Chapitre 4
Espaces métriques compacts

1. Propriété de Borel-Lebesgue.

1.1. Définition, premières propriétés

⋆ **1.1.1. Définition.** Soit (E, d) un espace métrique. On dit que (E, d) est un *espace compact* si et seulement si de tout recouvrement de E par des ouverts de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, si $E = \bigcup_{i \in I} U_i$ où les U_i sont des ouverts, il existe J fini, $J \subset I$ tel que $E = \bigcup_{i \in J} U_i$.

Si A est une partie de E, on dit que A est une *partie compacte* si et seulement A munie de la distance induite est un espace métrique compact.

1.1.2. Exemples.
- *Tout espace métrique fini est compact.*
- *L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas compact.*

Preuve. Exercice 4.1. □

⋆ **1.1.3. Proposition.** *Un espace métrique compact est borné.*

Preuve. Exercice 4.2. □

1.2. Aspect dual de la propriété de Borel-Lebesgue.

En passant au complémentaire dans la définition 1.1.1, on obtient facilement la proposition suivante :

1.2.1. Proposition. *Un espace métrique est compact si et seulement si de toute intersection vide de fermés de E, on peut en extraire une sous-famille finie d'intersection vide. En d'autres termes, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, alors il existe $J \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.*

Preuve. Exercice 4.3. □

⋆ **1.2.2. Corollaire.** *Si (F_n) est une suite décroissante (pour l'inclusion, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$) de fermés non vides dans un espace compact, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Preuve. Exercice 4.4. □

1.3. Parties compactes.

La caractérisation des ouverts pour la topologie induite va nous donner une caractérisation simple des parties compactes.

⋆ **1.3.1. Proposition.** *Soit (E, d) un espace métrique. Une partie A de E est compacte si et seulement si de tout recouvrement de A par des ouverts de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, alors il existe $J \subset I$ fini tel que $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.*

Preuve. Exercice 4.5. □

1.3.2. Corollaire. *Une réunion finie de parties compactes est compacte.*

Preuve. Exercice 4.6. □

2. Propriété de Bolzano-Weierstraß.

2.1. Valeurs d'adhérence d'une suite.

⋆ **2.1.1. Définition.** Soit (x_n) une suite d'un espace métrique (E, d). On dit que a est *valeur d'adhérence* de la suite (x_n) si

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \exists n \geq N, \qquad d(x_n, a) < \varepsilon.$$

⋆ **2.1.2. Proposition.** *Soit (x_n) une suite de (E, d) et $a \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. *a est une valeur d'adhérence de (x_n)*
ii. *Il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers a*
iii. *$a \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n,\ n \geq p\}}$.*
iv. *a est point d'accumulation de $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ ou bien l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ x_n = a\}$ est infini.*

Preuve. Exercice 4.7.

2.1.3. Corollaire. *L'ensemble des valeurs d'adhérence est fermé.*

⋆ **2.1.4. Proposition et Définition.** *Soit* (u_n) *une suite réelle bornée. On appelle limite supérieure et on note* $\limsup u_n$ *la borne supérieure de l'ensemble des valeurs d'adhérence de* (u_n)*. Alors, la suite* $v_n = \sup\{u_p,\ p \geq n\}$ *est bien définie et converge vers* $\limsup u_n$ *(d'où le nom). De plus,* $\limsup u_n$ *est une valeur d'adhérence.*

On définirait de même la notion de limite inférieure que l'on note $\liminf u_n$*.*

Preuve. Exercice 4.8. □

Enfin, la proposition suivante est évidente mais souvent utile :

⋆ **2.1.5. Proposition.** *Si* (x_n) *est une suite convergente, alors sa limite est l'unique valeur d'adhérence de* (x_n)*.*

2.2. Propriété de Bolzano-Weierstraß.

Nous allons voir une propriété qui caractérise la compacité dans les espaces métriques. Cette propriété est très différente de la propriété de Borel-Lebesgue, mais se révèle très souvent plus souple d'utilisation.

⋆ **2.2.3. Théorème de Bolzano-Weierstraß.** *Un espace métrique est compact si et seulement de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente.*

Preuve. Montrons tout d'abord que la propriété de Borel-Lebesgue implique celle de Bolzano-Weierstraß. Soit (x_n) une suite de E. Nous allons montrer que (x_n) a une valeur d'adhérence. Notons $X_p = \overline{\{x_n,\ n \geq p\}}$. La suite (X_p) est une suite décroissante de fermés non vides de E, donc l'ensemble des valeurs d'adhérence qui est l'intersection des (X_p) est non vide d'après le corollaire 1.2.2.

Pour montrer que la propriété de Borel-Lebesgue implique la propriété de Bolzano-Weierstraß, nous allons montrer deux lemmes.

⋆ **2.2.4. Définition.** Soit (E, d) un espace métrique. On dit que E est *précompact* si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\varepsilon > 0$ recouvrant E.

2.2.5. Lemme. *Tout espace métrique* (E, d) *qui satisfait la propriété de Bolzano-Weierstraß est précompact.*

Preuve du lemme 2.2.5. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ne puisse pas recouvrir E par des boules de rayon ε.

- Soit $x_0 \in E$. Alors $B(x_0, \varepsilon) \neq E$.

- Soit donc $x_1 \in E \setminus B(x_0, \varepsilon)$. On a donc $d(x_1, x_0) \geq \varepsilon$.

- De même, comme $B(x_0, \varepsilon) \cap B(x_1, \varepsilon) \neq E$, on en déduit l'existence de $x_2 \in E$ tel que $d(x_0, x_2) \geq \varepsilon$ et $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$.

- On recommence... $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont construits tels que, pour tous $i < j$, $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. On sait que $\bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon) \neq E$, donc il existe $x_{n+1} \in E$ tel que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $d(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon$.

On construit ainsi une suite (x_n) de E telle que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ dès que $i \neq j$. En particulier, cette suite n'admet aucune sous-suite convergente car aucune sous-suite n'est de Cauchy, d'où le lemme. □

2.2.6. Lemme. *Soit (E, d) une espace métrique vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstraß, et soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E par des ouverts de E. Alors :*

$$\exists \alpha > 0, \qquad \forall x \in E, \qquad \exists i \in I, \qquad B(x, \alpha) \subset O_i.$$

Preuve du lemme 2.2.6. Supposons le contraire.

$$\forall \alpha > 0, \qquad \exists x \in E, \qquad \forall i \in I, \qquad B(x, \alpha) \not\subset O_i.$$

Et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \exists x_n \in E, \qquad \forall i \in I, \qquad B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset O_i.$$

Soit $x_{\varphi(n)}$ une sous-suite de (x_n) qui converge. Notons x sa limite. Il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Comme O_i est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, 2r) \subset O_i$. Comme $(x_{\varphi(n)})$ converge vers x,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N \quad \Rightarrow \quad \left(d(x_{\varphi(n)}, x) < r \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(n)} < r\right).$$

Alors,

$$\forall n \geq N, \qquad \forall y \in B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right), \qquad d(x, y) \leq d(x, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, y) < r + r = 2r,$$

et donc, pour tout $n \geq N$, on a $B(x_{\varphi(n)}, 1/\varphi(n)) \subset O_i$, ce qui est absurde. D'où le lemme 2.2.6. □

Terminons la preuve du théorème de Bolzano-Weierstraß. Soit (E, d) un espace métrique vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstraß. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E par des ouverts de E. D'après le lemme 2.2.6, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad \exists i \in I, \qquad B(x, \alpha) \subset O_i.$$

D'après le lemme 2.2.5, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon α, ce qui s'écrit

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \qquad \exists x_1, \ldots, x_n \in E, \qquad E = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \alpha).$$

Or pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $i_j \in I$ tel que $B(x_j, \alpha) \subset O_{i_j}$. On en déduit que $E = \bigcup_{j=1}^{n} O_{i_j}$, d'où le résultat. □

⋆ **2.2.7. Corollaire.** *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée*

- Toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence.

- *Toute partie infinie de E admet au moins un point d'accumulation.*

Preuve. Exercice 4.9. □

2.3. Propriétés générales des compacts.

⋆ **2.3.1. Proposition.** *Soit (E, d) un espace métrique.*
- *Si E est compact et si A est une partie fermée de E, A est compacte.*
- *Si A est une partie compacte de E, A est fermée et bornée.*

Preuve. Exercice 4.10. □

⋆ **2.3.2. Proposition.** *Un espace compact est complet.*

Preuve. Exercice 4.11. □

⋆ **2.3.3. Proposition.** *Soit (E, d) un espace métrique compact et (x_n) une suite de E admettant une et une seule valeur d'adhérence x. Alors (x_n) converge vers x.*

Preuve. Exercice 4.12. □

⋆ **2.3.4. Proposition.** *Soient $E_1, \dots, E_n$ un nombre fini d'espaces métriques. L'ensemble $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est compact si et seulement si E_i est compact pour tout i.*

Preuve. Exercice 4.13. □

⋆ **2.3.5. Théorème.** *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ (muni des distances produit usuelles) sont les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. D'après la proposition 2.3.1, les parties compactes sont écessairement fermées bornées. Réciproquement, si A est bornée, alors A est bornée pour la distance d_∞ sur $\mathbb{R}^n$, et donc il existe $M > 0$ tel que $A \subset [-M, M] \times \cdots \times [-M, M]$. Comme A est fermée, et qu'un fermé dans un compact est fermé d'après la proposition 2.3.1, il suffit de montrer que $[-M, M] \times \cdots \times [-M, M]$ est compact pour conclure. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que $[-M, M]$ est compact dans $\mathbb{R}$. Cela découle du lemme suivant. □

⋆ **2.3.6. lemme.** *Tout intervalle fermé $[a, b]$ est compact dans $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle.*

Preuve. Soit $(U_i)_i \in I$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ qui recouvre le segment $[a, b]$. On va montrer qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Soit

$$A = \{x \in [a, b],\ \text{le segment } [a, x] \text{ peut être recouvert par un nombre fini de } U_i\}.$$

Il est clair que $a \in A$, car il existe $i \in I$ tel que $a \in U_i$, et donc l'ouvert U_i recouvre le segment $[a, a]$. A est donc un ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$ qui admet donc une borne supérieure s.

Montrons que $s \in A$. Pour cela, on remarque qu'il existe $\sigma \in I$ tel que $s \in U_\sigma$. Comme U_σ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\subset U_\sigma$. Comme $s - \varepsilon$ n'est plus majorant de A, il existe $x \in A$ tel que $s - \varepsilon < x$. x étant dans A, il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que $[a,x] \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$. Comme $[a,s] = [a,x] \cup [x,s]$ et que $[x,s] \subset U_\sigma$, on en déduit que $[a,s] \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n} \cup U_\sigma$, ce qui montre que $s \in A$.

Montrons que $s = b$. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors $s < b$. Comme $s \in A$, on en déduit qu'il existe $i_1, \ldots, i_n$ tels que $[a,s] \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$. Or, il existe $\sigma \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $s \in U_{i_\sigma}$. Comme U_{i_σ} est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\subset U_{i_\sigma}$. Quitte à prendre un $\varepsilon > 0$ un peu plus petit, on peut supposer que $s + \varepsilon < b$. En particulier $s + \varepsilon \in A$, ce qui est absurde. Et donc $s = b$. □

⋆ **2.3.7. Corollaire.** *Les parties compactes de $\mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont les fermés bornés de $\mathbb{K}^n$.*

Preuve. Exercice 4.14. □

2.3.8. Proposition. *Soit (x_n) une suite convergente d'un espace métrique (E,d), ℓ sa limite. Alors l'ensemble $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.*

Preuve. Exercice 4.15. □

2.4. Compacts et Applications continues.

⋆ **2.4.1. Proposition.** *Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, le premier étant compact. Soit $f : E \to E'$ une application continue. Alors $f(E)$ est compact.*

Preuve. Exercice 4.16. □

2.4.2. Remarque. *Cette proposition entraîne que l'image par f de tout fermé d'un espace compact est un fermé (une application qui vérifie cette propriété est dite "fermée"). Ceci est faux en général.*

En corollaire, on a le résultat suivant :

⋆ **2.4.3. Corollaire.** *Si $f : (E,d) \to (E',d')$ est continue et bijective, et si E est compact, alors f est un homéomorphisme.*

Preuve. Exercice 4.17. □

⋆ **2.4.4. Théorème.** *Soit $f : (E,d) \to \mathbb{R}$ une application continue où E est compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, il existe α et β dans E tels que*

$$f(\alpha) = \inf_{x \in E} f(x) \qquad et \qquad f(\beta) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Preuve. Montrons le par exemple pour la borne supérieure. Tout d'abord, $f(E)$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$ donc bornée. Elle admet donc une borne supérieure. Soit

$s = \sup_{x\in E} f(x) = \sup f(E)$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $s - \frac{1}{n}$ n'est plus majorant de $f(E)$ et donc il existe $x_n \in E$ tel que $f(x_n) > s - \frac{1}{n}$. La suite (x_n) est donc une suite de E. E étant compact, cette suite admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ vers $\beta \in E$. Enfin, comme f est continue, on a

$$f(\beta) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) \geq \lim_{n\to+\infty} \left(s - \frac{1}{\varphi(n)}\right) = s.$$

Et par définition de la borne supérieure, on a $f(\beta) \leq \sup f(E) = s$, ce qui montre que $s = f(\beta)$ est donc atteint. □

⋆ **2.4.5. Théorème de Heine.** *Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, le premier étant compact et $f : E \to F$ une application continue. Alors f est une application uniformément continue.*

Preuve. On veut montrer que f est uniformément continue, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \alpha > 0, \qquad \forall x, y \in E, \qquad d(x,y) < \alpha \;\Rightarrow\; d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire que

$$\exists \varepsilon > 0, \qquad \forall \alpha > 0, \qquad \exists x, y \in E, \qquad d(x,y) < \alpha \text{ et } d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ vérifiant la proposition ci-dessus. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \exists x_n, y_n \in E, \qquad d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ et } d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

L'espace E étant compact, on peut extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $x \in E$. Comme $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, on en déduit que la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge aussi vers x. En particulier, comme f est continue en x, on a $\lim f(x_{\varphi(n)}) = \lim f(y_{\varphi(n)}) = f(x)$, ce qui contredit le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $d'(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \geq \varepsilon$. D'où le théorème. □

2.5. Lien entre compacité et complétude.

Nous avons vu dans la proposition 2.3.2 que la compacité entraîne la complétude et dans le lemme 2.2.5. que la compacité entraînent la précompacité. Nous allons voir maintenant que ces deux propriétés entraîne réciproquement la compacité. De plus, la preuve de ce résultat fera intervenir un argument intéressant, appelé "extraction diagonale".

⋆ **2.5.1. Théorème.** *Un espace métrique (E,d) est compact si et seulement si il est complet et précompact.*

Preuve. Nous avons donc uniquement à prouver que si (E,d) est complet et précompact alors il est compact. Soit donc (x_n) une suite d'éléments de E. E étant précompact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon 1. L'une d'elles, B_1 contient donc une infinité d'éléments de la suite (x_n). Il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les $x_{\varphi_1(n)}$ soient dans cette boule B_1.

On peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon $1/2$. En particulier, on peut recouvrir B_1 par un nombre fini de boules de rayon $1/2$, et l'une d'elles, B_2 contient donc une infinité d'éléments de la suite $(x_{\varphi_1(n)})$. Il existe $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les $x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}$ soient dans cette boule B_2.

On continue le processus : on construit comme cela une suite de boules B_p de rayons $1/p$ et des applications strictement croissantes $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les $x_{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_p(n)}$ soient dans B_p.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$. La fonction φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{array}{rcc} \varphi(n+1) & = & \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n \circ \varphi_{n+1}(n+1) \\ & > & \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n \circ \varphi_{n+1}(n) \\ & & \text{car la composé d'applications strictement croissante} \\ & & \text{est strictement croissante} \\ & \geq & \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) \\ & & \text{car } \varphi_{n+1}(n) \geq n \text{ et } \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n \text{ est croissante.} \end{array}$$

Enfin, comme E est complet, il suffit de vérifier que $(x_{\varphi(n)})$ est de Cauchy pour montrer qu'elle converge, terminant ainsi la preuve du théorème.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et p, q dans $\mathbb{N}$ tels que $p \geq n$ et $q \geq n$. Comme $\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_q(q) = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1} \circ \cdots \circ \varphi_q(q))$ et que tous les termes de la forme $x_{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(k)}$ sont dans B_n, on en déduit que, pour tout $p \geq n$ et pour tout $q \geq n$, $x_{\varphi(p)}$ et $x_{\varphi(q)}$ sont dans la boule B_n. En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad (p \geq n) \text{ et } (q \geq n) \quad \Rightarrow \ d(x_{\varphi(p)}, x_{\varphi(q)}) \leq \text{ diam } B_n \leq \frac{2}{n},$$

ce qui termine la preuve. □

2.5.2. Remarque *Donnons une explication à l'expression "extraction diagonale". Notons pour cela $y_p^q = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_p(q)$. Si on écrit tous ces éléments sous la forme d'un tableau*

$$\begin{array}{ccccc} y_1^1 & y_1^2 & \ldots & y_1^n & \ldots \\ y_2^1 & y_2^2 & \ldots & y_2^n & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ y_n^1 & y_n^2 & \ldots & y_n^n & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

alors les $\varphi(n)$ sont les y_n^n, c'est à dire les termes de la diagonale.

3. Compacité dans les Espaces Vectoriels Normés.

3.1. Compacité dans les espaces vectoriels de dimension finie.

⋆ **3.1.1. Théorème.** *Dans un espace vectoriel normé, toutes les normes sont équivalentes.*

Preuve. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on note $N_0(x) = \sup_i |x_i|$. N_0 définit bien une norme sur E.

Montrons que toutes les normes sont équivalentes à N_0. Soit N une norme sur E. En posant $a = \sum_{i=1}^n N(e_i)$, on a pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$,

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq a N_0(x). \tag{$*$}$$

Munissons $\mathbb{K}^n$ de la norme produit $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \sup_i |x_i|$. L'application $\varphi : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (E, N_0)$ qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe $\sum_{i=1}^n x_i e_i$ est une isométrie, donc $S = \{x \in E,\ N_0(x) = 1\}$ est un compact de (E, N_0) car c'est l'image de la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ qui est compacte car fermée et bornée dans $\mathbb{K}^n$ par φ qui est continue.

D'après $(*)$, on a $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq a N_0(x-y)$, donc $N : (E, N_0) \to \mathbb{R}$ est continue. Comme S est un compact de (E, N_0), on en déduit qu'il existe $x_0 \in S$ tel que $n = \inf_{x \in S} N(x) = N(x_0)$. Ainsi, $b \neq 0$ et

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \qquad N(x) = N_0(x) \cdot N\left(\frac{x}{N_0(x)}\right) \geq b N_0(x).$$

Cette inégalité combinée avec $(*)$ nous donne le théorème. □

⋆ **3.1.2. Remarque.** *Ce théorème est particulièrement important, car il nous permet de choisir dans un espace vectoriel normé de dimension finie la norme qu'on veut. Il entraîne aussi beaucoup de propriétes intéressantes qui ne sont vraies en général que dans les espaces de dimension finie et qui sont les corollaires suivants.*

⋆ **3.1.3. Corollaire.** *Toute application linéaire d'un espace vectoriel normé de dimension finie dans un espace vectoriel normé quelconque est continue.*

Preuve. Exercice 4.18. □

⋆ **3.1.4. Corollaire.** *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Preuve. Exercice 4.19. □

⋆ **3.1.5. Corollaire.** *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

Preuve. Exercice 4.20. □

⋆ **3.1.6. Corollaire.** *Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées bornées.*

Preuve. Exercice 4.21. □

3.2. Compacité dans les espaces vectoriels de dimension infinie.

Les propriétés précédentes valables dans les espace vectoriels normés de dimension finie tombent toutes en défaut dans les espaces vectoriels normés de dimension infinie. En particulier, nous avons le théorème important suivant :

⋆ **3.2.1. Théorème de Riesz.** *La boule unité fermée d'un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est jamais compacte.*

Preuve. Nous allons montrer que la boule unité fermée d'un espace vectoriel de dimension infinie ne peut pas être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon 1/2, ce qui contredira la précompacité et donc en particulier la compacité.

Tout d'abord, pour avoir une idée intuitive de ce résultat, nous allons nous placer dans $\mathbb{R}^n$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$. On remarque que pour $n=1$, il faut deux boules fermées de rayon 1/2, à savoir $[-1,0]$ et $[0,1]$ pour recouvrir $[-1,1]$. Pour $n=2$, un dessin nous convainc qu'il en faut 4, puis pour $n=3$, il en faut 8. On conjecture assez facilement qu'il en faudra 2^n en dimension n, et donc qu'en dimension infinie, on ne pourra pas trouver un nombre fini de boules de rayon 1/2 qui recouvrent la boule unité fermée.

Passons maintenant à la preuve rigoureuse : supposons que la boule unité fermée soit compacte. Elle est en particulier précompacte, et donc il existe $x_1,\dots,x_n \in E$ tels que $B'(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^n B'(x_i,1/2)$. Notons F le sous-espace vectoriel engendré par $x_1,\dots,x_n$. Montrons que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a

$$B'(0,1) \subset F + 2^{-p}B'(0,1)$$

(on rappelle que si A et B sont deux parties d'un espace vectoriel, $A+B$ désigne l'ensemble des $a+b$ quand $a\in A$ et $b\in B$ et si $\lambda\in K$, alors λA est l'ensemble des λa quand $a\in A$).

Tout d'abord, c'est vrai pour $p=1$ puisque, si $x\in B'(0,1)$, il existe $i\in\{1,\dots,n\}$ tel que $x\in B'(x_i,1/2)$, et donc $x\in\{x_i\}+B'(0,1/2)\subset F+\frac{1}{2}B'(0,1)$.

Supposons maintenant que ce soit vrai au rang p et montrons le au rang $p+1$. Pour cela, on utilise le fait que $B'(0,1)\subset F+2^{-p}B'(0,1)\subset F+2^{-p}(F+2^{-1}B'(0,1)) = (F+2^{-p}F)+2^{-(p+1)}B'(0,1) = F+2^{-(p+1)}B'(0,1)$ car F est un sous-espace vectoriel de E.

On a donc bien prouvé par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^*$ que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$B'(0,1) \subset F + 2^{-p}B'(0,1)$$

En particulier, si $x\in B'(0,1)$ alors il existe deux suites (x_p) dans F et (y_p) dans $B'(0,1)$ telles que

$$\forall p\in\mathbb{N}^*, \qquad x = x_p + 2^{-p}y_p.$$

Comme la suite (y_p) est à valeurs dans $B'(0,1)$, on en déduit que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \|2^{-p} y_p\| \leq 2^{-p} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, la suite $(x_p) = (x - 2^{-p} y_p)$ converge donc vers x, ce qui implique que $x \in \overline{F}$. Mais comme F est de dimension finie, F est fermé d'après le corollaire 3.1.5. En particulier, $x \in F$. Ceci étant vrai quel que soit $x \in B'(0,1)$, on en déduit que $B'(0,1) \subset F$. Enfin, comme pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\frac{x}{\|x\|}$ qui est élement de $B'(0,1)$, on en déduit que $E \subset F$, et donc que E est de dimension finie. C'est absurde. $\square$

Exercices.

Exercices d'apprentissage.

Exercice 4.1. Montrez les points énoncés de l'exemple 1.1.2. On pourra montrer par exemple qu'on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-n, n[$.

Exercice 4.2. Montrez la proposition 1.1.3. On remarquera que si $x_0 \in E$, alors $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_0, n)$.

Exercice 4.3. Montrez la proposition 1.2.1.

Exercice 4.4. Montrez le corollaire 1.2.2.

Exercice 4.5. Montrez la proposition 1.3.1.

Exercice 4.6. Montrez le corollaire 1.3.2.

Exercice 4.7. Montrez la proposition 2.1.2.

Exercice 4.8. Montrez les propositions 2.1.4. et 2.1.5.

Exercice 4.9. Montrez le corollaire 2.2.7.

Exercice 4.10. Montrez la proposition 2.3.1.

Exercice 4.11. Montrez la proposition 2.3.2.

Exercice 4.12. Montrez la proposition 2.3.3. On pourra raisonner par l'absurde et extraire une sous-suite convergente mais ne convergeant pas vers x.

Exercice 4.13. Montrez la proposition 2.3.4. On pourra commencer par $n = 2$.

Exercice 4.14. Montrez le corollaire 2.3.7.

Exercice 4.15. Montrez la proposition 2.3.8.

Exercice 4.16. Montrez la proposition 2.4.1.

Exercice 4.17. Montrez le corollaire 2.4.3.

Exercice 4.18. Montrez le corollaire 3.1.3. On pourra fixer une base, et prendre une norme infinie “associée” à cette base, et enfin exprimer f dans cette base.

Exercice 4.19. Montrez le corollaire 3.1.4.

Exercice 4.20. Montrez le corollaire 3.1.5.

Exercice 4.21. Montrez le corollaire 3.1.6.

Exercices d’approfondissement.

Exercice 4.22. Soit $(E, \ell^\infty, d_\infty)$, (e_n) la suite canonique de E, c’est-à-dire que $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ où le 1 est à la place de rang n. Soit F la partie de E formée des $x_p = (1 + \frac{1}{p})e_p$, p étant un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que F est une partie fermée, bornée mais non compacte de E.

Exercice 4.23. Soit (E, d) un espace métrique compact. Soit $f : E \to E$ une application telle que, pour tous x, y distincts dans E, on ait

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f possède un point fixe et un seul. Montrez que si a est quelconque dans E et que si (x_n) est la suite définie par la donnée $x_0 = a$ et par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, alors (x_n) converge vers le point fixe de f.

Exercice 4.24. *Rotations.* Soit (E, d) un espace métrique compact. Une isométrie $f : E \to E$ est dite une rotation s’il existe $x_0 \in E$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$d(x_0, x) = d(x_0, f(x)).$$

Montrer que l’ensemble C de tels points x_0 est une partie compacte de E.

Exercice 4.25. *Isométries d’un compact dans lui-même.* Soit (E, d) un espace métrique, A une partie compacte de E et f une isométrie de A dans A. Montrer que f est un homéomorphisme. Procéder ainsi :

1. Vérifier qu’il suffit d’établir la surjectivité de $f : A \to A$.

2. A tout point x de A, on associe la suite

$$x_0 = x, \qquad x_n = f(x_{n-1}) \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

a. Montrer que pour tous $m \geq n$,

$$d(x_{m-n}, x) = d(x_m, x_n)$$

b. Soit $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite convergente de (x_n). Soit (y_n) définie par $y_n = x_{\varphi(n)-\varphi(n-1)}$. Montrer que $x \in \overline{f(A)}$ et conclure.

Si A n'est plus compacte, est-ce que le résultat reste encore vrai ?

Exercice 4.26. *Dilatations.* Soit (E, d) un espace métrique compact, $f : E \to E$ une application telle que

$$\forall x, y \in E, \qquad d(f(x), f(y)) \geq d(x, y).$$

Pour tout $x \in E$, on pose $x_0 = x$ et $x_n = f(x_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p entier supérieur ou égal à 1 tel que $d(x_p, x) < \varepsilon$. En déduire que $f(E)$ est dense dans E.

2. En appliquant **1.**, montrer que, pour tous x, y dans E et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p entier supérieur ou égal à 1 tel que

$$d(x_p, x) < \varepsilon, \qquad d(y_p, y) < \varepsilon.$$

En déduire que f est une isométrie et que f est un homéomorphisme.

Exercice 4.27. Soit I un intervalle ouvert ou fermé de $\mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur tout compact K vers une fonction f.

1. Montrez que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue.

2. Soit (x_n) une suite de I convergeant vers $x \in I$. Montrer que la suite $f_n(x_n)$ converge vers $f(x)$.

Exercice 4.28. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, C une partie compacte et convexe de E (c'est à dire que pour tous x, y, le segment $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda \in [0, 1]\}$ est inclus dans C). Soit $f : C \to C$ une application $1-$lipschitzienne.

1. Soit $a \in C$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n}(f(a) - f(x)) + f(x).$$

Montrer que f_n est une application de C dans C et qu'elle possède un point fixe x_n.

2. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur C et, en observant la suite (x_n), en déduire que f possède un point fixe. Unicité de ce dernier ?

Corrigé des exercices d'apprentissage.

Exercice 4.1.

- Soit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de E. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $i_j \in I$ tel que $x_j \in U_{i_j}$, et donc $E = \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$.
- Considérons le recouvrement de $\mathbb{R}$ par la famille d'ouverts $]-n, n[$ pour $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $n_1, \ldots, n_p$ tels que $\mathbb{R} \subset \bigcup_{i=1}^p]-n_i, n_i[$. Posons $N = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$. On a donc $\mathbb{R} \subset]-N, N[$, ce qui est absurde.

Exercice 4.2. Soit $x_0 \in E$. On a $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_0, n)$. En effet, si $x \in E$ et si $n > d(x_0, x)$, on a $x \in B(x_0, n)$. Comme E est compact, il existe $n_1, \ldots, n_p$ tels que $E \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_0, n_i)$. Posons $N = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$. On a donc $E \subset B(x_0, N)$, ce qui montre que E est borné.

Exercice 4.3. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Notons, pour $i \in I$, $U_i = E \setminus F_i$. Alors $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts et $\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I}(E \setminus F_i) = E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = E \setminus \emptyset = E$ ce qui montre que $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E. Comme E est compact, il existe $J \subset I$ fini tel que $\bigcup_{i\in J} U_i = E$, ce qui montre que $\bigcap_{i\in J} F_i = E \setminus \left(\bigcup_{i\in J} U_i\right) = E \setminus E = \emptyset$.

Exercice 4.4. Si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, alors d'après l'exercice précédent, il existe $n_1, \ldots, n_p$ tels que $\bigcap_{i=1}^p F_{n_i} = \emptyset$. Posons $N = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$. On a donc $F_N = \bigcap_{i=1}^p F_{n_i} = \emptyset$, ce qui est absurde.

Exercice 4.5. Si A est compacte et si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E recouvrant A, alors $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de A recouvrant A, et donc il existe $J \subset I$ fini tel que $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Réciproquement, supposons que pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de E recouvrant A, il existe $J \subset I$ fini tel que $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de A recouvrant A. La caractérisation de la topologie induite (*cf.* la proposition 4.1.2 du chapitre 1) nous donne l'existence d'une famille d'ouverts $(U'_i)_{i\in I}$ de E telle que, pour tout $i \in I$, $U_i = U'_i \cap A$. La famille d'ouverts $(U'_i)_{i\in I}$ est donc une famille d'ouverts de E recouvrant A et donc il existe $J \subset I$ fini tel que $A \subset \bigcup_{i\in J} U'_i$. On a alors $A = A \cap \left(\bigcup_{i\in J} U'_i\right) = \bigcup_{i\in J}(U'_i \cap A) = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Exercice 4.6. Soient $A_1, \ldots A_n$ des parties compactes de E. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ par la famille $(U_i)_{i\in I}$. Chaque A_k est recouvert en particulier par cette famille $(U_i)_{i\in I}$. Et donc, il existe $J_k \subset I$ fini tel que

$$A_k \subset \bigcup_{i\in J_k} U_i,$$

ce qui nous donne que

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n \subset \bigcup_{i\in J_1\cup\ldots\cup J_n} U_i,$$

et donc $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ est compact.

Exercice 4.7. Montrons que i implique ii. Cette démarche a été vue dans les chapitres précédents, mais nous allons la refaire néanmoins.

Posons $\varepsilon = 1$. Il existe $n_1 \geq 0$ tel que $d(x_{n_1}, a) < 1$. On pose $\varphi(0) = n_1$.

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il existe $n_2 \geq n_1 + 1$ tel que $d(x_{n_2}, a) < \frac{1}{2}$. on pose $\varphi(1) = n_2$.

Supposons construits $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(p)$ tels que, pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$, on ait

$$d(x_{\varphi(k)}, a) < \frac{1}{k+1}.$$

En particulier, si on pose $\varepsilon = \frac{1}{p+2}$, alors il existe $n \geq \varphi(p) + 1$ tel que

$$d(x_n, a) < \frac{1}{p+2},$$

et on peut poser $\varphi(p+1) = n$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \frac{1}{n+1}$, ce qui montre que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers a.

Montrons que ii implique i. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Comme $(x_{\varphi(n)})$ converge vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $d(x_{\varphi(n)}, a) < \varepsilon$. En particulier, si $n \geq \max(n_0, N)$, on a $\varphi(n) \geq N$ et $d(x_{\varphi(n)}, a) < \varepsilon$, ce qui montre le point i.

Montrons que i implique iii. Soit a une valeur d'adhérence et soit $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists n \geq p, \qquad d(x_n, a) < \varepsilon,$$

et donc

$$a \in \overline{\{x_n,\ n \geq p\}}.$$

Ceci étant vrai quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on a

$$a \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n,\ n \geq p\}}.$$

Montrons maintenant que iii implique i. Soit donc $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Si

$$a \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n,\ n \geq p\}},$$

on a $a \in \overline{\{x_n,\ n \geq N\}}$, et donc $B(a, \varepsilon) \cap \{x_n,\ n \geq N\} \neq \emptyset$, ce qui implique qu'il existe $n \geq N$ tel que $d(x_n, a) < \varepsilon$, d'où le point i.

Montrons que i implique iv. Supposons que a soit une valeur d'adhérence de (x_n) mais que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ x_n = a\}$ soit fini. Soit n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ implique $x_n \neq a$. En particulier, si $\varepsilon > 0$ et si $N \geq n_0$, alors $B(a, \varepsilon) \cap (\{x_n,\ n \geq N\} \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, et donc $B(a, \varepsilon) \cap (\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, ce qui montre que a est un point d'accumulation de l'ensemble $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et prouve donc le point iv.

Montrons que *iv* implique *i*. Tout d'abord, si l'ensemble des $\{n \in \mathbb{N},\ x_n = a\}$ est infini, alors le point *i* est clair car

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \exists n \geq N, \qquad x_n = a.$$

Si a est un point d'accumulation de l'ensemble $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est infini, et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \exists n \geq N, \qquad d(x_n, a) < \varepsilon,$$

ce qui prouve le point *i*.

Exercice 4.8. Tout d'abord, comme un ensemble fermé contient sa borne supérieure et que l'ensemble des valeurs d'adhérences est fermé, on en déduit que $\limsup u_n$ est une valeur d'adhérence.

Ensuite, comme la suite des ensembles $A_p = \{u_n,\ n \geq p\}$ est décroissante, on en déduit que la suite des $\sup A_p$ (qui est bien définie car A_p est un ensemble non vide majoré) est décroissante et minorée car la suite (u_n) est minorée.

Cette suite des bornes supérieures est donc convergente vers ℓ. Il reste à montrer que ℓ est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

Tout d'abord, montrons que ℓ est une valeur d'adhérence. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(\sup A_n)$ converge vers ℓ, il existe $n_0 \geq N$ tel que, pour tout $p \geq n_0$, on ait $|\sup A_p - \ell| < \varepsilon/2$. De plus, si $p \geq n_0$, il existe $n \geq p$ tel que $\sup A_p - \varepsilon/2 < a_n \leq \sup A_p$ (car $\sup A_p - \varepsilon/2$ n'est plus majorant de A_p). Et donc, on a l'existence de $n \geq N$ tel que $|a_n - \ell| < \varepsilon$, ce qui montre que ℓ est une valeur d'adhérence.

La limite supérieure étant la borne supérieure de l'ensemble des valeurs d'adhérences, on en déduit que $\ell \leq \limsup u_n$.

Montrons maintenant que $\limsup u_n \leq \ell$. Il suffit pour cela de montrer que toute valeur d'adhérence est inférieure ou égale à ℓ. Soit donc a une valeur d'adhérence. La proposition 2.1.2 nous donne que $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{A_n}$, et donc $a \leq \sup \overline{A_n}$. Si on montre maintenant que $\sup \overline{A_n} = \sup A_n$, alors un passage à la limite quand $n \to +\infty$ nous donnera $a \leq \ell$.

Il nous reste donc à montrer que si $A \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$, alors $\sup A = \sup \overline{A}$. Tout d'abord, comme $A \subset \overline{A}$, on a $\sup A \leq \sup \overline{A}$. Soit $\varepsilon > 0$. $\sup \overline{A} - \varepsilon$ n'est plus majorant de $\overline{A}$ et donc il existe $a \in \overline{A}$ tel que $a > \sup \overline{A} - \varepsilon$. Comme $a \in \overline{A}$, on en déduit qu'il existe $b \in A$ tel que $a - \varepsilon < b$. En particulier, $b > a - \varepsilon > \sup \overline{A} - 2\varepsilon$, et donc $\sup A \geq \sup \overline{A} - 2\varepsilon$. Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\sup A \geq \sup \overline{A}$, ce qui montre que $\sup A = \sup \overline{A}$.

Exercice 4.9. Si toute suite de E admet une valeur d'adhérence, alors de toute suite de E, on peut extraire une sous-suite convergente d'après la proposition 2.1.2, et donc E est compact d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Si E est compact, alors de toute suite de E on peut extraire une sous-suite convergente et donc toute suite de E possède une valeur d'adhérence. Le premier point est donc prouvé.

Si X est une partie infinie de E, alors il existe une suite (x_n) d'éléments de X de points distincts. La compacité de E entraîne que cette suite a une valeur d'adhérence

x. D'après la proposition 2.1.2, ce x est soit point d'accumulation de l'ensemble des (x_n), ou alors l'ensemble des n tels que $x_n = x$ est infini. Mais comme les x_n sont deux à deux distincts, cette dernière possibilité est exclue, ce qui implique que x est point d'accumulation de l'ensemble des x_n, donc de X.

Réciproquement, si toute partie infinie admet un point d'accumulation, alors si (x_n) est une suite de E, l'ensemble des x_n est infini, donc admet un point d'accumulation x. D'après la proposition 2.1.2, x est une valeur d'ahérence de (x_n), ce qui prouve donc que toute suite de E admet une valeur d'adhérence, et donc que E est compact.

Exercice 4.10. Soit (x_n) une suite d'éléments de A. C'est une suite d'éléments de E. Comme E est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x \in E$. Mais, comme A est fermé, $x \in A$, ce qui prouve que de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergeant dans A, et donc que A est une partie compacte.

On a vu que A doit être bornée (proposition 1.1.3). Montrons que A est fermée. Soit (x_n) une suite de A qui converge vers $x \in E$. Il faut montrer que $x \in A$. Comme A est compacte, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)}$ qui converge vers $y \in A$. Comme une sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite, on en déduit que $x = y$, et donc que $x \in A$.

Exercice 4.11. Montrons qu'un espace métrique compact est complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E. Comme E est compact, on peut extraire une sous-suite convergente. Mais, la proposition 1.1.2 du chapitre 3 nous dit que (x_n) converge, ce qui prouve bien que E est complet.

Exercice 4.12. Soit (x_n) une suite dans un espace métrique compact admettant une seule valeur d'adhérence ℓ. Nous allons montrer que (x_n) converge vers ℓ. Supposons que ce ne soit pas le cas. On en déduit que

$$\exists \varepsilon > 0, \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \exists n \geq N, \qquad d(x_n, \ell) \geq \varepsilon.$$

En particulier, on peut extraire une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d(x_{\varphi(n)}, \ell) \geq \varepsilon.$$

De cette suite, on peut encore extraire une sous-suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ qui converge car E est compact. Notons ℓ' la limite de cette deuxième suite. ℓ' est donc une valeur d'adhérence. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d(x_{\varphi\circ\psi(n)}, \ell) \geq \varepsilon,$$

on en déduit que $d(\ell', \ell) \geq \varepsilon$, ce qui montre que $\ell \neq \ell'$ et donc que (x_n) a au moins deux valeurs d'adhérence distinctes. C'est absurde.

Exercice 4.13. Il suffit de vérifier le résultat pour la topologie produit définie par exemple par la distance D_∞ de la définition 4.2.1 du chapitre 1. Tout d'abord, montrons le résultat pour $n = 2$. Si E_1 et E_2 sont compacts, montrons que $E_1 \times E_2$ est compact. Soit donc $((x_n, y_n))_n$ une suite de $E_1 \times E_2$. Comme E_1 est compact, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $x \in E_1$. La suite

$(y_{\varphi(n)})$ est une suite de E_2 qui est compact. Il existe donc une application strictement croissante $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ soit convergente vers $y \in E_2$. La suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)}, y_{\varphi\circ\psi(n)})$ est alors une suite extraite de (x_n, y_n) qui converge, ce qui montre bien que $E_1 \times E_2$ est compact.

Montrons maintenant la réciproque. Supposons que $E_1 \times E_2$ soit compact et montrons que E_1 et E_2 sont compacts. Par symétrie, il suffit de montrer que E_1 est compact. Soit (x_n) une suite de E_1. Soit $a \in E_2$. La suite (x_n, a) est une suite de $E_1 \times E_2$, donc il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)}, a)$ converge, ce qui montre que la suite $(x_{\varphi(n)})$ converge et que E_1 est compact.

Le cas général pour n quelconque se déduit aisément par récurrence.

Exercice 4.14. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le corollaire n'est autre que le théorème 2.3.5. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors l'application $\varphi : (x_1, \ldots, x_{2n}) \mapsto (x_1 + ix_{n+1}, \ldots, x_n + ix_{2n})$ est une isométrie pour les distances produit D_∞. En particulier, une partie est compacte dans $\mathbb{C}^n$ si et seulement si elle l'est dans $\mathbb{R}^{2n}$ et une partie est fermée et bornée dans $\mathbb{C}^n$ si et seulement si elle l'est dans $\mathbb{R}^{2n}$. Le théorème 2.3.5 nous donne donc le résultat.

Exercice 4.15. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant l'ensemble $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$. Il existe $j \in I$ tel que $\ell \in U_j$. Comme la suite (x_n) converge vers ℓ et que U_j est ouvert, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, on ait $x_n \in U_j$. De même, pour tout $k \in \{0, \ldots, n_0\}$, il existe $i_k \in I$ tel que $x_k \in U_{i_k}$. En particulier, on a $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\} \subset U_{i_0} \cup \ldots \cup U_{i_{n_0}} \cup U_j$, ce qui montre bien que $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

Exercice 4.16. Soit (y_n) une suite de $f(E)$. Il existe une suite (x_n) de E telle que $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme E est compact, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $x \in E$. Comme f est continue, la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge vers $f(x) \in f(E)$.

Exercice 4.17. Il suffit de montrer que la bijection réciproque f^{-1} est continue. D'après la proposition 1.1.5 du chapitre 2, il suffit de vérifier que l'image réciproque par f^{-1} d'un fermé de E est un fermé de E', c'est-à-dire que l'image directe par f d'un fermé de E est un fermé de E'.

Soit donc F un fermé de E. Comme E est compact, F est donc compact. L'image directe de F par f est donc compacte, et donc fermée.

Exercice 4.18. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés, le premier étant de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Comme toutes les normes sur E sont équivalentes, on peut prendre sur E la norme

$$N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \max |x_i|.$$

Il suffit donc de montrer que f est continue si on munit E de la norme N. Or si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a

$$\|f(x)\|_F = \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|_F \le N(x) \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F,$$

ce qui prouve bien que f est continue.

Exercice 4.19. Si E est de dimension finie n, il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to \mathbb{K}^n$. Comme E et $\mathbb{K}^n$ sont tous les deux de dimension finie, il résulte de corollaire 3.1.3 que f et f^{-1} sont continues. Comme toute application linéaire continue est uniformément continue (*cf.* Théorème 1.6.1 du chapitre 2), il en résulte que f est un homéomorphisme uniforme. Comme $\mathbb{K}^n$ est complet (*cf.* corollaire 1.3.2 du chapitre 3), il résulte de la proposition 1.1.12 du chapitre 3 que E est complet.

Exercice 4.20. Un sous-espace vectoriel est de dimension finie, donc complet, et donc fermé.

Exercice 4.21 Un espace vectoriel de dimension finie est linéairement isomorphe à $\mathbb{K}^n$. D'après ce qui précède, cet isomorphisme linéaire envoie les compacts de l'un dans les compacts de l'autre, et les parties fermées bornées de l'un dans les parties fermée bornées de l'autre.