Université d'Aix-Marseille 2012–2013

Introduction à l'Analyse

Corrigé du test de rentrée.

Exercice 1.

1. Initialisation : Si $a = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$ et si $n = 1$, alors $u_1 = a^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k$ est divisble par $4 = 2^{1+1}$. C'est donc vrai au rang $n = 1$.

Hérédité : supposons que cela soit vrai au rang n et montrons que c'est vrai au rang $n+1$. On a $u_{n+1} = a^{2^{n+1}} - 1 = (a^{2^n})^2 - 1 = (u_n+1)^2 - 1 = u_n^2 + 2u_n$. Comme par hypothèse de récurrence, $2^{n+1}|u_n$, il existe $v_n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^{n+1}v_n$, et nous obtenons alors que

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n = 2^{2n+2}v_n^2 + 2^{n+2}v_n = 2^{n+2}(2^n v_n^2 + v_n),$$

donc que $2^{n+2}|u_{n+1}$.

Nous avons donc bien prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $2^{n+1}|u_n$.

2. Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$ puisque $v_0 = 0$.

Hérédité : supposons que cela soit vrai au rang n et montrons que c'est vrai au rang $n+1$. On a

$$v_{n+1} = 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \times 4^n + 15n + 14.$$

Or $4^n = v_n - 15n + 1$, donc

$$v_{n+1} = 4(v_n - 15n + 1) + 15n + 14 = 4v_n - 60n + 4 + 15n + 14 = 4v_n - 45n + 18.$$

Comme par hypothèse de récurrence, $9|v_n$, il existe donc $w_n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n = 9w_n$, et nous obtenons alors que

$$v_{n+1} = 36w_n - 45n + 18 = 9(4w_n - 5n + 2)$$

donc que $9|v_{n+1}$.

Nous avons donc bien prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $9|v_n$.

Exercice 2.

1. Pour tout $x > 1$, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(x+1) - (x-1)} = \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = +\infty$$

car

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty.$$

2. Pour tout $x > 1$, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}} = \frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})} = \frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{(x^2+x)-(x^2-x)} =$$

$$= \frac{1}{2x}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right) = 1$$

car l'application $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Exercice 3.

1. C'est faux car la fonction sin oscille constamment entre -1 et 1 quand $x \to +\infty$.

2. Si on pose $X = \frac{1}{x}$, alors quand $x \to +\infty$, X tend vers 0. De plus

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin X}{X}$$

tend vers 1 lorsque $X \to 0$. Donc la proposition est vraie.

3. Posons $X = 3x$, alors quand $x \to 0$, $X \to 0$. On a alors

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{3 \sin X}{X}$$

et cela tend vers 3 quand $X \to 0$. La proposition est donc fausse.

4. Posons $X = \frac{\pi}{2} - x$. Nous avons

$$\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-X\right)}{X} = \frac{\sin X}{X}$$

et cela tend vers 1 car, quand $x \to \frac{\pi}{2}$, X tend vers 0. La proposition est donc vraie.

Exercice 4.

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc la limite demandée en $-\infty$ existe et vaut

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3e^{2x}-12}{e^{2x}-7e^x+10} = \frac{3\times 0-12}{0-7\times 0+10} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}.$$

Nous avons aussi, pour $x \in \mathbb{R}$ et en divisant par e^{2x} le haut et le bas de la fraction :

$$\frac{3e^{2x}-12}{e^{2x}-7e^x+10} = \frac{3-12e^{-2x}}{1-7e^{-x}+10e^{-2x}}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, la limite demandée en $+\infty$ existe et vaut

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3-12e^{-2x}}{1-7e^{-x}+10e^{-2x}} = \frac{3-12\times 0}{1-7\times 0+10\times 0} = 3.$$

Exercice 5.

1. Posons $X = e^x$. Nous avons

$$\frac{X}{X-1} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad X = 2X - 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2 = X$$

donc $x = \ln X = \ln 2$.

2. Le discriminant du trinôme $X^2 - 2X + 3$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 = -8$ donc le trinôme $X^2 - 2X + 3$ est strictement positif quand $X \in \mathbb{R}$. On en en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{e^{-3x}}{e^{2x} - 2e^x + 3} < 0,$$

et donc que l'équation proposée n'a pas de solution.

Exercice 6.

1. J_0 est l'aire du quart de disque de centre 0 et de rayon 1 donc vaut $\frac{\pi}{4}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a

$$x^{n+1} \leq x^n \qquad \Longrightarrow \qquad x^{n+1}\sqrt{1-x^2} \leq x^n\sqrt{1-x^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}dx \leq \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx \qquad \Longrightarrow \qquad J_{n+1} \leq J_n,$$

et qui prouve bien la décroissance de la suite $(J_n)_n$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leq x^n\sqrt{1-x^2} \leq x^n$$

donc

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx.$$

(b) Comme

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} J_n$ existe et vaut 0.

Exercice 7.

Il suffit de montrer que $\overline{Z} = Z$.

On a

$$\overline{Z} = \frac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}{1 + \overline{z}_1\overline{z}_2}.$$

Comme z_1 et z_2 sont de module 1, nous avons

$$\overline{z}_1 = \frac{1}{z_1} \qquad \text{et} \qquad \overline{z}_2 = \frac{1}{z_2}$$

donc

$$\overline{Z} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}}.$$

En multipliant le haut et le bas de la fraction précédente par $z_1 z_2$, nous avons

$$\overline{Z} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2 + 1} = Z,$$

ce qui achève de prouver que Z est réel.

Exercice 8.

1. On a

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Notons X ce nombre réel. On regroupe tous les termes dont le premier facteur est $\overrightarrow{DA}$. On obtient :

$$X = \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Or $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

De plus

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{0} = 0,$$

donc $X = 0$.

2. En effet si un tétraèdre A, B, C, D est tel que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, nous obtenons alors que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Or $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, donc $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, ce qui implique que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, et donc que la troisième paire d'arêtes opposées est formée d'arêtes orthogonales.