TRAVAUX DIRIGÉS DE STRUCTURES ALGÉBRIQUES

FRÉDÉRIC PALESI

Groupes

Exercice 1 (Loi de composition interne)**.**

(1) Sur $\mathbb{R}$, on définit la loi de composition interne $*$: $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x*y=x+y-xy$. Etudier les propriétés de la loi $*$.

(2) Sur $\mathbb{R}$, on définit la loi $\square$: $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\square y=kxy+k'(x+y)$, avec k et k' deux réels donnés. Déterminer (k,k') pour que $\square$ soit associative.

Exercice 2 (Sommes de carrés)**.**

Soit $E=\{p^2+q^2,(p,q)\in\mathbb{N}\}$.

(1) Montrer que la multiplication usuelle est une loi de composition interne sur E.

(2) $(E,\cdot)$ est-il un monoïde ? un groupe ?

Exercice 3 (Un groupe fini d'ordre 4)**.**

Soient les quatre applications de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$:

$$f_1(z)=z\ ,\ f_2(z)=\frac{1}{z}\ ,\ f_3(z)=-z\ ,\ f_4(z)=-\frac{1}{z}$$

Montrer que $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Exercice 4 (Exemples de groupes)**.**

Montrer que les lois suivantes munissent l'ensemble G indiqué d'une structure de groupe, et préciser s'il est abélien

(1) Sur $G=]-1,1[$, la loi $\star$: $(x\star y)=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

(2) Sur $G=\mathbb{R}^2$, la loi $\odot$: $(x,y)\odot(x',y')=(x+x',ye^{x'}+y'e^{x})$.

Exercice 5 (Tous les éléments sont réguliers)**.**

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne $\star$ associative. On suppose que tous les éléments de E sont réguliers, et on fixe $a\in E$.

(1) Démontrer qu'il existe $e\in E$ tel que $a\star e=a$.

(2) Démontrer que, pour tout $x\in E$, on a $e\star x=x$.

(3) Démontrer que, pour tout $x\in E$, on a $x\star e=x$.

(4) Démontrer que $(E,\star)$ est un groupe.

(5) Le résultat subsiste-t-il si E n'est pas fini ?

Date: January 23, 2014.

Exercice 6 (Exemples de sous-groupes).
Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-groupes de G.
(1) $Z(G) = \{x \in G | \forall y \in G, x \cdot y = y \cdot x\}$. ($Z(G)$ s'appelle le centre de G.)
(2) $aHa^{-1} = \{x \in G | \exists h \in H, x = a \cdot h \cdot a^{-1}\}$ avec H un sous-groupe de G.

Exercice 7 (Groupe produit).
Soit $(G, \star)$ et $(H, \square)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\circ$ définie par :
$$(x, y) \circ (x', y') = (x \star x', y \square y')$$
(1) Montrer que $(G \times H, \circ)$ est un groupe.
(2) Si G est d'ordre 2, dresser la table de $G \times G$.

Exercice 8 (Groupes de rotations du plan).
(1) Soit ABC un triangle équilatéral du plan. Déterminer l'ensemble des rotations laissant invariant $\{A, B, C\}$. Montrer que c'est un groupe pour la loi $\circ$.
(2) Faire de même pour un carré $ABCD$.

Exercice 9 (Translations surjectives).
Soit G un ensemble non-vide muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative telle que :
$$\forall a, b \in G, \exists x, y \in G \text{ tels que } a = x \cdot b = b \cdot y$$
Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 10 (Produit de deux sous-groupes).
Soit $(G, \cdot)$ un groupe et A, B deux sous-groupes. On note $A \cdot B = \{a \cdot b | a \in A, b \in B\}$.
(1) Montrer que $A \cdot B$ est un sous-groupe de G si et seulement si $A \cdot B = B \cdot A$.
(2) On suppose que A et B sont finis et que $A \cap B = \{e\}$. Montrer que $A \cdot B$ est fini et que $|A \cdot B| = |A| \times |B|$.

Exercice 11 (Image réciproque, image directe de sous-groupe).
Soient $(G, \cdot)$ et $(G', \cdot)$ des groupes et $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$.
(1) Montrer que si H' est un sous-groupe de G', alors $f^{-1}\{H'\}$ est un sous-groupe de G.
(2) Montrer que si H est un sous-groupe de G alors $f(H)$ est un sous-groupe de G'.
(3) Retrouver que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous-groupes de G et G'.

Exercice 12 (Un endomorphisme).
Soit le morphisme $\phi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par
$$\begin{aligned} \phi(f) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) + f(-x) \end{aligned}$$
(1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$.
(2) Déterminer son noyau et son image.

Exercice 13 (Loi Δ).
Soit E un ensemble et $G = \mathcal{P}(E) = \{A \subset E\}$ l'ensemble des parties de E. On rappelle que si $A, B \in G$, la différence symétrique est $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
(1) Montrer que (G, Δ) est un groupe commutatif.
(2) Pour $a \in E$ on définit $\phi_a : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\phi_a(X) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } a \notin X \\ 1 \text{ si } a \in X \end{array} \right.$.
Montrer que ϕ_a est un morphisme de groupes de (G, Δ) vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3) On prends $E = \{1, \ldots, n\}$ et on note

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \\ X &\longmapsto (\phi_1(X), \ldots, \phi_n(X)). \end{aligned}$$

Montrer que ϕ est un Isomorphisme de groupes

Exercice 14 (Endomorphismes d'ensembles de nombres)**.**

(1) Trouver tous les endomorphismes et les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.
(2) Trouver tous les endomorphismes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$.
(3) Trouver tous les endomorphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 15 (Vrai ou Faux)**.**

(1) Les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ sont infinis.
(2) Soit l'application

$$\begin{aligned} f : G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

 (a) f est un morphisme de groupe.
 (b) f est bijective.
 (c) $\{f^n | n \in \mathbb{Z}\}$ est un groupe fini.

(3) La réunion de deux sous-groupes n'est jamais un sous-groupe
(4) L'application

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +) &\longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ f &\longmapsto f(0) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupe ? l'application est-elle injective ?

Exercice 16 (Petit théorème de Lagrange)**.**

Soit $(G, \cdot)$ un groupe commutatif fini et $g \in G$. Montrer que l'ordre de g divise le cardinal de G. On pourra considérer $\prod_{h \in G}(gh)$.

Exercice 17 (Ordre d'un élément)**.**

(1) Soient G, H deux groupes et $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Soit $x \in G$. Comparer l'ordre de x et de $f(x)$.
(2) Soient $x, g \in G$. Comparer l'ordre de x et de gxg^{-1}.
(3) Soient $a, b \in G$. Comparer l'ordre de ab et de ba.

Exercice 18 (Ordre de ab)**.**

Soit $x, y \in G$ tels que x est d'ordre a et y est d'ordre b avec $a \wedge b = 1$. De plus $xy = yx$.

Déterminer l'ordre de ab.

Exercice 19 (Pas de sous-groupe)**.**

Soit G un groupe n'ayant pas de sous-groupe non-trivial.

(1) Montrer que G est monogène.
(2) Montrer que G est fini.
(3) Montrer que —G— est un nombre premier.

Exercice 20 (Groupe du pentagone).

On considère le groupe P du pentagone régulier, composé des 5 rotations d'angles $2k\pi/5$ avec $k = 0 \ldots 4$ et des cinq symétries par rapport aux droites joignant le centre à un sommet du pentagone.

(1) Dessiner le pentagone avec les axes de symétries.
(2) Trouver tous les sous-groupes de P
(3) Montrer que tous les sous-groupes sont cycliques.
(4) Est-ce que P est cyclique ?

Exercice 21 (Groupes de cardinal premier).

Soit p un nombre premier et G un groupe de cardinal p.

(1) Montrer que G est cyclique.
(2) En déduire que tous les groupes de cardinal p sont isomorphes.

Exercice 22 (Générateurs des groupes cycliques).

Soient $n \geq 2$ et $k \geq 1$. Montrer que les propriétés suivantes sotn équivalentes

(1) k est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
(2) k est inversible (pour la multiplication) dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
(3) n et k sont premiers entre eux.

Exercice 23 (Sous-groupes d'un groupe cyclique).

SOit $n \in \mathbb{N}^*$ et $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $d = \mathrm{pgcd}(k, n)$.

(1) Déterminer l'ordre de k dans G.
(2) Montrer que k et d engendrent le même sous-groupe de G.
(3) En déduire que pour tout diviseur d de n, il existe un unique sous-groupe C_d d'ordre d.
(4) Quels sont tous les sous-groupes de G ?

Exercice 24 (Groupe d'ordre pair et impair).

(1) Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2.
(2) Soit G un groupe fini de cardinal impair. Montrer que $\forall x \in G, \exists! y \in G, x = y^2$

Exercice 25 (Groupe de similitude).

Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on note $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \alpha z + \beta$.

(1) Montrer que l'ensemble des fonctions $f_{a,b}$ est un groupe pour la loi $\circ$.
(2) Ce groupe est-il commutatif
(3) A quelle(s) condition(s) sur α et β, l'élément $f_{\alpha,\beta}$ est-il d'ordre fini.

Exercice 26 (Groupes d'ordre 4).

Montrer qu'il n'existe que deux groupes d'ordre 4 à isomorphisme près. (Raisonner sur l'exposant du groupe)