Exercices de Révision

(1) Etudier les extrémales du problème suivant :

$$J[y] = \int_{-1}^{1} x^4 y'^2 dx, \qquad y(-1) = -1,\ y(1) = 1$$

Solution : L'équation d'Euler-Lagrange est

$$x^4 y' = C, \text{ avec C } \in \mathbb{R}$$

Pour $x = 0$ on en déduit que $C = 0$. Donc $y' = 0$ et $y = \underline{constante}$. Or les conditions au bord montrent que y ne peut pas être constante. $\boxed{\text{Il n'y a donc pas d'extrémales.}}$

Remarque : la fonction $y = 1/x^3$ ne peut pas être une extrémale puisqu'elle n'est pas continue (contrairement à ce que j'ai pu dire mardi ...)

(2) Donner la forme générale des extrémales de :

$$J[y] = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + y'^2} dx$$

Résoudre ensuite les cas $f(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = 1/x$.

Solution : La fonction dans l'intégrale ne dépend pas de y on utilise donc l'intégrale première :

$$f(x)\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \Leftrightarrow y' = \frac{C^2}{\sqrt{f(x)^2 - C^2}}$$

La forme générale des solutions est donc donnée par

$$\boxed{y(x) = \int_a^x \frac{C^2 dt}{\sqrt{f(x)^2 - C^2}} + k}$$

Pour $f(x) = \sqrt{x}$ on trouve $\boxed{y(x) = C^2\sqrt{x - C^2}}$

Pour $f(x) = 1/x$ on trouve $\boxed{y(x) = -\sqrt{1 - C^2 x^2}}$

(3) Etudier les extrémales de

$$J[y] = \int_2^3 y^2(1 - y')^2 dx, \qquad y(2) = 1,\ y(3) = \sqrt{3}$$

La fonction F ne dépend pas de x donc on utilise l'intégrale première qui devient après simplifications et séparation des variables :

$$H(y, y') = y^2(y'^2 - 1) = C \Leftrightarrow dx = \frac{y}{\sqrt{C^2 + y^2}} dy$$

On en déduit

$$\boxed{y(x) = \sqrt{(x - k)^2 - C^2}}$$

Les conditions au bord nous donnent : $k = 3$ et $C = 0$.

(4) Sur les fonctions $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ on pose $\theta = \theta(t, \mathbf{q})$ une fonction lisse de $n+1$ variables. Soit la fonction suivante

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial q_k} q_k'$$

Montrer que toute fonction $\mathbf{q}$ satisfait les équations d'Euler-Lagrange associée à $J[y] = \int_a^b L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt$.

Solution : Il faut utiliser la formule générale (à connaître)

$$\frac{d}{dt}(W(f_1(t), \ldots, f_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i} f_i'(t)$$

Ici on calcule pour tout $1 \leq i \leq n$, par linéarité de la dérivée

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \theta}{\partial q_k} q_k' \right)$$

D'autre part on a

$$\frac{\partial L}{\partial q_i'} = \frac{\partial}{\partial q_i'} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial q_i'} \left(\frac{\partial \theta}{\partial q_k} q_k' \right) \right)$$

Comme θ ne dépend pas de q_i', et ses dérivées partielles non plus, le seul terme qui dépend de q_i' est le i-eme terme de la somme. Le seul terme restant est

$$\frac{\partial L}{\partial q_i'} = \frac{\partial \theta}{\partial q_i}$$

Il est maintenant facile de calculer en utilisant la formule rappelée plus haut :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \theta}{\partial q_k} q_k'$$

Il est maintenant apparent que pour toute fonction $\mathbf{q}$ et pour tout i les équations d'Euler-Lagrange sont satisfaites, c'est à dire :

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'}}$$

(5) Sur les fonctions $\mathbf{q}(t) = (x(t), y(t))$ déteminer la forme des extrémales de

$$J[\mathbf{q}] = \int_a^b F(x', y') dx$$

sachant que la fonction F satisfait la relation suivante

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} \right)^2 \neq 0$$

Solution On écrit les deux équations d'Euler-Lagrange (en remarquant que F ne dépend pas de x ni de y)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial x'} = 0 & = \dfrac{\partial F}{\partial x'}\dfrac{\partial F}{\partial x'}x'' + \dfrac{\partial F}{\partial y'}\dfrac{\partial F}{\partial x'}y'' \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0 & = \dfrac{\partial F}{\partial x'}\dfrac{\partial F}{\partial y'}x'' + \dfrac{\partial F}{\partial y'}\dfrac{\partial F}{\partial y'}y'' \end{cases}$$

Pour tout t on a une équation linaire en x'', y'' que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La condition donnée par l'énoncé nous dit que le déterminant de la matrice est nul. Donc la seule solution de ce système linéaire est $x'' = y'' = 0$. Les solutions des équations d'Euler-Lagrange sont donc données par

$$\boxed{x(t) = At + B, \qquad y(t) = Ct + D}$$

Les extrémales sont donc les droites affines.

(6) Ecrire la variation totale d'une fonctionnelle de la forme :

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y'')$$

(Attention, c'est bien la dérivée seconde y'' qui apparait) où les points extrémaux sont libres de bouger sur les droites $x = a$ et $x = b$. En déduire l'équation d'Euler-Lagrange associée et les conditions naturelles au bord qui apparaissent lorsqu'aucune condition n'est fixée au départ

Solution : On revient à la définition de la variation de J. On retrouve pour $y, h \in \mathcal{C}^1([a, b])$

$$\delta J_y[h] = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F}{\partial y''} h''(x) \right) dx$$

En effectuant deux intégrations par partie succéssives on obtient

$$\boxed{\delta J_y[h] = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right) h(x) dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y''} h'\right]_a^b - \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) h\right]_a^b}$$

L'équation d'Euler-Lagrange est donc

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0}$$

Les conditions naturelles au bord qui apparaissent sont donc les quatres équations

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x=b} = \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right|_{x=b} = 0}$$

(7) Utiliser l'exercice précédent pour étudier la fonctionnelle

$$J[y] = \int_0^1 ((y'')^2 - py)dx$$

avec les conditions au bord

- $y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$
- $y(0) = y'(0) = 0$
- $y(0) = y(1) = 0$

(Attention : j'ai remplacé $p(x)$ par une constante p pour simplifier)

Solution : Ici l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$p - 2y^{(4)} = 0$$

La forme générale des extrémales est donc donnée par

$$\boxed{y(x) = px^4/48 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x_1 + c_0}$$

- les conditions au bord de l'énoncé donnent

$$\boxed{c_0 = 0, c_1 = 0, p/48 + c_3 + c_2 = 0, p/12 + 3c_3 + 2c_2 = 0}$$

  il n'y a pas de condition naturelle. Le système se résout directement
- les conditions au bord donnent $c_0 = 0$ et $c_1 = 0$. Les autres conditions sont les conditions naturelles au bord :

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x=1} = 2y''(1) = 0 \Leftrightarrow p/4 + 6c_3 + 2c_2 = 0$$

$$\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right|_{x=1} = 2y^{(3)}(1) = 0 \Leftrightarrow p/2 + 6c_3 = 0$$

- les conditions au bord donnent $c_0 = 0$ et $p/48 + c_3 + c_2 + c_1 = 0$. Les autres conditions sont les conditions naturelles au bord :

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x=0} = 2y''(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x=1} = 2y''(1) = 0 \Leftrightarrow p/4 + 6c_3 = 0$$

(8) Etant donné deux points du plan relié par une courbe γ, déterminer les courbes de longueur L telle que l'aire encerclée par la courbe et γ soit maximale.

Solution : On supposera que γ est donnée par une fonction $\phi(x)$. Dans ce cas, $\boxed{\text{les extrémales du problème sont exactement les mêmes que sans la courbe } \gamma}$, c'est à dire des arcs de cercles. Un moyen facile de le voir est de dire que l'aire entre les deux courbes est égale à l'aire entre $\phi(x)$ et la droite reliant A et B (qui est donc constante) plus l'aire entre la droite et l'extrémale $y(x)$ (qui correspond au problème déjà rencontré).

(9) Soit une fonctionnelle de la forme

$$J[y] = \int_0^{x_1} f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\, e^{\arctan(y')}dx$$

où le point x_1, y_1 se trouve sur la courbe $\phi(x)$. Montrer que la condition de transversalité en x_1 se réduit à la condition que les deux courbes $y(x)$ et $\phi(x)$ s'intersectent en un angle de $\pi/4$.

Solution : Remarquez qu'on ne demande pas de déterminer la forme des extrémales. (Heureusement)

La condition de transversalité est donnée par

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(\phi' - y') + F\right)\bigg|_{x=x_1} = 0$$

Ici la dérivée seconde est donnée par

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = f(x,y)\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}e^{\arctan(y')} + \sqrt{1+y'^2}\frac{e^{arctan(y')}}{1+y'^2}\right) = f(x,y)\frac{y'+1}{\sqrt{1+y'^2}}e^{\arctan(y')}$$

La condition de transversalité est donc

$$f(x,y)e^{\arctan(y')}\left(\frac{(y'+1)(\phi'-y')}{\sqrt{1+y'^2}} + \sqrt{1+y'^2}\right)\bigg|_{x=x_1} = 0$$

Ce qui est équivalent à (en admettant $f(x,y) \neq 0$) :

$$\boxed{1 + y'(x_1)\phi'(x_1) = y'(x_1) - \phi'(x_1)}$$

En notation vectorielle on trouve :

$$\boxed{\langle(1,y'),(1,\phi')\rangle = \langle(1,y'),(-\phi',1)\rangle}$$

Comme toujours $(1, y')$ est un vecteur tangent à y, et $(1, \phi')$ est un vecteur tangent à ϕ. Le vecteur $(-\phi', 1)$ correspond à un vecteur orthogonal à ϕ. En traduisant en terme d'angle, cela veut dire que le vecteur tangent à y réalise le même angle avec la tangente à ϕ et la normale à ϕ. Cela veut exactement dire que l'angle entre y et ϕ est de $\pi/4$.

(10) Montrer que la fonctionnelle

$$\int_a^b (ay'^2 + byy' + cy^2)dx, \qquad y(a) = A,\, y(b) = B$$

ne peut pas avoir d'extrémas brisés lorsque $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

Supposons que y est un extréma brisé avec un coin en $x = c$. Une des conditions de Weierstrass-Erdmann donne :

$$2ay'(c-0) + by(c-0) = 2ay'(c+0) + by(c+0)$$

Or la fonction y est continue donc $y(c-0) = y(c+0)$. Comme a est non nul on en déduit immédiatement

$$\boxed{y'(c-0) = y'(c+0)}$$

C'est à dire que la dérivée y' est continue en $x = c$ ce qui contredit l'hypothèse que y a un coin en $x = c$.

(11) Caténaire sur un cylindre. Soit la fonctionnelle

$$J[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} z\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$$

et la contrainte holonomique $g(\mathbf{q}) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Trouver la forme des extrémales de J sous la contrainte holonomique, et des conditions au bord fixées.

Solution : N'essayez pas de faire cet exercice avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, les calculs sont complètement inintéressants ... Je pense qu'il y a une erreur dans l'énoncé du livre dans lequel j'ai pris l'exercice.

(12) Exprimer les condition de transversalité pour la fonctionnelle correspondant à la distance entre deux surfaces $z = \phi(x, y)$ et $z = \psi(x, y)$.

Solution : On peut écrire la variation totale pour un fonctionnelle de la forme

$$J[q] = \int_a^b L(z, q, \dot{q}) dz$$

avec $q(z) = (x(z), y(z))$. Pour une variation $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, on a les termes δx_i, δy_i et δz_i qui apparaissent. Ici on a donc

$$\begin{aligned} \delta J_q[\eta] = & \int_a^b \left(\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial x'} \right) \eta_1(z) + \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \eta_2(z) \right) dz \\ & + \left[\frac{\partial L}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y + \left(L - \frac{\partial L}{\partial x'} x' - \frac{\partial L}{\partial y'} y' \right) \delta z \right]_{z=a}^{z=b} \end{aligned}$$

Si le point $z = a$ doit se trouver sur la surface $\phi(x, y)$ alors on a

$$\phi(x_a + \delta x_a, y_a + \delta y_a) = z_a + \delta z_a$$

A l'ordre 1 on obtient donc

$$\delta z_a = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{z=a} \delta x_a + \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{z=a} \delta y_a$$

On en déduit les conditions de transversalité en toute généralité (On a deux conditions pour chaque extrémité puisqu'on peut faire varier δx et δy indépendemment). En prenant le cas particulier de

$$L(z, q, \dot{q}) = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}$$

Les conditions de transversalité s'écrivent alors :

$$\boxed{x' + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_a = y' + \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_a = 0}$$

$$\boxed{x' + \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_b = y' + \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_b = 0}$$

Géométriquement, cela veut dire que en x_0 le vecteur (x', y') qui est le vecteur tangent à la courbe q, est parallèle au vecteur $(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y})$ qui est le gradient de ϕ. Le vecteur gradient est le vecteur normal à la surface définie par ϕ. Donc $\boxed{\text{au point } x_0 \text{ l'extrémale } q \text{ est orthogonale à la surface } z = \phi(x, y)}$.

Remarque : Cet exercice est particulièment dur, ne vous alarmez pas si vous n'arrivez pas à le faire. Il n'y aura rien d'aussi dur dans l'examen ...

(13) On considère la fonctionnelle

$$J[\mathbf{q}] = \int_0^{t_1} (q_1'^2 + q_2'^2 + 2q_1q_2)dt$$

avec les conditions $\mathbf{q}(0) = (0, 0)$ et $t_1 = q_1(t_1)$. Déterminer la forme des extrémales de J et déterminer les équations implicites satisfaites par les paramètres.

Solution Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$2q_2 - 2q_1'' = 0$$
$$2q_1 - 2q_2'' = 0$$

La première équation nous donne $q_2 = q_1''$ et en remplacant dans la deuxième équation on a

$$q_1 - q_1^{(4)} = 0$$

Cette équation différentielle est linéaire à coefficients constants, il suffit de résoudre l'équation caratéristique :

$$X^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow X \in \{1, -1, i, -i\}$$

Les racines positives donnent des exponentielles (que l'on peut exprimer comme des cosinus hyperboliques quand les deux racines réelles sont opposées, comme ce'est le cas ici). Les racines imaginaires pures donnent des cosinus et des sinus. La forme générale des solutions de cet équa diff est donc

$$\boxed{q_1(t) = A\cosh(t) + B\sinh(t) + C\cos(t) + D\sin(t)}$$

On peut également écrire q_2 en remplacant par q_1''. On retrouve :

$$q_2(t) = A\cosh(t) + B\sinh(t) - C\cos(t) - D\sin(t)$$

Utilisons maintenant les conditions au bord

$$q_1(0) = 0 \Leftrightarrow A + C = 0$$
$$q_2(0) = 0 \Leftrightarrow A - C = 0$$

Ces deux conditions nous donnent donc $A = C = 0$.

La condition sur q_1 nous dit que le point final doit se trouver sur la surface définie par $\phi(q_1, q_2) = q_1$. En écrivant la variation totale, on voit que δq_2 est libre de bouger indépendemment des autres variations. La condition de transversalité correspondante se traduit par

$$\left.\frac{\partial F}{\partial q_2}\right|_{t_1} = 2q_1(t_1) = 0$$

On en déduit que $t_1 = 0$ et donc que la seule extrémale du problème est une extrémale triviale réduite à un point.

(14) Modèle de Ramsey pour la croissance économique. Le *produit total* (terme d'économie) sur une période de temps T est donné par

$$\mathcal{J}[M] = \int_0^T c_1(c_2M(t) - M'(t) - c_3)^2 dt$$

où $M(t)$ représente l'investissement en capital au temps t (ce qui a surement un sens pour les économistes) et les c_i sont des constantes. L'idée est de trouver la meilleure utilisation du capital sur la période T (on veut trouver le maximum de J).

Utiliser les conditions au bord naturelles pour déterminer le capital final $M(T)$.
Solution : Je n'ai pas précisé que $M(0) = M_0$ est donné au départ.
Les extrémales sont de la forme

$$M(t) = \frac{c_3}{c_2} + A\cosh(c_2 t) + B\sinh(c_2 t)$$

La condition $M(0) = M_0$ nous donne le paramètre $A = M_0 - c_3/c_2$. La condition naturelle au bord en $t = T$ est

$$\left.\frac{\partial F}{\partial M'}\right|_T = 0 = c_2 M(T) - M'(T) - c_3$$

On sait que $M'(t) = c_2 A\sinh(c_2 t) + c_2 B\cosh(c_2 t)$ donc on en déduit que la condition naturelle devient :

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial F}{\partial M'}\right|_T &= c_2\frac{c_3}{c_2} + c_2 A\cosh(c_2 t) + c_2 B\sinh(c_2 t) - c_2 A\sinh(c_2 t) + c_2 B\cosh(c_2 t) - c_3 \\ &= c_2(A - B)(\cosh(c_2 T) - \sinh(c_2 T))\end{aligned}$$

On sait que $\cosh(x) \neq \sinh(x)$ pour tout $x \neq 0$. On en déduit que $A = B$. Le capital final est donc donné par :

$$\boxed{M(T) = \frac{c_3}{c_2} + \left(M_0 - \frac{c_3}{c_2}\right)(e^{c_2 T})}$$

(Rappel : $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$)

(15) Soient J et K des fonctionnelles données par

$$J[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) dt, \qquad K[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} y^2 x' dt$$

Montrer que si q est une extrémale de J sous la contrainte $K[q] = L > 0$ alors ni $x(t)$, ni $y(t)$ ne sont identiquement nulle. Montrer de plus qu,il existe une constante Λ telle que

$$x = \Lambda(x^2 + y^2)^{3/2}$$