'égalité
$${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}.$$

Exercice 43. (Matrice de la transposée)
Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\{e_1, ..., e_n\}, \{f_1, ..., f_m\}$ des bases dans E et F respectivement. On note $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \{\psi_1, ..., \psi_m\}$ leurs bases duales. On note $M(u)_{e,f}$ la matrice de l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ par rapport aux bases e, f. Montrer que

$$M({}^t u)_{\psi,\varphi} = {}^t M(u)_{e,f}.$$

En déduire les relations sur les matrices

$${}^t(AB) = {}^t B\, {}^t A, \;\; {}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}.$$

Exercice 44. (Base duale)
Soit la base de $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1, 1, ..., 1),\ e_2 = (0, 1, ..., 1),\ \dots, e_n = (0, 0, ..., 0, 1).$$

Déterminer la base de $(\mathbb{R}^n)^\star$, duale de celle-ci.

Exercice 45.
On considère les trois formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$

$$\varphi_1(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3, \;\; \varphi_2(x) = 3x_1 - 5x_2 + x_3, \;\; \varphi_3(x) = 4x_1 - 7x_2 + x_3.$$

Forment-elles une base du dual de $\mathbb{R}^3$? Déterminer les éventuelles relations linéaires.

Exercice 46.
Montrer que les formes linéaires

$$\varphi_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3, \;\; \varphi_2(x) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, \;\; \varphi_3(x) = 3x_1 + 7x_2 + x_3$$

forment une base de $(\mathbb{R}^3)^\star$. Déterminer la base duale de celle-ci (dans $\mathbb{R}^3$).

Chapitre 4. Formes bilinéaires, formes quadratiques

Exercice 47. (Matrice d'une forme bilinéaire)
Soit la forme bilinéaire $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par

$$b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

1. Ecrire la matrice de b dans la base canonique.
2. Ecrire la matrice de b dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ donnée par

$$v_1 = (1, 1, 1), \ \ v_2 = (0, 1, 1), \ \ v_3 = (0, 0, 1).$$

Exercice 48. (Forme polaire)
Déterminer la forme polaire de la forme quadratique $q : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ définie par

$$q(x) = 3(x_1)^2 - 2(1 + i)(x_2)^2 - 2ix_1x_2 + x_1x_3 + (5 - i)x_2x_3.$$

Ecrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 49.
Soit q une forme quadratique et s sa forme polaire. Montrer que

$$s(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y)), \ \ x, y \in E.$$

Exercice 50.
Montrer que l'application $q : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, définie par

$$q(P) = \int_0^1 P(x)P''(x)\,\mathrm{d}x, \ \ P \in \mathbb{R}[X]$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 51. (Représentation matricielle canonique d'une forme bilinéaire anti-symétrique)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\Omega : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire anti-symétrique, c'est-à-dire telle que $\Omega(x, x) = 0, x \in E$.

1. Montrer que $\Omega(x, y) + \Omega(y, x) = 0, x, y \in E$.
2. Montrer que si x, y sont liés, alors $\Omega(x, y) = 0$. En déduire que si $\dim E = 1$, alors $\Omega = 0$.
3. Soit $\dim E \geq 2$. Montrer qu'il existe deux vecteurs indépendants $u_1, u_2 \in E$ tels que $\Omega(u_1, u_2) = 1$.
4. On note $F = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$. Montrer que

$$M(\Omega|_F)_{\{u_1,u_2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Soit $W = F^\perp = \{w \in E \ : \ \Omega(x, w) = 0, \forall\, x \in F\}$. Montrer que $E = F \oplus W$.

6. En déduire le résultat suivant : Soit Ω une forme bilinéaire anti-symétrique sur un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Il existe alors une base $\{e_i\}$ telle que

$$M(\Omega)_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & . & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 52.
Soit q une forme quadratique non dégénérée et s sa forme polaire. Montrer que $s(x,z) = s(y,z)$ pour tout $z \in E$, implique $x = y$.

Exercice 53. (Vecteurs isotropes)
Déterminer les vecteurs isotropes des formes quadratiques $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivantes, et vérifier que $N(q) \subset I(q)$.

$$q(x) = (x_1)^2 + 3(x_2)^2 - 8(x_3)^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3$$

$$q(x) = (x_1)^2 + 2(x_2)^2 - 2(x_3)^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Exercice 54. (Déterminant)
Soit $q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, q(A) = \det(A), A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que q est une forme quadratique. Déterminer son rang, sa signature, une base orthogonale et les vecteurs isotropes.