Université de Sherbrooke
Faculté des sciences, Département de mathématiques

MAT 638 : Calcul Variationnel
Professeur: Frédéric Palesi

Examen final
Lundi 18 avril 2011, 9h00-12h00

Instructions

- Aucun document n'est autorisé.
- Les réponses doivent être justifiées et il sera tenu compte dans la correction de la rédaction et de la présentation des preuves.
- Les questions marquées **(***)** sont plus difficiles que les autres et sont hors-barême. N'hésitez pas à admettre le résultat et à passer aux questions suivantes (si il y en a).
- Cet examen est sur N points.

I– Exercice

I.A. **Exercice 1.** Déterminer les extrémales de la fonctionnelle

$$J[y] = \int_0^1 (\frac{y'^2}{2} + yy' + y' + y)dx$$

lorsqu'aucune condition au bord n'est fixée en $x = 0$ ou en $x = 1$.

I.B. **Exercice 2.** Soit la fonctionnelle :

$$J[q] = \int_0^\pi (q_1(q_1 + 3q_2') + q_2(q_2 - q_1') - 2t(q_1 + q_2))dt$$

Donner la forme générale des extrémales de J.

On fixe les conditions au bord en $t = 0$ aux valeurs $q_1(0) = 0$ et $q_2(0) = 2$. Déterminer $q_1(\pi)$ et $q_2(\pi)$

II– Les voyages du marchand

Un marchand itinérant se déplace dans le pays de Quance. Il sait que lorsqu'il suit un chemin donné par une fonction $y(x)$ entre les points (a, A) et (b, B), le bénéfice total qu'il en retire sera donné par la formule :

$$G[y] = \int_a^b (12xy - y'^2)dx$$

Evidemment le but du marchand est de suivre le chemin qui pourra maximiser ses gains.

II.A. **Chemins optimaux.** *Le marchand se trouve chez lui et veut se rendre au marché (Problème conditions au bord fixées)*

(1) Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle J
(2) Montrer que les solutions de l'équation d'Euler-Lagrange sont de la forme :

$$y(x) = -x^3 + px + q, \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

(3) Donner les extrémales de la fonctionnelle J parmi les fonctions telles que $y(-1) = 0$ et $y(2) = 3$.
(4) Montrer que pour tout $a, A, b, B \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$, il existe une unique extrémale de J telle que $y(a) = A$ et $y(b) = B$.

II.B. **Passage de la frontière.** *Le marchand veut se rendre à la frontière avec le Frébec toujours en maximisant ses gains le long du trajet jusqu'à la frontière.*

On cherche les extrémales de G sur l'espace des fonctions $y : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ telles que $y(-1) = 0$. La valeur $y(3)$ est libre.

(1) Ecrire la condition naturelle au bord satisfaite par une telle extrémale y.
(2) Déterminer les extrémales de ce problème.
(3) De l'autre coté de la droite $x = 3$, les gains sont donnés par $H[y] = 2G[y]$. On suppose maintenant que le marchand part du coté $x < 3$ de la frontière et veut se rendre en un point précis avec $x > 3$. On prends en considération les extrémales ayant un coin en $x = 3$. Donner les conditions de Weierstrass-Erdmann au passage de la frontière.

II.C. **Isopérimétrie.** *Le marchand ne peut pas trop s'éloigner du chemin entre chez lui et le marché*

On veut déterminer les extrémales de $G[y]$ soumis à la contrainte isopérimétrique

$$A[y] = \int_0^1 y dx = 0$$

et les conditions au bord $y(0) = y(1) = 0$.

(1) Montrer qu'une extrémale de ce problème n'est jamais une extrémale de A (pas d'extrémas rigides).
(2) Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange associée à ce problème isopérimétrique.
(3) Donner la forme générale d'une solution de ce problème (en fonction de 3 paramètres.)
(4) Donner les trois équations satisfaites par les paramètres.
(5) Résoudre ces équations pour déterminer eplicitement les extrémales de ce problème.

II.D. **Annexe.** Soit y une fonction de l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ y \in \mathcal{C}^1([0, 1]) \,\middle|\, y(0) = y(1) = 0 \right\}$$

(1) Montrer que J n'est pas minorée sur E. (Exhiber une suite de fonction y_n telle que $\lim J[y_n] = -\infty$.)
(2) Montrer que :

$$\int_0^1 12xy dx = -6 \int_0^1 x^2 y' dx$$

(3) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Rappel : $|\int(fg)| \leq \sqrt{\int f^2}\sqrt{\int g^2}$), montrer que :

$$\left| \int_0^1 x^2 y' dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\int_0^1 y'^2 dx}$$

(4) En déduire que pour tout $y \in E$, on a la majoration suivante:

$$J[y] \leq \frac{9}{5}$$

III– Mash-up

Les trois parties sont liées : chaque partie utilise le résultat final montré dans la partie précédente. Evidemment, vous pouvez admettre le résultat d'une partie et passer à la suivante si vous ne parvenez pas au résultat.

III.A. **Fonctionnelles.** Soit E un espace vectoriel normé. Soient J et K des fonctionnelles définies sur un espace $\mathcal{S} \subset E$ avec un espace de variations admissibles $\mathcal{H} \subset E$ qui est un espace vectoriel.

Soit $z \in \mathcal{S}$ un point non-stationnaire de K tel que $K[z] = 0$. On pose également $h \in \mathcal{H}$ tel que $\delta K_z[h] = 0$.

(1) Justifier qu'il existe $\eta \in \mathcal{H}$ telle que $\delta K_z[\eta] \neq 0$.
On fixe un tel η pour le reste du problème.

(2) En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer qu'il existe une fonction $\phi(t)$ définie sur un intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$ avec $\phi(0) = 0$ et

$$K[z + \phi(t)\eta + t\,h] = 0, \qquad \forall |t| \leq \epsilon$$

(3) Justifier que $\phi'(0) = 0$.

(4) Posons $y_t = z + \phi(t)\eta + t\,h$ (en particulier, $y_0 = z$). Montrer que

$$\lim_{t=0} \frac{(y_t) - z}{t} = h$$

(5) Soit la fonction définie sur $[-\epsilon, \epsilon]$ par $f(t) = J[y_t]$. Montrer que $f'(0) = \delta J_z[h]$.

(6) On suppose maintenant que z est un extrémum de J sur l'espace des fonctions $\{y \in \mathcal{S} \big| K[y] = 0\}$.
Montrer que $\delta J_z[h] = 0$.

III.B. **Isopérimétrie et conditions au bord naturelles.** Dans la partie précédente on a montré :

Théorème 1. *Si y est un extrémum de J sous la contrainte $K[y] = 0$ et y n'est pas une extrémale de K. Alors pour tout $h \in \mathcal{H}$ on a la propriété*

$$(\delta K_y[h] = 0) \qquad \Longrightarrow \qquad (\delta J_y[h] = 0)$$

Maintenant posons

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx, \text{ et } K[y] = \int_a^b G(x, y, y')dx$$

Et notons

$$\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{C}^1([a,b]) \,|\, y(a) = A\}$$
$$\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{C}^1([a,b]) \,|\, h(a) = 0\}$$

On a donc ici un problème avec une condition au bord fixée en $x = a$ d'un coté. De l'autre coté le point est libre de se déplacer le long de la droite $x = b$.

Soit $z \in \mathcal{S}$ un extrémum de J sous la contrainte $K[z] = 0$ et qui n'est pas une extrémale de K.

(1) Exprimer les variations totales $\delta J_z[h]$ et $\delta K_z[h]$ en faisant apparaitre $h(b)$.

(2) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que y satisfait l'équation d'Euler-Lagrange associée à $E = F + \lambda G$.

$$\frac{\partial E}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial E}{\partial y'} = 0$$

(3) En déduire que pour ce même lambda, on a la condition naturelle au bord :

$$\left.\frac{\partial E}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0$$

III.C. **Application.** Dans la partie précédente on a montré le Théorème suivant :

Théorème 2. *Soit y un extrémum du problème isopérimétrique posé en III.B qui n'est pas une extrémale de K. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que y satisfait :*

$$(1) \qquad \frac{\partial E}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial E}{\partial y'}\right) = 0$$

$$(2) \qquad \left.\frac{\partial E}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0$$

avec $E = F + \lambda G$

Posons

$$J[y]=\int_0^1 y'^2dx \qquad K[y]=\int_0^1 y^2dx=1$$

Donner les extrémales du problème isopérimétrique avec $y(0)=0$ et valeur en $x=1$ est libre.

IV– Conditions naturelles au bord

On considère J une fonctionnelle de la forme suivante :

$$J[y]=\int_0^1 G(x,y,y'')dx$$

Définie sur l'ensemble des fonctions $y\in\mathcal{C}^2([0,1])$. (Attention, y'' est bien la dérivée seconde de y). G est une fontion de classe $\mathcal{C}^2$ en les trois variables x,y et y''.

Vous n'avez besoin d'aucune connaissance préliminaire dans ce type de généralisation, le but de cet exercice est de retrouver naturellement les conditions necessaires pour qu'une fonction y soit un extrémum de J.

A - Montrer que pour tout $y,h\in\mathcal{C}^2([0,1])$ la variation de Gateaux de la fonctionnelle est donnée par :

$$\delta J_y[h]=\int_0^1\left(\frac{\partial G}{\partial y}h(x)+\frac{\partial G}{\partial y''}h''(x)\right)dx$$

B - On fixe les conditions au bord $y(0)=A$, $y(1)=B$, $y'(0)=A'$ et $y'(1)=B'$.

(1) Donner l'ensemble des variations admissibles pour ce problème.
(2) Montrer que si y est une extrémale de J satisfaisant les conditions au bord alors y satisfait l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial G}{\partial y''}\right)=0$$

C - On ne fixe les conditions au bord que pour $x=0$, c'est à dire $y(0)=A$ et $y'(0)=B$. Les valeurs $y(1)$ et $y'(1)$ sont libres.

(1) Donner l'ensemble des variations admissibles dans ce cas.
(2) Exprimer la variation de Gateaux $\delta J_y[h]$ en fonction de $h(1)$ et $h'(1)$.
(3) Montrer que si y est une extrémale de J satisfaisant les conditions au bord alors y satisfait d'une part l'équation d'Euler-Lagrange et d'autre part les conditions au bord naturelles :

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y''}\right|_{x=1}=0, \qquad \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y''}\right)\right|_{x=1}=0$$

D - On prends la fonctionnelle

$$J[y]=\int_0^1(y'^2-48y)dx$$

(1) Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange dans ce cas.
(2) Donner la forme générale des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange.
(3) Déterminer les extrémales du problème quand on fixe $y(0)=y(1)=y'(0)=y'(1)=0$
(4) Déterminer les extrémales du problème quand on fixe seulement $y(0)=y'(0)=0$.
(5) Déterminer les extrémales du problème quand on fixe seulement $y(0)=y(1)=0$