Corrections

1 Paramétrage Cartésien

Correction de l'exercice 1.1 (La cycloïde) Soit (Γ) la courbe définie par la représentation

$$x(t) = 3(t - \sin(t)) \ , \qquad y(t) = 3(1 - \cos(t)) \ .$$

1. $x(t)$ et $y(t)$ sont bien définies pour tout $t \in [-\pi, \pi]$.
   (Γ) se déduit de (Γ_0) par des translations de 6π. Plus précisément, on a $x(t + 2\pi) = x(t) + 6\pi$, et $y(t + 2\pi) = y(t)$. Par ailleurs, la courbe est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$, ainsi que tous les axes $x = 6k\pi$, où k est un entier quelconque.
   On se limite maintenant à l'intervalle $t \in [-\pi, \pi]$.
2. On a
   $$x'(t) = 3(1 - \cos(t)) \ , \qquad y'(t) = 3\sin(t) \ .$$
   Donc x est croissante, sauf en $t = 0$; y est décroissante pour $-\pi/2 \leq t < 0$ et croissante pour $0 < t \leq \pi/2$, et s'annule en $t = 0$. Tous les points sont réguliers, sauf le point correspondant à $t = 0$. Le tableau de variations s'écrit comme ci-dessous.

t	$-\pi$		0		π
$x'(t)$		$+$	0	$+$	
$x(t)$	-3π	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3π
$y(t)$	6	$\searrow$	0	$\nearrow$	6
$y'(t)$		$-$	0	$+$	

3. On a aussi
   $$x''(t) = 3\sin(t) \ , \qquad y''(t) = 3\cos(t) \ ,$$
   et
   $$\mathsf{det}(\vec{\gamma}'(t), \vec{\gamma}''(t)) = 9\cos(t)(1 - \cos(t)) - 9\sin^2(t) = 9[\cos(t) - 1] \ ,$$
   donc tous les points sont bi-réguliers, sauf $t = 0$. Calculons aussi
   $$x^{(3)}(t) = 3\cos(t) \ , \qquad y^{(3)}(t) = -3\sin(t) \ ,$$
   d'où $\vec{\gamma}^{(3)}(0) = (3, 0) \neq \vec{0}$. Le point $t = 0$ est donc un point de rebroussement de première espèce.
4. Il n'y a pas de branche infinie, la courbe est infinie mais périodique.
5. La cycloïde est tracée en Figure 1.

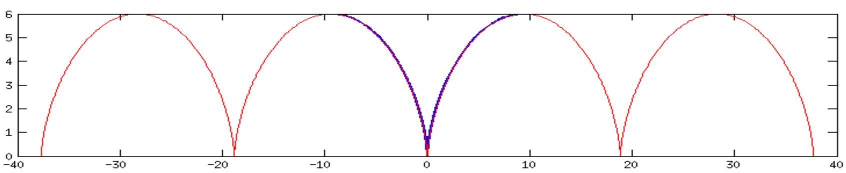

FIG. 1: La cycloïde ; l'intervalle $t \in (-\pi, \pi]$ se trouve au centre (gras, bleu)

Correction de l'exercice 1.2 (Epicycloïde) 1. $\boldsymbol{k} = 2$: On considère la courbe définie par

$$x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t)\ , \qquad y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)\ .$$

a) La courbe est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et périodique de période 2π. On peut donc limiter l'étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$. De plus, $x(-t) = x(t)$, alors que $y(-t) = -y(t)$, la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe Ox, ce qui permet finalement de se limiter à l'intervalle d'étude $[0, \pi]$.

b) Calculons $\vec{\gamma}'$:

$$x'(t) = -2[\sin(t) - \sin(2t)]\ , \qquad y'(t) = 2[\cos(t) - \cos(2t)]\ .$$

Donc, x' s'annule quand $\sin(2t) = \sin(t) \Leftrightarrow 2\sin(t)\cos(t) = \sin(t)$, soit pour $t = 0$ et $t = \pi$, ainsi que $t = \pi/3$. Par ailleurs, y' s'annule pour $\cos(t) = \cos(2t)$, c'est à dire pour $t = 0$ et $t = 2\pi/3$. Par conséquent, tous les points sont des points réguliers, sauf $t = 0$. Calculons aussi $\vec{\gamma}''$:

$$x''(t) = -2[\cos(t) - 2\cos(2t)]\ , \qquad y''(t) = -2[\sin(t) - 2\sin(2t)]\ .$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathsf{det}(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'') &= 4[\sin(t) - \sin(2t)][\sin(t) - 2\sin(2t)] - 4[\cos(t) - 2\cos(2t)][\cos(t) - \cos(2t)] \\
&= 4\Big[\sin^2(t) + 2\sin^2(2t) - 3\sin(t)\sin(2t) + \cos^2(t) + 2\cos^2(2t) - 3\cos(t)\cos(2t)\Big] \\
&= 12[1 - \cos(t)]\ .
\end{aligned}$$

Par conséquent, tous les points sont bi-réguliers, sauf $t = 0$.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
$x(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	-4

c) Reste donc à étudier le point $t = 0$, qui n'est pas bi-régulier. Pour cela, on note que $\vec{\gamma}''(0) = (-2, 0) \neq \vec{0}$, et il faut calculer une dérivée supplémentaire :

$$x^{(3)}(t) = 2[\sin(t) - 4\sin(2t)]\ , \qquad y^{(3)}(t) = -2[\cos(t) - 4\cos(2t)]\ ,$$

donc $\vec{\gamma}^{(3)}(0) = (0, 6) \neq \vec{0}$. Le point $t = 0$ est donc un point de rebroussement de première espèce.

d) Il n'y a pas de branche infinie, la courbe est périodique.

e) La courbe est tracée en Figure 2 (courbe de gauche)

2. $\boldsymbol{k}$ **quelconque :** On considère la courbe définie par

$$x(t) = k\cos(t) - \cos(kt)\ , \qquad y(t) = k\sin(t) - \sin(kt)\ .$$

a) Les deux fonctions x et y sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$. Elles sont invariantes par la translation $t \to t + 2\pi$.

Correction de l'exercice 1.3 (Strophoïde) 1. Les deux fonctions x et y sont bien définies pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut aussi observer que x est paire, alors que y est impaire. La courbe admet donc une symétrie par rapport à l'axe Ox. On peut se limiter au domaine d'étude $t \in \mathbb{R}^+$.

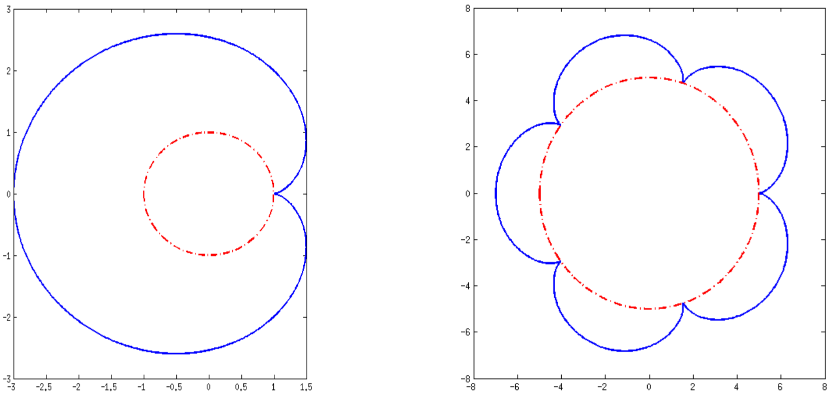

FIG. 2: Deux épicycloïdes : $k = 2$ (gauche) et $k = 6$ (droite) ; au centre le cercle de rayon $k - 1$.

2. Calculons les dérivées

$$x'(t) = \frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \ ,$$

$$y'(t) = tx'(t) + x(t) = \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{1-t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{-t^4 - 4t^2 + 1}{(1+t^2)^2} \ .$$

On voit que dans le domaine $t \in \mathbb{R}^+$, x' est négatif, donc x est décroissante. Pour ce qui est de y, il faut caractériser le signe de $-t^4 - 4t^2 + 1$. Posons $u = t^2$, il faut déterminer les racines de $-u^2 - 4u + 1$. Le discriminant vaut $\Delta = 20$, et les racines sont donc $u = -(4 \pm \sqrt{20})/2 = \mp\sqrt{5} - 2$. Comme u est positif, la seule racine admissible est $u = \sqrt{5} - 2$, qui correspond à la valeur

$$t = t_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2} \ .$$

Le tableau de variations se trouve ci-dessous :

t	0		t_0		∞
$x'(t)$	1	$-$		$-$	0
$x(t)$	1	$\searrow$	$x(t_0)$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$-$

3. Calculons

$$x''(t) = \frac{-4(1+t^2)^2 - 16t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^4} = -4\frac{1+5t^2}{(1+t^2)^3} \leq 0 \quad \forall t \ .$$

Donc x'' ne s'annule jamais, et tous les points sont donc bi-réguliers.

4. Branches infinies : il y a deux asymptotes verticales : $y \to \pm\infty$ quand $t \to \pm\infty$.
5. La courbe est tracée en Figure 3.

Correction de l'exercice 1.4 (Folium de Descartes) On considère la courbe définie par les équations paramétriques

$$x(t) = \frac{t}{1+t^3} \ , \qquad y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \ .$$

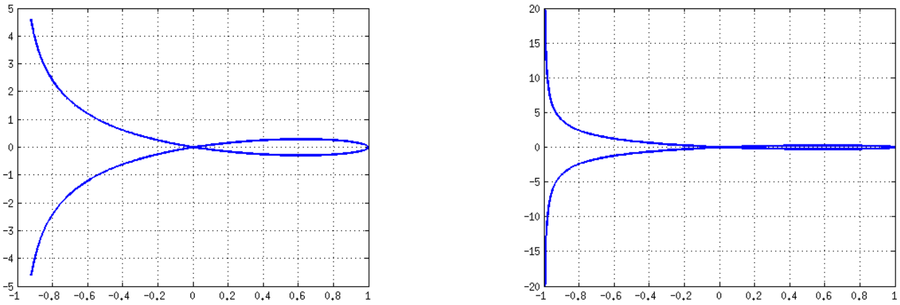

FIG. 3: La strophoïde, tracée pour $t \in [-2, 2]$ (gauche) et $t \in [-20, 20]$ (droite), pour faire clairement apparaître les asymptotes verticales.

1. La courbe est bien définie, sauf en $t = -1$, où x et y divergent toutes les deux. Il n'y a pas de symétrie évidente.
2. Calculons les dérivées.
$$x'(t) = \frac{1 + t^3 - t(3t^2)}{(1 + t^3)^2} = \frac{1 - 2t^3}{(1 + t^3)^2} ,$$
$$y'(t) = x(t) + tx'(t) = \frac{(1 + t^3) + t(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^2} = \frac{t(2 - t^3)}{(1 + t^3)^2} .$$
Ainsi, x' s'annule en $t = 2^{-1/3}$, et y' s'annule en $t = 0$ et en $t = 2^{1/3}$.

t	$-\infty$		-1		0		$2^{-1/3}$		$2^{1/3}$		∞
$x'(t)$	0	$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x(t)$	0	↗	∞ ‖ $-\infty$	↗		↗	0	↘		↘	0
$y(t)$	0	↘	$-\infty$ ‖ ∞	↘	0	↗		↗		↘	0
$y'(t)$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

3. Calculons les dérivées secondes.
4. Branches infinies : on a vu que x et y divergent quand $t \to -1$. Calculons
$$\lim_{t\to-1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-1} t = -1 .$$
Calculons aussi
$$\lim_{t\to-1} [y(t) + x(t)] = \lim_{t\to-1} \frac{t^2 + t}{1 + t^3} = \lim_{t\to-1} \frac{t}{t^2 - t + 1} = -1 .$$
La courbe admet donc une asymptote d'équation
$$y = -x - 1 .$$
5. La courbe est tracée en Figure 4
Finalement, calculons
$$x^3 + y^3 = \frac{t^3 + t^6}{(1 + t^3)^3} = \frac{t^3(1 + t^3)}{(1 + t^3)^3} = \frac{t^3}{(1 + t^3)^2} = xy ,$$
on retrouve donc bien l'équation Cartésienne recherchée.

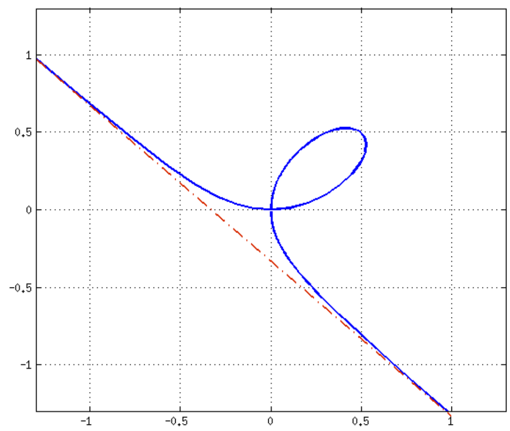

FIG. 4: Le folium de Descartes, et son asymptote.

Correction de l'exercice 1.5 (Folium de Dürer) On considère la courbe définie par les équations paramétriques

$$x(t) = \frac{1}{2}[\cos(t) + \cos(3t)] \ , \qquad y(t) = \frac{1}{2}[\sin(t) + \sin(3t)] \ .$$

1. La courbe est périodique de période 2π. Il suffit donc de se limiter à l'intervalle $[0, 2\pi]$. Par ailleurs, x et y sont bien définies dans cet intervalle.
2. À FINIR

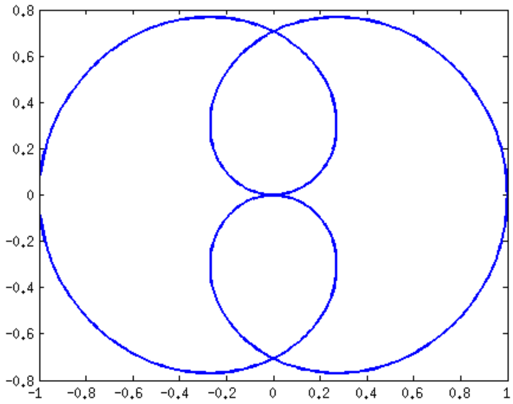

FIG. 5: Le folium de Dürer.

3.

Posons $t = \theta/2$, et calculons

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{1}{4}\left[(\cos(t) + \cos(3t))^2 + (\sin(t) + \sin(3t))^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \cos(t)\cos(3t) + \sin(t)\sin(3t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \cos(\theta))\right] = \cos^2(\theta/2) \end{aligned}$$

2 Paramétrage Polaire

Correction de l'exercice 2.1 (Courbes classiques)

- La courbe définie par $r = r_0$ est un cercle de rayon r_0, centré sur l'origine.
- La courbe définie par $\theta = \theta_0$ est une droite passant par l'origine, et faisant un angle θ_0 avec l'axe Ox.
- $r = a\cos(\theta - \theta_0)$ est un cercle de rayon a passant par l'origine.
- $r = \frac{a}{\cos(\theta)}$ est une droite ne passant pas par l'origine. Parmi les points remarquables, on peut par exemple voir que $r \to \infty$ quand $\theta \to \pm\pi/2$, et que le point le plus proche de l'origine correspond à $\theta = 0$.
- $r = \frac{a}{\cos(\theta-\theta_0)}$: même chose.

Correction de l'exercice 2.2 (Cardioïde) On considère la courbe définie par l'équation polaire

$$r = 1 + \cos(\theta)\ .$$

C'est une courbe fermée ($r \in [0,2]$), périodique de période 2π. On a une symétrie par la transformation $\theta \to -\theta$: $r(-\theta) = r(\theta)$, donc symétrie par rapport à l'axe Ox. On peut donc limiter l'intervalle d'étude à $\theta = [0,\pi]$.

La dérivée vaut $r' = -\sin(\theta)$, qui est négative pour tout θ dans le domaine d'étude. Par ailleurs, $r/r' = -(1+\cos(\theta))/\sin(\theta)$ est la tangente de l'angle entre a droite entre le rayon vecteur et le vecteur directeur de la tangente. On voit par exemple que pour $\theta \to 0$, la tangente tend vers l'infini, de sorte que l'angle vaut $\pi/2$: la tangente est verticale. Quand $\theta \to \pi$, $r/r' \to 0$, de sorte que la tangente est horizontale. Pour des raisons de symétrie, on voit donc que le point correspondant (qui est l'origine) est un point de rebroussement de première espèce.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$r'(t)$	0	$-$	-1	$-$	0
$r(t)$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	0
$r(t)/r'(t)$	$-\infty$		-1		0

Pour trouver les points de tangente verticale, on calcule $x(\theta) = (1+\cos(\theta))\cos(\theta)$, et sa dérivée

$$x'(\theta) = -\sin(\theta) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)\ .$$

x' s'annule pour $\sin(\theta) = 0$, c'est à dire $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (mais on a déjà vu que ce point était un point de rebroussement), et quand $\cos(\theta) = -1/2$, soit $\theta = 3\pi/4$. Dans ce cas, $r = 1/2$, ce qui correspond au point de coordonnées $(-1/4, 1/4)$.

La cardioïde est tracée en Figure 6

Correction de l'exercice 2.3 (Trèfle à quatre feuilles) On considère la courbe définie par l'équation polaire

$$r = \cos(2\theta)\ .$$

On voit immédiatement que la courbe est périodique de période π, il suffit de l'étudier pour $\theta \in [0,\pi]$ (partie supérieure de la courbe) pour en déduire la partie inférieure : on a symétrie autour de l'axe $0x$. De plus, on voit aussi que $r(\pi - \theta) = \cos(2\theta) = r(\theta)$, d'où une symétrie par rapport à l'axe Ox. Il suffit donc de se focaliser sur l'intervalle $[0,\pi/2]$. On a $r'(\theta) = -2\sin(2\theta)$, d'où le tableau de variations

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$r'(\theta)$	0	$-$	-1	$-$	0
$r(\theta)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$r(\theta)/r'(\theta)$	∞		-1		$-\infty$

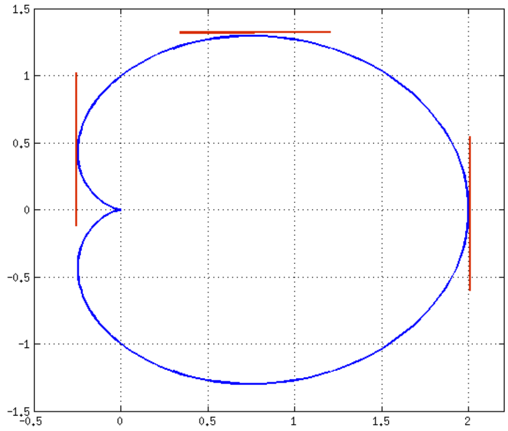

FIG. 6: La cardioïde.

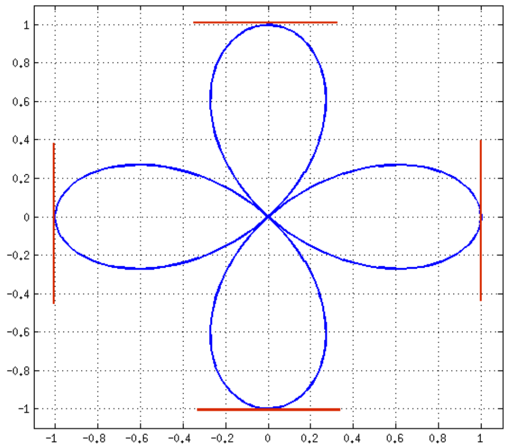

FIG. 7: La trêfle à quatre feuilles.

On voit aussi que r/r' diverge quand $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$, signe que la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur. On a donc une tangente verticale en $\theta = 0$ et une tangente horizontale en $\theta = \pi/2$. On note aussi que $r/r' = 0$ quand $\theta = \pi/4$, ce qui indique qu'en ce point (qui est un point quadruple) la tangente est parallèle au rayon vecteur.

La courbe est tracée en Figure 7

Correction de l'exercice 2.4 (Spirale logarithmique) On considère la courbe définie par l'équation polaire

$$r = \exp(\theta) \ .$$

On remarque que cette fonction ne présente pas de périodicité ; de plus,

$$\lim_{\theta \to -\infty} r(\theta) = 0 \ , \qquad \lim_{\theta \to \infty} = \infty \ .$$

On voit facilement que $r'(\theta) = r(\theta) > 0$, donc r est strictement croissant. De plus, on voit que $r/r' = 1$ pour tout θ ; ainsi, la tangente fait un angle de $\pi/4$ avec le rayon vecteur en tout point de la courbe.

On peut obtenir les points de tangente verticale et horizontale en calculant

$$x(\theta) = \cos(\theta) e^{\theta} \ , \quad x'(\theta) = (\cos(\theta) - \sin(\theta)) e^{\theta} \ ,$$

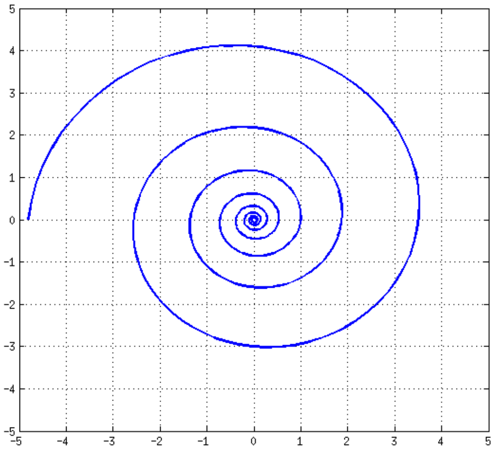

Fig. 8: Spirale logarithmique.

$$y(\theta) = \sin(\theta)e^{\theta} \ , \quad x'(\theta) = (\sin(\theta) + \cos(\theta))e^{\theta} \ .$$

Ainsi, la tangente est verticale ($x' = 0$) quand $\sin(\theta) = \cos(\theta)$, soit quand $\theta = (4k+1)\pi/4$, et horizontale ($y' = 0$) quand $\sin(\theta) = -\cos(\theta)$, soit quand $\theta = (4k+3)\pi/4$.

La courbe est tracée en Figure 8

Correction de l'exercice 2.5 (Conique) On considère la courbe définie par l'équation polaire

$$r = \frac{2}{1+\cos(\theta)} \ ,$$

On voit qu'elle est partout définie sauf en $\theta = \pi$. Par ailleurs, elle est symétrique par rapport à l'axe (Ox) car $r(-\theta) = r(\theta)$. On peut donc limiter le domaine d'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.

Calculons

$$r'(\theta) = \frac{2\sin(\theta)}{(1+\cos(\theta))^2} \ ,$$

on voit que $r'(\theta) \leq 0$ pour tout θ, et que $r'(0) = 0$. De plus,

$$\frac{r}{r'} = \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

diverge pour $\theta = 0$, donc on a une tangente perpendiculaire au rayon vecteur pour $\theta = 0$.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$r'(\theta)$	0	$+$	1	$+$	∞
$r(\theta)$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	∞
$r(\theta)/r'(\theta)$	∞		1		0

On voit qu'il existe une branche infinie pour $\theta \to \pi$. Pour en déterminer la nature, calculons

$$\lim_{\theta\to\pi} \sin(\theta-\pi)r(\theta) = \lim_{\theta\to\pi} \frac{-2\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} = \infty \ .$$

Il s'agit donc d'une branche parabolique... normal puisque la courbe est une parabole.

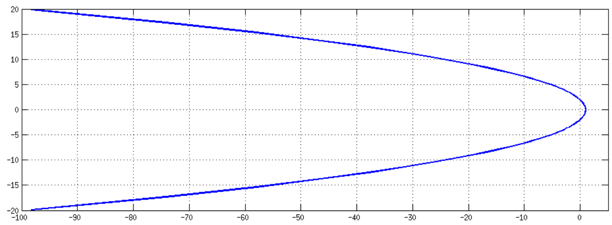

FIG. 9: Parabole.

3 Courbes classiques

Correction de l'exercice 3.1 Soit (Γ) la courbe définie, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, par la représentation Cartésienne

$$x(t) = 2\cos(t) \ , \qquad y(t) = 3\sin(t) \ .$$

1. (Γ) est une ellipse admettant l'origine comme centre, et l'axe (Oy) comme directrice.
2. Dans le repère orthonormé usuel, l'équation cartésienne est

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \ .$$

3. L'équation polaire de (Γ) est de la forme

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)} \ ,$$

où r est le rayon vecteur calculé à partir d'un foyer. Le foyer est situé sur l'axe (Oy) (axe focal) à distance $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ de l'origine (ici $a = 3$ et $b = 2$). Les paramètres de l'ellipse sont donc

$$h = \frac{b^2}{c} = \frac{4}{\sqrt{5}} \ , \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \ , \qquad p = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{3} = eh \ .$$

Correction de l'exercice 3.2 Soit (Γ) la courbe définie par l'équation Cartésienne

$$\frac{x^2}{16} + y^2 = 1 \ .$$

1. (Γ) est une ellipse, de demi grand axe $a = 4$ et demi petit axe $b = 1$, centrée sur l'origine.
2. Elle peut s'écrire sous forme paramétrée

$$x = 4\cos(t) \ , \qquad y = \sin(t) \ .$$

Correction de l'exercice 3.3 Soit (Γ) la courbe définie par l'équation Cartésienne

$$x^2 + 4y^2 = 4 \ , \qquad y \geq 0 \ .$$

1. L'équation Cartésienne s'écrit aussi

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \ , \qquad y \geq 0 \ .$$

et on reconnaît encore une ellipse centrée sur l'origine, de demi-grand axe $a = 2$ et demi petit axe $b = 1$. La contrainte $y \geq 0$ restreint à la moitié supérieure de l'ellipse.

2. représentation paramétrée :

$$x = 2\cos(t) \ , \quad y = \sin(t) \ , \qquad t \in [0, \pi] \ .$$

Correction de l'exercice 3.4 Soit (Γ) la courbe définie par l'équation Cartésienne

$$x^2 + 4y^2 - 2y = 0 \ .$$

1. Cette équation se met sous la forme

$$x^2 + 4(y^2 - y/2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4(y - 1/4)^2 = 1/4 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 16(y - 1/4)^2 = 1$$

   C'est donc une ellipse de demi grand axe $a = 1/2$ et demi petit-axe $b = 1/4$, centrée sur le point de coordonnées $(0, 1/4)$.

2. Une représentation paramétrée de (Γ) est

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos(t) \ , \qquad y(t) = \frac{1}{4}\left[1 + \sin(t)\right] \ .$$

Correction de l'exercice 3.5 (Problème à deux corps) Considérons deux points matériels A et B respectivement dotés des masses M et m supposées constantes (le fait de considérer des corps ponctuels peut se justifier, car on peut démontrer que d'un point de vue gravitationnel il est équivalent de considérer une sphère de masse volumique homogène ou de concentrer toute la masse en son centre).

On note $\vec{r} = \vec{r}(t) = \overrightarrow{AB}(t)$. Dans ce type de problème plan, les coordonnées polaires (r, θ) sont mieux adaptées que les coordonnées cartésiennes. En introduisant la variable auxiliaire $u = 1/r$, il est possible de montrer que u satisfait une équation différentielle du type

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{G(M+m)}{C^2} \ ,$$

où G est la constante de gravitation universelle, et C est une constante, appelée constante des aires (qui apparaît dans les lois de Kepler).

1. Intégrer cette équation différentielle, et vérifier que la solution se met sous la forme

$$u = \frac{GMm}{\eta C^2} + \alpha\cos(\theta - \theta_0) \ ,$$

   où η est la masse réduite (à expliciter), et α et θ_0 sont des constantes d'intégration.

2. Montrer que la solution prend la forme d'une conique, et décrire la trajectoire en fonction des valeurs des constantes du problème.